新世纪高校金融学教材译丛

动态资产定价理论（第三版）

Dynamic Asset Pricing Theory

(3rd Edition)

达雷尔·达菲 著
(Darrell Duffie)
潘存武 译

上海财经大学出版社

策　　划＝黄　磊
责任编辑＝姜　勇
封面设计＝周卫民

F830.91
D11

《动态资产定价理论》（第三版）是对资产定价理论的一个重要贡献。长期以来，该书已经成为证券市场领域高级博士课程的标准教程。《经济文献杂志》（*Journal of Economics Literature*）认为其"对有关或有权益证券的定价处理，在深度和广度上均是独一无二的"。凭借此新版，《动态资产定价理论》一书将维持其领域内的领先地位。

本书的主题思想是套利、最优化和均衡，这三点也是构架起全书整个理论体系的三大支柱。这三大主题思想在离散时间和连续时间的情景模型中均得到了反复体现。1997年经济学诺贝尔奖得主——罗伯特·默顿（Robert C. Merton）——盛赞其关于离散时间模型和连续时间模型的资产定价理论的论述极为优秀！

本书的主体内容共12章，详细阐述了资产定价理论的主要思想和理论研究方法，知识面宽，内容博大精深，在国外具有很大的影响。对于希望进入资产定价领域从事研究工作的国内研究者来说，本书将提供极大的帮助，具有十分重要的参考价值。

作者为了使读者更好地阅读本书，在每章的章末还附有大量精心选制的习题，并且，还提供了10个附录，为读者阅读本书提供了必备的数学背景知识。

本书作者达雷尔·达菲（Darrell Duffie），是斯坦福大学商学研究生院的教授，其研究的主要领域为资产定价、风险管理、信用风险建模，以及固定收益证券和股票市场，在国际上享有很高的知名度。

ISBN 7-81049-997-1
9 787810 499972 >

ISBN 7-81049-997-1/F·863
定价：57.00元

新世纪高校金融学教材译丛

动态资产定价理论

（第三版）

[美] 达雷尔·达菲 著
(Darrell Duffie)
潘存武 译

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

动态资产定价理论(第三版)/[美]达雷尔·达菲著;潘存武译.—上海:上海财经大学出版社,2004.5

新世纪高校金融学教材译丛

书名原文:Dynamic Asset Pricing Theory

ISBN 7-81049-997-1/F·863

Ⅰ.动… Ⅱ.①达… ②潘… Ⅲ.有价证券-理论研究-高等学校-教材 Ⅳ.F830.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 091022 号

□策　　划　黄　磊

□责任编辑　姜　勇

□封面设计　周卫民

DONGTAI ZICHAN DINGJIA LILUN

动态资产定价理论

(第三版)

[美] 达雷尔·达菲 著

(Darrell Duffie)

潘存武　　译

上海财经大学出版社出版发行

(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)

网　　址:http://www.sufep.com

电子邮箱:webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海长阳印刷厂印刷装订

2004 年 5 月第 1 版　2004 年 5 月第 1 次印刷

787mm×960mm　1/16　30 印张　638 千字

印数:0 001—4 000　　定价:57.00 元

译者序

达雷尔·达菲是斯坦福大学商学研究生院的James Irvin Miller[①]金融学教授。他所教授和研究的主要领域为资产定价、风险管理、信用风险建模，以及固定收益证券和股票市场。他所撰写的《动态资产定价理论》(第三版)是对资产定价理论的一个重要贡献，该书已经成为证券市场领域高级博士课程的标准教程，它对有关或有权益证券的定价处理，在深度和广度上均是独一无二的，并且每章末尾还附有大量精心选制的习题。

《动态资产定价理论》阐述了资产定价理论的主要思想和理论研究方法，知识面宽，内容博大精深，特别是提供了丰富的文献引证，在国外具有很大的影响。对于希望进入资产定价领域从事研究工作的国内研究者来说，本书将提供极大的帮助，具有十分重要的参考价值。随着我国证券市场领域的不断改革和向国际规范化市场的接轨，以及我国加入WTO后金融市场的不断开放和不断融入全球金融市场，我国对动态资产定价领域感兴趣的学者和实务界人士正在急剧增加，因此，这一学科领域在我国也必将迎来一个旺盛的发展时期。

虽然我在国外留学期间，也曾读过这本书，但那时只是从一个读者的角度去感受本书，只觉得这是一本好书，好在作者把资产定价理论纳入了严谨的理论数学框架。从上海财经大学出版社接到这本书的翻译任务后，我又重新来阅读本书，这时是从一个译者的角度来研读这本书，此时就感受到它的深度。尽管我感觉尚能读懂该书，但一时却无法用中文把它的内容完整地表述出来，这或许是局限于我的中文语言根底，或许是中文在用来描述类似本书的复杂问题时，确实具有局限性。因此，自从我接到任务后，大半年内也未能动笔。从2002年初接到该书的翻译任务开始，到我向出版社交稿，大约用了一年半的时间。这一年半的时间里，我的整个身心都被这本书强烈地吸引了。

贯穿全书的主题思想是套利、最优化和均衡，这三点也是构架起全书整个理论体系的三大支柱。这三大主题思想在离散时间和连续时间的情景模型中均得到了反复体现。

全书理论的要点是状态价格的概念，这意味着对每一状态和时间均存在一个正的贴现因子。证券的价格则被定义为状态价格的加权平均值或者证券的依状态而定的券息期望值。在有限维的情形下，状态价格存在的充分必要条件是不存在套利机会。在无限维

---

① James Irvin Miller是为该教授席位提供赞助的基金名称。——译者注

情形下，只要满足一定的技术条件，上述充分必要条件必定成立。给定行为人的最佳投资组合选择，状态价格向量由行为人的效用梯度给出。在帕累托最优化的均衡中，状态价格向量就好像由一代表性行为人在经济总量消费过程处的效用梯度给出。

本书的主体内容分为两部分，共12章。而且，作者为了使读者更好地阅读本书，还提供了10个附录。此外，为了方便读者查阅，作者还提供了大量参考资料、人名对照表和术语对照表。书中的10个附录为读者阅读本书提供了必备的数学背景知识，主要是有关概率论和随机过程的数学知识。主体内容的第一部分共有4章，均是围绕着离散时间和离散状态(空间)下的资产定价问题展开论述。第1章介绍最基本的单段时期资产定价理论模型。第2章则把第1章的内容推广到多期的情形。第3章阐述第2章内容在马尔可夫情景下的动态规划情形，著名的何和李(Ho-and-Lee)模型以及布莱克—德曼—托尔(Black-Derman-Toy)期限结构模型就被作为练习包含在第3章中。第4章把第3章的内容推广到无限时间视野的情形，即所谓的卢卡斯(Lucas)模型。

主体内容的第二部分为第5章～第12章，共8章，均是围绕着连续时间情形下的资产定价问题展开论述。其中，第5章引入连续交易的模型，并在其基础上推出无套利情形下衍生证券的布莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)偏微分方程。第6章介绍与连续时间情形下状态价格相当的等价鞅测度概念。第7章论述各种期限结构模型。第8章介绍风险为随机变量时的期权定价问题。第9章总括运用动态规划法和等价鞅测度法或状态价格法求解连续时间最佳投资组合选择问题。第10章总括均衡状态下的证券定价问题。第11章论述股权和公司债的定价问题。第12章探讨连续时间情形下计算衍生证券价格的数值方法，包括蒙特卡罗(Monte-Carlo)模拟法和有限差分法。

由于只是形式上的类似性，因此，主体内容第二部分对第一部分并没有内容上的依赖性，读者阅读第一部分可以为第二部分更好地获得一些直觉的理解。本书在欧美等国家被广泛选为经济、金融等专业的研究生和博士生课程教材。本书作为教材使用时，为了推进课程进度，教师可以选讲第1章和第2章中的一些基本概念(主要是状态价格的概念)，然后直接进入第二部分的第5章～第11章。第12章是否讲授则可视是否强调数值求解方法而定。

本书读者最好具备大学本科或本科以上的高等数学背景知识。尤其是应该对线性代数比较熟悉，最好也熟悉泛函分析、测度理论和概率论。如果读者不了解以上数学背景知识，可以参阅书后的有关附录。书后的附录系统地总结了各种必须的数学背景知识。读者最好还具有相当于大学本科程度的微观经济学的一些背景知识。

由于本书的理论内容比较深奥，而且有些术语也比较罕见，因此，本书的翻译遇到了不少的难度，在此我不一一指出。但本书中有些术语的翻译肯定是有不确切之处的，在此，我期盼行家的批评指正。读者在阅读过程中，如果碰到有产生歧义的地方，有条件的还望参阅英文原著。

在准备和翻译本书过程中，一些难懂的学术和数学证明问题得到了原著作者的直接帮助，在此向原著作者表示感谢。本书翻译出第一稿后，我的研究生殷鹏飞、许宝红、张益萍成为最早的“读者”，在此我感谢他(她)们帮助我整理资料、审稿和排版。我还要感谢上海财经大学研究生部的蒋传海教授，他耐心细致的校译工作帮助我纠正了许多问题。最后，我要非常感谢上海财经大学出版社的同志们，尤其是黄磊老师和姜勇老师以及排版室的同志们，他们为本书的出版做出了大量的、艰苦的工作。

最后，我要指出，尽管所有与本书出版有关的人都尽了最大努力，但由于本书的难度和许多实际问题，书中难免还是会出现一些错误和遗略，其责任由我一个人承担。在此，我恳请行家和读者发现问题后能把意见反馈给译者，译者将不胜感激。我的电子邮箱地址是：pancwk@mail. shufe. edu. cn。

译者：潘存武
2004 年 5 月于上海

序　言

本书将介绍和论述不确定性多期模式下的证券组合选择和资产定价理论。另一可替代的书名是:《套利、最优化和均衡》,这是因为本书正是围绕资产价格的下述三个基本约束构筑起来的:无套利、单个行为人最优化和市场均衡。最重要的共同准则是,这三个条件中的任意一个均意味着"状态价格"的存在,即存在正的贴现因子,每一种状态和时间都对应着一个贴现因子,使得任意证券的价格只不过是以状态价格为权重的未来收入的加权和。这一思想可以追索到阿罗(Arrow,1953)的证券市场一般均衡模型。因而,论证状态价格是我们面临的主要任务。为了简化这些概念并且突出离散和连续时间两种模型的类似性,本书没有对技术性细节问题给予重视。

对20世纪80年代中期毕业的研究生来说,1969~1979年是动态资产定价理论的黄金时期。罗伯特·默顿(Robert Merton)首创了连续时间金融模型,并对最佳证券组合消费政策进行动态规划和明晰求解。这为其1973年另一里程碑式的贡献——证券价格的一般均衡模型搭好了表现的舞台。他的另一个主要贡献是对布莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)于1973年引入的期权定价公式的基于套利的证明,以及将该方法应用于衍生证券定价的不断努力和探索。现在看来,到目前为止,布莱克—斯科尔斯模型是这一"黄金时期"最重要的惟一理论突破,就其在金融理论和实践中的整体重要性来说,可与莫迪格利尼—米勒(Modigliani and Miller,1958)定理和夏普(Sharpe,1964),以及林特纳(Lintner,1965)的资本资产定价模型(CAPM)并驾齐驱。布莱克—斯科尔斯模型极具影响力的一个简化运用了对比尔·夏普(Bill Sharpe)思想的一个推广,即考克斯、罗斯和鲁宾斯坦因(Cox, Ross, and Rubinstein, 1979)的"二项"期权定价模型。

在离散时间模型时期,理罗伊(LeRoy,1973)、鲁宾斯坦因(Rubinstein,1976)以及卢卡斯(Lucas,1978)把CAPM推广到了多期情形。卢卡斯模型给出了均衡资产定价模型的"一般风味"。CAPM的最简单多期描述最终出现在道格·布黎登(Doug Breeden,1979)于1979年发表的基于消费的连续时间CAPM中。尽管考克斯—英格索—罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)的利率期限结构模型直到1985年才发表,但是,它早在20世纪70年代中期就出现了,而且仍然是实际应用中经常用到的连续时间一般均衡资产定价模型的首要教科书例子。这个成果也可看成是那个年代的主要理论突破之一。最后,拓展考克斯和罗斯(Cox and Ross,1976),罗斯(Ross,1978),以及哈瑞森和克莱普斯(Harrison

and Kreps,1979)的思想,就可得到整个动态资产定价理论的几乎完整的概念体系。

自1979年以后的理论发展,除了少数例外,均为一些扫尾工作。假设条件被弱化了,从而出现了相当数量的推广和演示模型,并且各种问题逐渐在哈瑞森—克莱普斯(Harrison-Kreps)的等价鞅测度模型的影响下统一起来。例如,目前连续时间情形下最佳证券组合和消费选择的标准处理方法是考克斯和黄(Cox and Huang,1989)中的鞅法。无套利和存在等价鞅测度之间的实质性关系,最终被德尔伯恩和施卡切梅尔(Delbaen and Schachermayer,1999)得到。

在应用方面,证券市场经历了爆炸式的新的定价技术、对冲应用和证券创新,其中大多数是基于布莱克—斯科尔斯模型和相关的套利模型。例如,几乎所有的投资银行均具备执行复杂的期限结构数学模型所需要的专家和计算机技术。由于新财富的不断投入,目前已开发出了一批特殊模型来处理随机波动性,包括违约在内的跳跃行为,以及利率期限结构模型。随着模型内容的丰富和可操作性的提高,在计量经济方面也取得了许多长足的进步。

尽管很难预测理论下一步会如何发展,但是,为了帮助新进入资产定价领域的学者快速进步,把一些基本的理论内容浓缩成一本教材应是聪明的做法。本书的写作思路是把它做为一本安排有序的教材,而不是一本研究专论集。出于表述的方便,很多一般性的内容都已被忽略了,而且相对来说不过多地强调数学的严谨性,也不重视一般均衡的存在。正如同本书标题所显示的,我只是论述资产定价的理论方面。尽管也许把资产定价的理论和实证结合起来论述是很有用的,但是,我们已经有诸如坎贝尔、罗和麦金雷(Campbell, Lo, and MacKinlay, 1997)以及高瑞洛克斯和杰斯埃克(Gourieroux and Jasiak, 2000)的金融数据计量经济模型的出色处理方法。我也没有涉及证券市场运行的某些重要方面,诸如不对称信息和交易费用。我只选择论述动态资产定价的一些重要思想。尽管如此,这些内容也多得不能被囊括在一本书或一个学期的课程之中。

其他阐述本课题的著作包括:阿维兰尼达和劳伦斯(Avelleneda and Laurence, 2000),博尔克(Björk, 1998),达纳和杰安伯兰克(Dana and Jeanblanc, 1998),德曼基和罗切特(Demange and Rochet,1992),迪威尼和威尔姆特(Dewynne and Wilmott, 1994),迪科斯特和平迪克(Dixit and Pindyck,1993),多斯安(Dothan, 1990),达菲(Duffie, 1988b),哈瑞斯(Harris,1987),黄和林特博格(Huang and Litzenberger,1988),英格索(Ingersoll,1987),加罗(Jarrow, 1988),卡拉特查斯(Karatzas,1997),卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve, 1998),拉姆伯登和拉佩尔(Lamberton and Lapeyre, 1997),麦吉尔和昆兹(Magill and Quinzii, 1994),默顿(Merton, 1990),缪塞拉和路特克威斯基(Musiela and Rutkowski, 1997),纳夫特茨(Neftci, 2000),斯托克伊和卢卡斯(Stokey and Lucas, 1989),威尔姆特、迪威尼和霍威森(Wilmott, Dewynne, and Howison,1993),以及威尔姆特、霍威森和迪威尼(Wilmott, Howison, and Dewynne,

1995)。上面所列出的每一本书都有其自己的目标和主题。我希望读者会从另一个角度和视野找到本书的某些优势。

把本书作为一门较短的连续时间资产定价课程教材的合理方法是以第 1 章、第 2 章作为状态价格的基本概念的入门,然后直接进到第 5 章直至第 11 章。第 12 章是关于数值方法,只要学生能够理解应用这些成果,就可以在课堂上跳过。第 5 章～第 12 章的内容与前 4 章的内容没有任何直接的依赖性。

有关阅读本书所需数学知识的准备问题,只需掌握本科阶段的分析课程[诸如巴托(Bartle,1976)],另外还需掌握线性代数的知识。若是能熟悉罗尔登(Royden, 1968)或者与此类似的关于泛函分析和测度理论的教科书,那么,对理解本书内容将是很有帮助的。掌握一些微观经济学的背景知识也是很有用的,例如克莱普斯(Kreps,1990)或是卢安博格(Luenberger,1995)。掌握诸如杰科德和普罗特(Jacod and Protter, 2000)水平的概率理论也会加快学习进程,尽管测度理论没有在本书中大量使用。不管怎样,本书后面的附录提供了所有需要的概率理论以及随机微积分的概念和定义。更多这方面有价值的参考资料为布莱芒德(Brémaud,1981),卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve, 1998),雷瓦兹和约尔 (Revuz and Yor, 1991),以及普罗特(Protter,1990)。

对学生而言,最好的学习方法似乎就是多做练习。本书中每一章均有习题和文献资料附注。只要有可能,我总是试图彻底全面地给出多项研究成果的来源和参考资料。如果我有错误或遗漏的地方,恳请读者提醒我,以便下次更正。贯穿全书的符号和术语都相当标准,通常为学术界普遍采用。例如,用$\mathbb{R}$表示实数线,用$\bar{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$表示拓展的实数线。对任意集合 Z 和正整数 n,用 Z^n 表示 n 维的集合$(z_1,\cdots,z_n)$,这里,对所有的 i,z_i 属于 Z。$\mathbb{R}^n$ 就是一个例子。本书中有不少不等式,有关不等式的惯例说明如下:

- $x\geqslant 0$ 表示 x 为非负,对$\mathbb{R}^n$ 中的 x,相当于 $x\in\mathbb{R}^n_+$。
- $x>0$ 表示 x 为非负且非零,但不一定是所有的坐标值均严格为正。
- $x\gg 0$ 表示 x 严格为正。这有时也说成"x 严格为正"。对$\mathbb{R}^n$ 中的 x,相当于 $x\in\mathbb{R}^n_{++}=\text{int}(\mathbb{R}^n_+)$。(int:interior,内部。——译者注)

尽管在适当的时候会进行提示,但是,读者还是应该记住 $X=Y$ 所表示的意思是等式几乎处处或几乎肯定(视具体情况而定)成立,对上面的各种不等式也应该同样警惕。如果有序集(诸如$\mathbb{R}^n$)上的实数函数 F 是增函数,那么,只要 $x\geqslant y$,$F(x)\geqslant F(y)$;如果 F 是严格增函数,那么,只要 $x>y$,$F(x)>F(y)$。当函数的定义域和值域很明显时,记号"$x\mapsto F(x)$"表示 x 映射为 $F(x)$的函数。例如,$x\mapsto x^2$ 表示由 $F(x)=x^2$ 定义的函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。还有一点值得指出(尽管适当的时候也会提醒),为了表述上的方便,我们定义一个连续时间过程为积集 $\Omega\times[0,T]$上的一个可测函数,这里$[0,T]$表示时间区间,$(\Omega,\mathcal{F},P)$表示所给定的概率空间。

本书的前 4 章是离散时间情形,具有离散状态集。这会帮助我们建立起第 5 章～第

12章中各模型的直观感觉。本书理论的三个支柱——套利、最优化和均衡，在不同的模式下被反复论述和发展。第1章是基本的单期模型。第2章把第1章中的成果推广到多期的情形。第3章把第2章专门化成马尔可夫情形，并说明将动态规划作为另一种求解方法的魅力。何和李(Ho-and-Lee)以及布莱克—德曼—托尔(Black-Derman-Toy)期限结构模型将作为习题被本章引进。第4章是第3章内容的无限期情形，又被称为卢卡斯模型。

本书理论的焦点是状态价格的概念，它规定任何证券的价格为状态价格的加权和或者证券的状态依存券息的期望值。在有限维情形下，存在状态价格的充分必要条件是无套利机会。在无限维情形下，给定适当的技术规则性条件，同样的结论仍然成立。若给定某个行为人的最佳证券组合选择，那么，状态价格向量则由该行为人的效用梯度给出。在帕累托最优化均衡下，状态价格向量同样也是由某个代表性行为人在经济总消费过程处的效用梯度给出。

第5章～第11章论述连续时间资产定价理论，这里的不确定性是由布朗运动产生。在第11章中，不连续的信息有一过渡问题，即这样一种情形：某一事件的条件概率并不随时间的流逝而连续调整。泊松到达就是例子之一。

第5章引入连续交易模型，并导出衍生证券无套利价格的布莱克—斯科尔斯偏微分方程(PDE)。哈瑞森—克莱普斯(Harrison-Kreps)的等价鞅测度和连续时间情形下的状态价格理论同时在第6章中论述。第7章论述利率期限结构模型，包括布莱克—德曼—托尔(Black-Derman-Toy)，瓦西塞克(Vasicek)，考克斯—英格索—罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)和奚斯—加罗—默顿(Heath-Jarrow-Morton)，以及它们的各种推广。第8章论述诸如期货、远期合约、美式期权和回望期权等特别衍生证券的定价问题。第8章还论述允许随机波动性的期权定价模型。由于其分析上的可行性，仿射状态过程的概念将在第7章和第8章被反复应用。第9章运用动态规则法和等价鞅测度或状态价格法对最佳连续时间证券组合选择进行总结。

第10章是均衡情形下证券定价的总结，其中著名的模型包括布黎登(Breeden)基于消费的资本资产定价模型和利率期限结构模型的一般均衡版考克斯—英格索—罗斯模型。

第11章论述公司证券(诸如债务和股权)的定价问题。该章中最开始的模型是基于公司的资本结构，并根据资产充足性来定义违约，最后的模型则假设有违约发生强度。第12章概述连续时间情形下计算衍生证券价格的三种数值方法，即二项近似法，证券价格离散时间近似的模拟法，以及资产价格对应的PDE方程的有限差分解或所谓的基本解。

在准备本书第一版时，除了上述所提到的对这些理论做出发展的人之外，我还得到了很多其他人的帮助。1982年，米歇尔·哈瑞森(Michael Harrison)曾在斯坦福大学开了一门课，这对我的理论理解和研究目标有很重要的影响。当时坐在我旁边的是黄之福(Chi-fu Huang)，我们共同学习了这些资料的绝大部分，并且成为亲密的朋友和合作伙伴，我欠他

很多。我也很感激尼可(Niko)和范娜·思凯达斯(Vana Skiadas),在位于思凯索斯(Skiathos)的家中,他们待我特别地热情和友好。第一版的许多内容就是在那里写出的。

我也受益于与很多同事多年来的科研合作,这些同事包括乔治·康斯坦丁尼德斯(George Constantinides),戴强(Qiang Dai),彼得·德马兹奥(Peter DeMarzo),拉瑞·爱普斯坦恩(Larry Epstein),尼克黎·加利鲁(Nicolae Garleanu),马克·高曼(Mark Garman),约翰·加克浦欧斯(John Geanakoplos),皮尔瑞—威斯·基奥法德(Pierre-Yves Geoffard),彼得·格里恩(Peter Glynn),迈克·哈瑞森(Mike Harrison),黄之福(Chi-fu Huang),黄明(Ming Huang),麦特·杰克逊(Matt Jackson),路易·凯恩(Rui Kan),戴维·兰德(David Lando),刘俊(Jun Liu),皮尔瑞—劳易斯·莱恩斯(Pierre-Louis Lions),马金(Jin Ma),安德瑞·马斯科勒(Andreu Mas-Colell),安迪·麦克里南(Andy McLennan),潘俊(Jun Pan),拉瑟·佩德森(Lasse Pedersen),菲利浦·普罗特(Philip Protter),罗海特·雷海(Rohit Rahi),托尼·里查德森(Tony Richardson),马克·施洛德(Mark Schroder),威尼·夏弗(Wayne Shafer),肯恩·辛格尔顿(Ken Singleton),科斯第斯·思凯达斯(Costis Skiadas),理查德·史丹登(Richard Stanton),雍炯敏(Jiongmin Yong),以及比尔·查姆(Bill Zame)。我要特别感谢科斯第斯·思凯达斯,他慷慨给予的许多好想法对我的研究成果有重要影响。

在斯坦福,我很幸运有机会与我的许多同事进行许多有收获的研究讨论,特别是与我的同事安雷特·阿德麦第(Anat Admati),斯第吾·布伊德(Steve Boyd),彼得·德马兹奥(Peter DeMarzo),彼得·格里恩(Peter Glynn),斯第吾·格莱雷第尔(Steve Grenadier),琼·格洛恩菲斯特(Joe Grundfest),彼得·哈姆默德(Peter Hammond),迈克·哈瑞森(Mike Harrison),亚曼·希恩迪(Ayman Hindy),哈瑞森·洪(Harrison Hong),黄明(Ming Huang),杰克·麦克科那德(Jack McKonald),乔治·帕克(George Parker),保罗·泊雷德尔(Paul Pfleiderer),巴拉基·普瑞贝卡(Balaji Prabakar),曼优·普瑞(Manju Puri),汤姆·萨金特(Tom Sargent),比尔·夏普(Bill Sharpe),肯恩·辛格尔顿(Ken Singleton),吉姆·范·霍恩(Jim Van Horne),以及杰弗·茨威贝尔(Jeff Zwiebel);在别处,也有许多其他的同事,这里不能一一列举了。

我很荣幸能有机会与下述这些同事共同研究应用金融模型:迈克·布尔格(Mike Burger),比尔·克尔金(Bill Colgin),亚当姆·达弗(Adam Duff),斯德森·基伯劳(Stenson Gibner),伊利扎贝斯·格雷斯尔·科瑞·格斯戴夫森(Elizabeth Glaeser Craig Gustaffson),科威恩·乔埃(Corwin Joy),维恩斯·凯密斯盖(Vince Kaminsky),肯恩·罗里斯(Ken Knowles),赛基欧·考斯坦克(Sergio Kostek),琼·兰格赛姆(Joe Langsam),阿洛克·麦优姆达(Aloke Majumdar),麦特·佩吉(Matt Page),克瑞西娜·遥(Krishna Rao),阿密尔·萨德(Amir Sadr),劳易斯·斯科特(Louis Scott),史威(Wei Shi),约翰·尤格拉姆(John Uglum),以及马克·威廉姆斯(Mark Williams)。

我感谢金斯顿·达菲(Kingston Duffie)，雷威·麦纳尼(Ravi Myneni)，保罗·贝斯特恩(Paul Bernstein)，以及米歇尔·布威尔(Michael Boulware)写出计算机编码并运行某些数值案例，感谢琳达·贝瑟尔(Linda Bethel) 帮助实现 LaTex 排版和制图，感谢泰纳·普克(Tina Burke)公司的劳瑞·皮克特(Laurie Pickert)帮助打字输入和编辑。关于文献研究方面的帮助，我要感谢陈誉华(Yu-Hua Chen)，麦利沙·高扎利茨(Melissa Gonzalez)，戴维·李(David Lee)，以及安雷里塞·昆罗兹(Analiza Quiroz)。杰克·雷普切克(Jack Repcheck)和彼得·道格何第(Peter Dougherty)是一直友好地给予帮助和支持的两位好编辑。

另外，我还从不少读者那里得到建议和评论，在此表示真心的感谢，这些读者包括费密·阿萨博格鲁(Fehmi Ashaboglu)，罗伯特·阿希若夫特(Robert Ashcroft)，艾瑞娜·艾姆德森(Irena Asmundsen)，阿雷克安德瑞·德·艾斯普瑞莫特(Alexandre d'Aspremont)，弗雷威欧·奥劳(Flavio Auler)，科瑞斯·艾卫瑞(Chris Avery)，科瑞·拜克(Kerry Back)，亚若斯雷·贝塞利(Yaroslav Bazaliy)，雷尔夫·贝克(Ralf Becker)，安特杰·贝恩特(Antje Berndt)，米歇尔·布威尔(Michael Boulware)，约翰·坎贝尔(John Campbell)，安德鲁·凯普林(Andrew Caplin)，凯瑞恩·查尔第克林(Karen Chaltikian)，威克特·切诺祝可夫(Victor Chernozhukov)，陈洪根(Hung-KSen Chien)，瑟欧格曼·蔻(Seongman Cho)，钟菲同(Fai Tong Chung)，全清善(Chin-Shan Chuan)，何威·科博(Howie Corb)，戴强(Qiang Dai)，尤基利·德姆劳(Eugene Demler)，邓世杰(Shijie Deng)，米切利·迪克(Michelle Dick)，菲尔·多兰恩(Phil Dolan)，罗德·杜恩凯(Rod Duncan)，威戴德·爱尔麦瑞贝(Wedad Elmaghraby)，科安·艾斯特菲麦(Kian Esteghamat)，马克·菲顾森(Mark Ferguson)，科瑞斯第安·瑞斯·弗罗(Christian Riis Flor)，普瑞萨恩·傅罗瑞(Prashant Fuloria)，约翰·弗奎(John Fuqua)，尼克黎·加利鲁(Nicolae Garleanu)，马克·戈麦斯(Mark Garmaise)，菲利泊·基兰尼(Filippo Ginanni)，麦可·格洛尼堡(Michel Grueneberg)，韩冰(Bing Han)，菲利普·海洛特(Philippe Henrotte)，阿曼·辛迪(Ayman Hindy)，叶尔·霍希堡(Yael Hochberg)，本田俊树(Toshiki Honda)，星野泰一(Taiichi Hoshino)，胡江平(Jiangping Hu)，黄明(Ming Huang)，科瑞斯托堡·胡尼尔斯(Cristobal Huneeus)，多恩·伊格里哈特(Don Iglehart)，米歇尔·英爵利格托(Michael Intriligator)，菲世德·杰姆斯迪安(Farshid Jamshidian)，蒋平(Ping Jiang)，史孙克·凯姆贝(Shinsuke Kambe)，路易·凯恩(Rui Kan)，罗恩·卡瑞第(Ron Karidi)，多恩·金(Don Kim)，菲利克斯·库博勒(Felix Kubler)，爱兰·库利格(Allan Kulig)，约茨·库瓦那(Yoichi Kuwana)，皮尔洛·拉·穆拉(Piero La Mura)，兰颖桐(Yingcong Lan)，琼·兰格赛姆(Joe Langsam)，杰科·李(Jackie Lee)，安德瑞·列维(Andre Levy)，李书静(Shujing Li)，李文智(Wenzhi Li)，林同伟(Tiong Wee Lim)，刘俊(Jun Liu)，里欧尼德·李特威克(Leonid

Litvak)，韩洛·路斯特格(Hanno Lustig)，罗博·麦克米兰(Rob McMillan)，瑞尼希·麦拉(Rajnish Mehra)，瑟格·摩洛若夫(Sergei Morozov)，科瑞斯多赫·缪勒(Christophe Mueller)，雷威·麦纳尼(Ravi Myneni)，李·贝斯·奈尔森(Lee Bath Nelson)，伊格·纽曼(Yigal Newman)，安基拉·吴(Angela Ng)，大桥一彦(Kazuhiko Ōhashi)，欧阳辉(Hui Ou-Yang)，约翰·欧文德克(John Overdeck)，海迪·欧文(Hideo Owen)，卡格拉·欧茨德(Caglar Ozden)，米可·派卡恩(Mikko Packalen)，潘俊(Jun Pan)，拉瑟·佩德森(Lasse Pedersen)，艾尔贝特·皮瑞茨(Albert Perez)，摩尼卡·皮尔兹希(Monika Piazzesi)，乔基·皮卡若(Jorge Picazo)，赫瑞克斯·普洛马查克斯(Heracles Polemarchakis)，麦瑞斯·雷博斯(Marius Rabus)，罗海特·雷海(Rohit Rahi)，史克哈·雷杰(Shikhar Ranjan)，米歇尔·瑞尔森(Michael Rierson)，阿密尔·萨德(Amir Sadr)，玉利·萨尼科夫(Yuliy Sannikov)，马可·斯卡司尼(Marco Scarsini)，马丁·施内德(Martin Schneider)，科瑞斯丁·夏农(Christine Shannon)，申永石(Yong-Seok Shin)，马克·施瓦司(Mark Shivers)，赫希尔·希格厄尔森(Hersir Sigurgeirsson)，马瑟尔洛·辛尼卡尔茨(Marciano Siniscalchi)，雷威·辛夫(Ravi Singh)，罗尼·瑟卡(Ronnie Sircar)，威克德·斯派维可夫司凯(Viktor Spivakovsky)，鲁希·特普拉(Lucie Tepla)，瑟基·特瑞泰卫夫(Sergiy Terentyev)，雷杰特·特瓦瑞(Rajat Tewari)，司卫瑞·索威尔德森(Sverrir Thorvaldsson)，阿里克斯·托尔斯泰克(Alex Tolstykh)，图那·图恩卡(Tunay Tunca)，约翰·尤格拉姆(John Uglum)，里恩·尤曼特瑟夫(Len Umantsev)，斯第恩·范·尼尤瓦堡夫(Stijn Van Nieuwerburgh)，劳拉·威尔德凯姆(Laura Veldkamp)，马莉·亚斯(Mary Vyas)，穆哈莫特·易尔德茨(Muhamet Yildiz)，莱斯·易尔德茨(Nese Yildiz)，王克(Ke Wang)，王能(Neng Wang)，韦超(Chao Wei)，韦巍(Wei Wei)，皮尔瑞—奥利卫尔·威尔(Pierre-Olivier Weill)，斯蒂文·威恩堡(Steven Weinberg)，瑟斯·威恩格拉姆(Seth Weingram)，吴国俊(Guojun Wu)，杨平华(Pinghua Young)，阿沙夫·泽威(Assaf Zeevi)，以及阿雷克安德瑞·泽格洛(Alexandre Ziegler)，还有一些读者的姓名被遗忘了，在此对他们表示歉意。我要特别感谢负责本书第二版日文翻译的专家团，本田俊树(Toshiki Honda)，大桥一彦(Kazuhiko Ōhashi)，约易茨·库瓦那(Yoichi Kuwana)，以及山崎士(Akira Yamazaki)，他们也都是我的好朋友。

为了读者的方便，在第三版中，序言部分已经做了修改。而且，绝大部分章节也做了不少改进。第11章"公司证券"被特别加进了这一版。本书中的错误由我个人负责，但我希望能从读者那里得到更多批评，以及对本书的其他评论。

达雷尔·达菲
Darrell Duffie

目　录

译者序/I

序言/1

第一篇　离散时间模型

1　状态定价引论/3

1.1　套利和状态价格/3

1.2　风险中性概率/4

1.3　最优化及资产定价/5

1.4　有效性和完备市场/7

1.5　最优化与代表性行为人/8

1.6　状态价格贝塔模型/9

习题/11

注释/15

2　基本的多期模型/17

2.1　不确定性/17

2.2　证券市场/18

2.3　套利、状态价格和鞅/18

2.4　单个行为人最优化/20

2.5　均衡和帕累托最优/21

2.6　均衡资产定价/22

2.7　套利和鞅测度/22

2.8　富余证券的价值/24

2.9　美式履约方针和定价模型/25

2.10 提前履约最优吗/28
习题/29
注释/36

3 动态规划法/39
3.1 贝尔曼法/39
3.2 一阶贝尔曼条件/40
3.3 马尔可夫不确定性/41
3.4 马尔可夫资产定价/41
3.5 马尔可夫控制下的证券定价/42
3.6 马尔可夫无套利定价/44
3.7 提前履约和最佳停止/45
习题/46
注释/50

4 无限时期情形/52
4.1 马尔可夫动态规划/52
4.2 动态规划和均衡/55
4.3 套利和状态价格/56
4.4 最优化和状态价格/57
4.5 矩法估计/58
习题/60
注释/61

第二篇 连续时间模型

5 布莱克—斯科尔斯模型/67
5.1 布朗价格下的交易盈利/67
5.2 鞅交易盈利/70
5.3 伊藤价格和盈利/70
5.4 伊藤公式/71
5.5 布莱克—斯科尔斯期权定价公式/71
5.6 布莱克—斯科尔斯公式:第一次尝试/73

5.7 无套利价格随机微分方程/74
5.8 费恩曼—凯科解/75
5.9 多维情形/76
习题/78
注释/81

6 状态价格和等价鞅测度/82
6.1 套利/82
6.2 计量标准的不变性/83
6.3 状态价格和加倍策略/84
6.4 期望回报率/86
6.5 等价鞅测度/87
6.6 状态价格和鞅测度/89
6.7 基尔萨诺夫和风险市场价格/90
6.8 布莱克—斯科尔斯模型的再次尝试/93
6.9 完备市场/94
6.10 富余证券定价/96
6.11 无套利中的鞅测度/97
6.12 有息情形下的套利定价/99
6.13 一次性总量券息和期限结构/100
6.14 鞅测度和无限期/102
习题/103
注释/105

7 期限结构模型/108
7.1 期限结构/109
7.2 单因素期限结构模型/110
7.3 高斯单一因素模型/112
7.4 考克斯—英格索—罗斯模型/113
7.5 仿射单因素模型/114
7.6 期限结构衍生证券/115
7.7 基本解/117
7.8 多因素模型/118
7.9 仿射期限结构模型/119

7.10 远期利率的 HJM 模型/121
7.11 马尔可夫收益率曲线和随机偏微分方程/123
习题/124
注释/128

8 衍生证券定价/135
8.1 黑箱里的鞅测度/135
8.2 远期价格/136
8.3 期货和连续结算/138
8.4 无套利的期货价格/139
8.5 随机波动性/140
8.6 转换分析法与期权定价/144
8.7 美式证券定价/147
8.8 美式证券执行边界/150
8.9 回望期权/152
习题/154
注释/158

9 证券组合和消费选择/163
9.1 随机控制/163
9.2 默顿问题/166
9.3 默顿问题的解/168
9.4 无限期的情形/170
9.5 鞅公式/172
9.6 鞅解/174
9.7 推广/176
9.8 效用梯度法/177
习题/179
注释/185

10 均衡/189
10.1 原始对象/189
10.2 现货证券市场均衡/190
10.3 阿罗—德布鲁均衡/190

10.4 实现阿罗—德布鲁均衡/192
10.5 实物证券价格/193
10.6 最优化与可加型效用函数/194
10.7 均衡与可加型效用/195
10.8 基于消费的 CAPM/197
10.9 CIR 期限结构/198
10.10 不完备市场下的 CCAPM/200
习题/201
注释/204

11 公司证券/208
11.1 布莱克—斯科尔斯—默顿模型/208
11.2 内生违约时间选择/210
11.3 举例:布朗运动型股息增长/212
11.4 税和破产成本/215
11.5 内生资本结构/216
11.6 技术选择/217
11.7 其他种类的市场缺陷/218
11.8 基于强度的违约建模/219
11.9 风险中性强度过程/222
11.10 零收复债券定价/222
11.11 违约时有收复情形下的定价问题/224
11.12 违约调整后的短期利率/225
习题/226
注释/230

12 数值方法/234
12.1 中心极限定理/234
12.2 从"二项"至布莱克—斯科尔斯公式/235
12.3 无界衍生证券收益的二项分布收敛/237
12.4 资产价格过程的离散化/237
12.5 蒙特卡罗模拟/238
12.6 有效 SDE 模拟/239
12.7 费恩曼—凯科的应用/240

12.8 有限差分方法/241
12.9 期限结构举例/244
12.10 可提前执行期权的有限差分算法/247
12.11 状态价格的数值解/247
12.12 定价半群的数值解/249
12.13 匹配初始期限结构/250
习题/251
注释/252

附录/257
A 有限状态概率/259
B 分离超平面定理和最优化/261
C 概率拓展/264
D 随机积分/268
E 随机微分方程、偏微分方程和费恩曼—凯科/273
F 伊藤公式与跳跃/278
G 效用梯度/281
H 复变函数下的伊藤公式/285
I 计数过程/287
J 有限差分编码/292

人名对照表/304

术语对照表/323

参考文献/350

第一篇 离散时间模型

本书的第一篇是发生在离散时间情形和离散状态集情形下，这使得我们很容易建立起第二篇中的模型所依赖的直观感觉。本书理论的三个支柱——套利、最优化和均衡，在不同模式下被反复地论述和发展。第1章是基本的单期模型。第2章把第1章中的结果推广到多期的情形。第3章把第2章专门化成马尔可夫情形，并展示出将动态规划作为另一种求解方法的魅力。何和李(Ho-and-Lee)模型以及布莱克—德曼—托尔(Black-Derman-Toy)期限结构模型在此被作为习题引进。第4章是第3章内容的无限期情形，又被称为卢卡斯(Lucas)模型。

状态价格的概念是本理论的焦点，它规定任何证券的价格等于状态价格的加权和或者证券的状态依存券息的期望值。在有限维情形下，存在状态价格的充分必要条件是无套利机会。在无限维情形下，给定适当的技术规则性条件，同样的结论仍然成立。若给定某个行为人的最佳证券组合选择，那么，状态价格向量则由该行为人的效用梯度给出。在帕累托(Pareto)最优化均衡下，状态价格向量同样也是由某个代表性行为人在经济总消费过程处的效用梯度给出。

1.

状态定价引论

本章介绍有限状态单期情形下资产定价模型的基本思路。从很多最基本的意义上来看，随后的每一章只不过是以新的观点来重复这一章。本章的目的是从“状态价格”——世界上每种状态均有一个价格——的角度出发，概括和描述证券价格的特征。简单地说，给定证券的价格就是不同状态下该证券的收益的状态价格(权值)加权和，也可以将状态价格看做是与世界状态依存的财富的“影子价格”或拉格朗日乘子。我们通过多种方式描述了状态价格的特征：首先，基于无套利的假设；其次，基于行为人最佳证券组合选择的一阶条件；最后，基于完备市场均衡下帕累托最优性的一阶条件。状态价格也与超额期望回报贝塔(β)模型有关。状态价格贝塔模型的特殊情况是资本资产定价模型。不少读者会觉得本章是对一些标准学术成果的一次重温。包括本章以及贯穿全书，绝大多数场合中为了简化表述，我们引入了一些技术性条件和假设，这自然使得结果的通用性受到了损害。

1.1 套利和状态价格

不确定性用有限状态集$\{1,\cdots,S\}$来描述，在这S个可能的状态中，其中有一个将被揭示为真。有N个证券，这N个证券的收益情况由$N\times S$矩阵D描述，矩阵D中的元素D_{ij}表示在状态j下，i证券将获得的收益计量数。证券价格由属于$\mathbb{R}^N$的q表示。那么，证券组合$\theta\in\mathbb{R}^N$的市场价值为$q\cdot\theta$，收益为$D^{\mathrm{T}}\theta\in\mathbb{R}^S$。套利是指可以找到一个证券组合$\theta$，使得$q\cdot\theta\leqslant 0$且$D^{\mathrm{T}}\theta>0$，或者$q\cdot\theta<0$且$D^{\mathrm{T}}\theta\geqslant 0$。换言之，套利就是“不需要付出代价但又有回报”的证券组合。不足为奇，这样的套利机会自然是应该被排除掉的。在以后的章节中将会看到，这将会导致证券定价理论的一个重要特征。状态价格向量$\psi\in\mathbb{R}^S_{++}$是由$q=D\psi$给定。ψ_j可以被看做是在状态j下得到一个计价单位所要支付的边际成本。

定理 1.1 *不存在套利的充分必要条件是存在一个状态价格向量。*

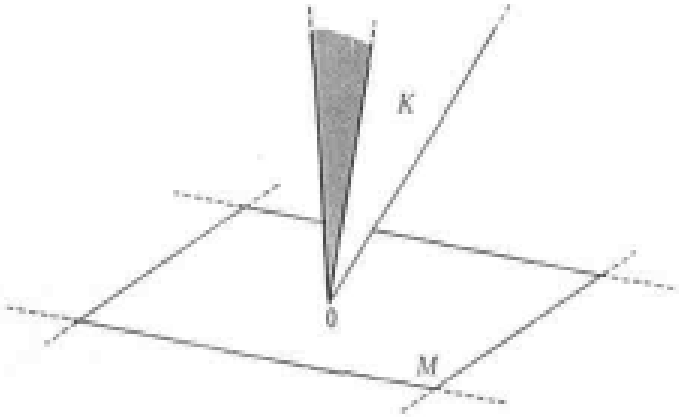


图 1.1 分离锥体与线性子空间

证明：证明过程是分离超平面定理的应用。令 $L=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^S$，$M=\{(-q\cdot\theta, D^{\top}\theta):\theta\in\mathbb{R}^N\}$，显然 M 是 L 的线性子空间。令 $K=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^S_+$，则 K 为一锥体（即如果 x 属于 K，那么，只要 λ 严格为正，λx 亦属于 K）。K 和 M 均为封闭且凸的 L 子集。当且仅当 K 和 M 在 0 点相交时，不存在套利，如图 1.1 所示。

假设 $K\cap M=\{0\}$。分离超平面定理（参见附录 B）告诉我们，存在一个非零的线性函数 $F: L\to\mathbb{R}$，且 $F(z)<F(x)$，z 为 M 中任意点，x 为 K 中任意非零点。由于 M 是线性空间，这就意味着 $F(z)=0$，z 为 M 中任意点；$F(x)>0$，x 为 K 中任意非零点。后一个事实意味着，存在 $\alpha>0$，$\alpha\in\mathbb{R}$ 及 $\psi\gg 0$，$\psi\in\mathbb{R}^S$，使得对任意 $(v,c)\in L$，$F(v,c)=\alpha v+\psi\cdot c$。由此得出 $-\alpha q\cdot\theta+\psi\cdot(D^{\top}\theta)=0$，$\theta\in\mathbb{R}^N$。因此，矢量 ψ/α 是一个状态价格向量。

相反，如果状态价格向量 ψ 存在，那么，对任意 θ，我们有 $q\cdot\theta=\psi^{\top}D^{\top}\theta$。因此，当 $D^{\top}\theta\geqslant 0$ 时，我们有 $q\cdot\theta\geqslant 0$；当 $D^{\top}>0$ 时，我们有 $q\cdot\theta>0$，因而不存在套利。 □

1.2 风险中性概率

我们可将 $\mathbb{R}^S_+$ 中满足 $p_1+\cdots+p_s=1$ 的任意 p 看做是对应的状态概率向量。给定券息—价格偶（dividend-price pair）(D, q) 所对应的状态价格向量 ψ，令 $\psi_0=\psi_1+\cdots+\psi_s$，以及对任意 j，令 $\hat{\psi}_j=\psi_j/\psi_0$。我们便有概率向量 $(\hat{\psi}_1,\cdots,\hat{\psi}_s)$，且对任意证券 i，有：

$$\frac{q_i}{\psi_0}=\hat{E}(D_i)\equiv\sum_{j=1}^{s}\hat{\psi}_j D_{ij}$$

这样，我们就可以把标准化的证券价格看成适当选定后的风险中性概率下的期望收益率。如果存在证券组合 $\bar{\theta}$ 且其满足 $D^{\top}\bar{\theta}=(1,1,\cdots,1)$，则 $\psi_0=\bar{\theta}\cdot q$ 就是对无风险借入的折

扣(discount)；对任意证券 i，$q_i=\psi_0 E(D_i)$，显示任意证券的价格应该是这种人为构造概率下的折价后的期望收益率。

1.3 最优化及资产定价

假设券息—价格偶(D,q)给定。定义某行为人(既可以是机构，也可以是个人)具有严格递增效用函数 $U:\mathbb{R}^S_+\to\mathbb{R}$，以及资源禀赋 $e\in\mathbb{R}^S_+$。预算可行集为：

$$X(q,e)=\{e+D^{\mathrm{T}}\theta\in\mathbb{R}^S_+ : \theta\in\mathbb{R}^N, q\cdot\theta\leqslant 0\}$$

行为人的优化问题可描述为：

$$\sup_{c\in X(q,e)} U(c) \tag{1.1}$$

本节中假设存在某证券组合 θ^0，满足 $D^{\mathrm{T}}\theta^0>0$，因为效用函数 U 严格递增，财富约束 $q\cdot\theta\leqslant 0$ 在最优化处一定束紧。也就是说，如果 $c^*=e+D^{\mathrm{T}}\theta^*$ 是(1.1)式的解，那么 $q\cdot\theta^*=0$。

命题 1.1 如果(1.1)式有解，那么，就不存在套利；如果 U 连续且不存在套利，那么，(1.1)式有解。

此命题的证明作为练习留给读者完成。

定理 1.2 假设 c^* 是(1.1)式的解，且严格为正，U 在 c^* 处连续可微，U 在 c^* 处的偏导向量 $\partial U(c^*)$ 严格为正。那么，存在某系数 $\lambda>0$ 使得 $\lambda\partial U(c^*)$ 是状态价格向量。

证明：对满足 $q\cdot\theta=0$ 的任意 θ，最优化问题的一阶导数条件是：购买证券组合 θ 的边际效用为零。这一点将在下面得到更清楚的表述。c^* 的严格正性意味着，对任意证券组合 θ，存在某系数 $k>0$，使得对所有 $\alpha\in[-k,k]$，有 $c^*+\alpha D^{\mathrm{T}}\theta\geqslant 0$。令 $g_\theta:[-k,k]\to\mathbb{R}$ 定义为：

$$g_\theta(\alpha)=U(c^*+\alpha D^{\mathrm{T}}\theta)$$

假设 $q\cdot\theta=0$，c^* 的最优表明 $\alpha=0$ 时 g_θ 取最大值。一阶条件为 $g'_\theta(0)=\partial U(c^*)^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\theta=0$。我们得出结论，对任意 $\theta\in\mathbb{R}^N$，如果 $q\cdot\theta=0$，那么 $\partial U(c^*)^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\theta=0$。因此，存在某系数 μ 使得 $\partial U(c^*)^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}=\mu q$。

假设存在某证券组合 θ^0，其中 $D^{\mathrm{T}}\theta^0>0$。由(1.1)式的解的存在性可知，此时不存在套利，这便意味着 $q\cdot\theta^0>0$。我们有：

$$\mu q\cdot\theta^0=\partial U(c^*)^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}\theta^0>0$$

因此 $\mu>0$。令 $\lambda=1/\mu$，得出：

$$q=\lambda D\partial U(c^*) \tag{1.2}$$

这表明 $\lambda\partial U(c^*)$ 是一个状态价格向量。 □

虽然我们假设了 U 是严格递增函数，这并不一定意味着 $\partial U(c^*)\gg 0$。但如果 U 是凹性的，且严格递增，那么就总有 $\partial U(c^*)\gg 0$。

推论 1.1 假设 U 是凹性的且在 $c^*=e+D^{\top}\theta^*\gg 0$ 处可微，这里 θ^* 满足 $q\cdot\theta^*=0$。当且仅当 $\lambda\partial U(c^*)$ 为状态价格向量时，c^* 是最优的，这里的系数为 $\lambda>0$。

该推论的证明很容易从凹性目标函数的优化问题的一阶条件的充分性得到。这将在图 1.2 中得到很好的说明。在该图中，存在两种状态，状态价格向量则是适当模化了的、与预算中性消费调整集 $B=\{D^{\top}\theta: q\cdot\theta=0\}$ 正交的非零正向量。c^* 最优性的一阶条件是从 c^* 的偏离，不管是什么方向，均有使 $\partial U(c^*)$ 为负或为零的边际效用。或者说，预算中性集与偏好集 $\{c: U(c)\geqslant U(c^*)\}$ 在 c^* 点相切（如图 1.2 所示）。这就等价于 $\partial U(c^*)$ 正交于 B，与上面的推论一致。图 1.3 描述，如果选择一个次优消费 c，那么，一阶导数向量 $\partial U(c)$ 与状态价格向量 ψ 不平行（方向不一致）。

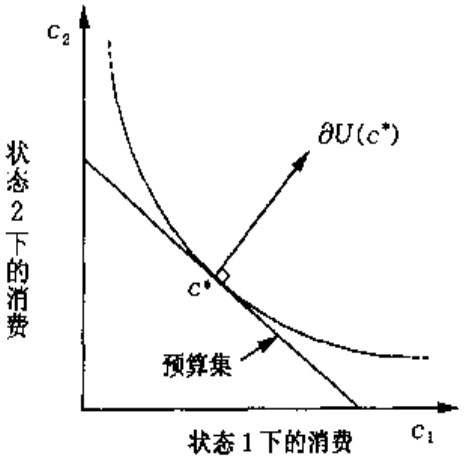


图 1.2 最佳消费选择一阶条件

我们考虑效用函数 U 的一种特殊情况，即所谓的期望效用函数，其定义由给定的概率向量 p 和函数 $u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 根据以下公式给出：

$$U(c)=E[u(c)]\equiv\sum_{j=1}^{S}p_j u(c_j) \tag{1.3}$$

对 $c\gg 0$，如果 u 可微，那么 $\partial U(c)_j=p_j u'(c_j)$。对这种期望效用函数，当且仅当下式成立时，(1.2)式成立：

$$q=\lambda E[Du'(c^*)] \tag{1.4}$$

同第 1.2 节一样，借助于所谓的“风险中性”概率 $\hat{\psi}_j=u'(c_j^*)p_j/E[u'(c^*)]$，我们可以把(1.2)式或(1.4)式写成以下形式：

$$\frac{q_i}{\psi_0}=\hat{E}(D_i)\equiv\sum_{j=1}^{S}D_{ij}\hat{\psi}_j,\ 1\leqslant i\leqslant N \tag{1.5}$$

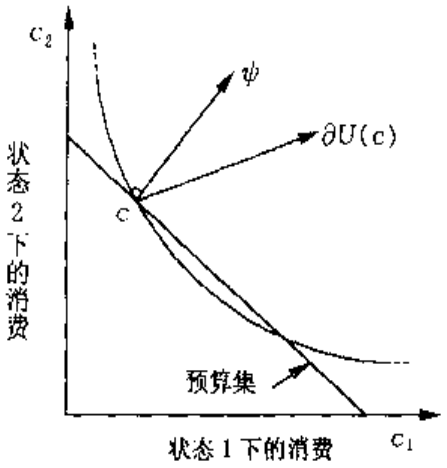


图 1.3 一种严格次优消费选择

1.4 有效性和完备市场

假设有 m 个行为人，同在第 1.3 节中一样，其效用 $U_1,\cdots,U_m$ 为严格递增，其资源禀赋记为 $e^1,\cdots,e^m$。经济系统(简称经济)$[(U_i,e^i),D]$的均衡就是任意$(\theta^1,\cdots,\theta^m,q)$使得满足 $q\cdot\theta\leqslant 0$ 且 $\sum_{i=1}^m\theta^i=0$ 时，并且给定证券价格向量 q，对每一位行为人 i，θ^i 是$\sup_\theta U_i(e^i+D^{\mathrm{T}}\theta)$的解。均衡的存在性处理参见习题和附录中有关资料来源的说明。

由于 $\mathrm{span}(D)\equiv\{D^{\mathrm{T}}\theta:\theta\in\mathbb{R}^N\}$表示可能证券组合收益集，如果 $\mathrm{span}(D)=\mathbb{R}^S$，那么，市场是完备的，否则市场不完备。

令 $e=e^1+\cdots+e^m$ 表示总资源禀赋，如果 $c^1+\cdots+c^m\leqslant e$，那么，一个消费分配(方案)$(c^1,\cdots,c^m)\in(\mathbb{R}^S_+)^m$ 就是可行的。如果没有其他可行分配$(\hat{c}^1,\cdots,\hat{c}^m)$，并对所有 i 使得 $U_i(\hat{c}^i)\geqslant U_i(c^i)$，以及对某些 i 使得 $U_i(\hat{c}^i)>U_i(c^i)$，那么，一个可行的分配$(c^1,\cdots,c^m)$就是帕累托最优的。完备市场和均衡配置的帕累托最优是在任何经济中几乎等价的特征。

命题 1.2 假设市场是完备的，而且$(\theta^1,\cdots,\theta^m,q)$是一个均衡，那么，该均衡所对应的分配(方案)是帕累托最优的。

上述命题有时也称为第一福利定理。其证明只要求效用函数具有严格单调性，也作为练习留给读者完成。需要指出的是，完备市场是帕累托最优的充分条件，而不一定总是必要条件。例如，如果最初的资源禀赋配置$(e^1,\cdots,e^m)$正好是帕累托最优的，那么，不管证券的张量是多少，任何均衡配置都是帕累托最优的。当然，最初的资源禀赋配置恰好是帕累托最优是很不寻常的。虽然不属于本书的内容，但可以证明，在不完备市场以及关于效用函数的一些合理假设下，不管最初资源的配置如何，都将意味着均衡配置不是帕累托

最优的。

1.5 最优化与代表性行为人

除了分配方面的含义之外，帕累托最优性也是证券定价中一个很有用的特性。为了说明这一点，让我们考察由下式定义的效用函数 $U_\lambda:\mathbb{R}^{S}_{+}\to\mathbb{R}$：

$$U_\lambda(x)=\sup_{(c^1,\cdots,c^m)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i U_i(c^i)\quad \text{满足约束 } c^1+\cdots+c^m\leqslant x \tag{1.6}$$

这里的每个向量 $\lambda\in\mathbb{R}^{m}_{+}$ 都可以理解成行为人权重。

引理 1.1 假设对所有的 i，U_i 均是凹的，可行的分配 $(c^1,\cdots,c^m)$ 是帕累托最优的充分必要条件是存在非零的 $\lambda\in\mathbb{R}^{m}_{+}$，使得当 $x=e=c^1+\cdots+c^m$ 时，$(c^1,\cdots,c^m)$ 是(1.6)式的解。

证明：假设 $(c^1,\cdots,c^m)$ 是帕累托最优的。对任意分配 x，令 $U(x)=(U_1(x^1),\cdots,U_m(x^m))$，再令：

$$\mathcal{U}=\{U(x)-U(c)-z:x\in\mathcal{A},z\in\mathbb{R}^{m}_{+}\}\subset\mathbb{R}^{m}$$

这里，$\mathcal{A}$ 是所有可行的分配方案集合。令 $J=\{y\in\mathbb{R}^{m}_{+}:y\neq 0\}$。由于 $\mathcal{U}$ 是凸的(由效用函数的凹性可知)，且 $J\cap\mathcal{U}$ 是空集(帕累托最优性)，分离超平面定理(参见附录 A.2)告诉我们，存在一个非零向量 $\lambda\in\mathbb{R}^{m}$，使得 $\lambda\cdot y\leqslant\lambda\cdot z$ 对每一个 $y\in\mathcal{U}$ 和 $z\in J$ 均成立。由于 $0\in\mathcal{U}$，而且我们已知 $\lambda\geqslant 0$，这样第一部分就已得证。第二部分的证明也不难，作为练习留给读者完成。

命题 1.3 假设对所有的 i，U_i 都是凹性的，并且假设市场是完备的，$(\theta^1,\cdots,\theta^m,q)$ 是某一均衡。那么，存在非零 $\lambda\in\mathbb{R}^{m}_{+}$，使得 $(0,q)$ 是(1.6)式所定义的单行为人经济[$(U_\lambda,e),D$]的非交易均衡。而且，均衡消费分配 $(c^1,\cdots,c^m)$ 是在资源禀赋总量处配置问题(1.6)式的解，即 $U_\lambda(e)=\sum\lambda_i U_i(c^i)$。

证明：由于有均衡就不存在套利，因此，存在状态价格向量 ψ。由于市场是完备的，这就意味着行为人 i 的问题可以简化成：

$$\sup_{c\in\mathbb{R}^{S}_{+}}U_i(c)\quad \text{满足约束 } \psi\cdot c\leqslant\psi\cdot e^i$$

我们可以假设 e^i 是非零的，因为否则的话 $c^i=0$，且行为人 i 可以从优化问题中被排除而不失一般性。由附录 A.2 中的鞍点定理可知，存在拉格朗日乘子 $\alpha_i\geqslant 0$，使得 c^i 是下式的解：

$$\sup_{c\in\mathbb{R}^{S}_{+}}U_i(c)-\alpha_i(\psi\cdot c-\psi\cdot e^i)$$

[由于 e^i 是非零的且 $\psi\gg 0$，所以斯莱特(Slater)条件是满足的。]由于 U_i 严格递增，所以 α_i

>0。令 $\lambda_i=1/\alpha_i$，对任何可行分配$(x^1,\cdots,x^m)$，我们有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i U_i(c^i) &= \sum_{i=1}^{m}[\lambda_i U_i(c^i)-\lambda_i\alpha_i(\psi\cdot c^i-\psi\cdot e^i)]\\ &\geqslant \sum_{i=1}^{m}\lambda_i[U_i(x^i)-\alpha_i(\psi\cdot x^i-\psi\cdot e^i)]\\ &= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i U_i(x^i)-\psi\cdot\sum_{i=1}^{m}(x^i-e^i)\\ &\geqslant \sum_{i=1}^{m}\lambda_i U_i(x^i)\end{aligned}$$

这表明$(c^1,\cdots,c^m)$是分配问题(1.6)式的解。我们还必须证明对具有效用函数 U_λ 和资源 e 的单一行为人问题，没有交易是最优的。如果不是这样，那么，就存在任意 $x\in\mathbb{R}_+^S$ 使得 $U_\lambda(X)>U_\lambda(e)$，以及 $\psi\cdot x\leqslant\psi\cdot e$。由 U_λ 的定义可知，这便意味着分配$(x^1,\cdots,x^m)$的存在并不一定可行，使得 $\sum_i\lambda_i U_i(x^i)>\sum_i\lambda_i U_i(c^i)$，而且

$$\sum_i\lambda_i\alpha_i\psi\cdot x^i=\psi\cdot x\leqslant\psi\cdot e=\sum_i\lambda_i\alpha_i\psi\cdot c^i$$

把两个不等式结合起来，我们有：

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[U_i(x^i)-\alpha_i\psi\cdot(x^i-e^i)]>\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[U_i(c^i)-\alpha_i\psi\cdot(c^i-e^i)]$$

这与对每一行为人 i 而言，(c^i,α_i)是该行为人优化问题的鞍点的事实相悖。 □

推论 1.2 如果有 $e\gg0$ 且 U_λ 在 e 处连续可微，那么就可以选择 λ，使得 $\partial U_\lambda(e)$是某一状态价格向量，即

$$q=D\partial U_\lambda(e) \tag{1.7}$$

对某一行为人 i 而言，U_i 在 c^i 处可微就意味着 U_λ 在 e 处可微[参见本章习题 1.10(C)]。

推论 1.3 假设存在不变的状态概率向量 p，使得对所有的 i 而言，有 $U_i(c)=E[u_i(c)]\equiv\sum_{j=1}^{s}p_j u_i(c_j)$，对某些 $u_i(\cdot)$成立。因此 $U_\lambda(c)=E[u_\lambda(c)]$，这里，对每一个 $y\in\mathbb{R}_+$，有：

$$u_\lambda(y)=\max_{x\in\mathbb{R}_+^m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i u_i(x_i)\quad\text{满足约束 } x_1+\cdots+x_m\leqslant y$$

在此情况下，(1.7)式便等同于 $q=E[Du_\lambda'(e)]$。

代表性行为人资产定价公式的推广在以后的章节中还将会频频出现。

1.6 状态价格贝塔模型

本节中，我们固定某个状态概率向量 $p\in\mathbb{R}^S(p\gg0)$。对任意 $x\in\mathbb{R}^S$，我们记$E(x)=$

$p_1x_1+\cdots+p_sx_s$；对任意$\mathbb{R}^S$中的x和π，我们用$x\pi$表示向量$(x_1\pi_1,\cdots,x_s\pi_s)$。下面的利茨(Riesz)定理可作为练习留待读者证明。

引理 1.2 假设$F:\mathbb{R}^S\to\mathbb{R}$是线性的，那么，存在惟一的$\pi\in\mathbb{R}^S$，使得对所有的$x\in\mathbb{R}^s$，$F(x)=E(\pi x)$。而且，当且仅当$\pi\gg 0$时，$F$严格递增。

推论 1.4 当且仅当$\mathbb{R}^S$中存在$\pi\gg 0$使得$q=E(D\pi)$，券息—价格偶(D,q)不允许有套利。

证明：对任一给定的状态价格向量ψ，我们令$\pi_s=\psi_s/p_s$。反之，如果π具有假定的特性，那么，$\psi_s=p_s\pi_s$可定义状态价格矢量ψ。 □

给定(D,q)，我们称由以上结果所给出的向量π为状态价格缩子(deflator)(有时也称为状态价格密度或状态价格核)。例如，在推论1.3的代表行为人定价模型中，我们有$\pi_s=u'_s(e_s)$。

对$\mathbb{R}^S$中的任意x和y，协方差$\mathrm{cov}(x,y)\equiv E(x,y)-E(x)E(y)$用于衡量$x$和$y$之间的互变度。在资产定价领域中，协方差是非常有用的概念。对任意x和y，当$\mathrm{Var}(y)\equiv\mathrm{cov}(y,y)\neq 0$时，我们总是可以把$x$表述为$x=\alpha+\beta y+\epsilon$，这里$\beta=\mathrm{cov}(y,x)/\mathrm{var}(y)$，$\mathrm{cov}(y,\epsilon)=E(\epsilon)=0$，其中$\alpha$为系数。这种$x$对$y$的线性回归可以惟一界定。$\beta$系数就是相对应的回归系数。

假设(D,q)不允许有套利。对任意满足$q\cdot\theta\neq 0$的证券组合θ，θ的回报记为向量$R^\theta\in\mathbb{R}^S$，且$R^\theta_s=(D^\top\theta)_s/q\cdot\theta$。固定某个状态价格缩子$\pi$，对任意这样的证券组合$\theta$，我们有$E(\pi R^\theta)=1$。假设存在一个无风险组合，即某证券组合$\theta$具有固定不变的回报$R^0$。那么，我们就称$R^0$为无风险回报。通过简单的代数运算，对任意证券组合$\theta$，我们有：

$$E(R^\theta)-R^0=-\frac{\mathrm{cov}(R^\theta,\pi)}{E(\pi)}$$

因此，R^θ与π之间的协方差对期望回报的影响是负的。这是在情理之中，因为状态价格可以解释成财富的影子价格。

如果$\mathbb{R}^S$中任意的x和y其中任何一个的方差是零，那么，两者的相关度是零；否则，两者的相关系数则由下式给出：

$$\mathrm{corr}(x,y)=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{var}(x)\mathrm{var}(y)}}$$

总是存在证券组合θ^*可以解以下问题：

$$\sup_\theta \mathrm{corr}(D^\top\theta,\pi) \tag{1.8}$$

如果存在这样一个证券组合θ^*，其回报R^*的方差不为零，那么，作为练习可以证明，对任意其他证券组合的回报R^θ，

$$E(R^\theta)-R^0=\beta_\theta[E(R^*)-R^0] \tag{1.9}$$

这里

$$\beta_\theta = \frac{\mathrm{cov}(R^*, R^\theta)}{\mathrm{var}(R^*)}$$

如果市场是完全的，那么，R^* 显然与状态价格缩子完全正相关。

(1.9)式即状态价格贝塔模型。该模型表明，证券组合的超额期望回报是与某一特别的证券组合的超额期望回报成正比的。这一特别的证券组合的特征是，它与状态价格缩子的相关度最大(同其他组合与价格缩子的相关度相比)。在(1.9)式中，正比系数即相应的回归系数。该公式也可以拓展到不存在无风险组合的场合。本章末的习题之一，就是在引入一些其他假设的基础上，把这一观点应用于资本资产定价模型(CAPM)。

习 题

1.1 在第1.1节中曾经提到，当 $D^{\mathsf{T}}\theta \geqslant 0$ 时，如果 $q\cdot\theta \geqslant 0$，那么，券息—价格偶(D,q)就被定义为弱无套利(weakly arbitrage-free)。证明当且仅当存在("弱"状态价格)$\psi \in \mathbb{R}^S_+$ 使得 $q=D\psi$ 时，(D,q)是弱无套利。这一事实被称为法卡斯(Farkas)定理。

1.2 证明第1.1节中所声明的券息—价格偶(D,q)无套利的充分必要条件是存在 $\psi \in \mathbb{R}^S_{++}$ 使得 $q=D\psi$。除了遵循该节中的证明方法外，设法使用下面这个有时被称为"二中择一定律"(Theorem of the Alternative)的结论。

斯蒂莫科(Stiemke)定理 假设 A 是 $m\times n$ 矩阵。那么，下述两者有且仅有一个为真：

(a)存在 $x\in\mathbb{R}^n_{++}$ 使得 $Ax=0$。

(b)存在 $y\in\mathbb{R}^m$ 使得 $y^{\mathsf{T}}A>0$。

1.3 证明：如果 $U(c)\equiv E[u(c)]$[如(1.3)式中所定义的那样]，那么，(1.2)式就等价于(1.4)式。

1.4 假设以下条件成立，证明第1.4节中的均衡存在：存在某证券组合 θ，其收益 $D^{\mathsf{T}}\theta>0$；对所有的 i，$e^i \gg 0$ 且 U_i 连续、严格凹性和严格递增。这个练习难度较大，需要用到以下定理。

卡库塔尼(Kakutani)不动点定理 假设 Z 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空、紧性的凸子集，且对任意 $x\in Z$，$\varphi(x)$ 是 Z 的非空、紧性的凸子集。再假定 $\{(x,y)\in Z\times Z : x\in\varphi(y)\}$ 是闭集，那么，Z 中存在 x^* 使得 $x^*\in\varphi(x^*)$。

1.5 证明命题1.2，提示：运用 $U_i(\cdot)$ 为严格单调的假设。

1.6 假定资源禀赋分配$(e^1,\cdots,e^m)$是帕累托最优的。

(A)证明如第1.4节中所论述的那样，任何均衡是帕累托最优。

(B)假定存在某证券组合 θ，满足 $D^{\mathsf{T}}\theta>0$，而且对所有的 i，U_i 是凹性的且 $e^i\gg 0$。证明$(e^1,\cdots,e^m)$本身就是一个均衡配置。

1.7 证明命题1.1。提示：定义于紧性集合上的实值连续函数有最大值。

1.8 证明命题1.3的推论1.2。

1.9 证明命题1.3的推论1.3。

1.10 除了命题1.3所给出的假设外，再假定：

(a)$e=e^1+\cdots+e^m$ 是在 $\mathbb{R}^S_{++}$ 中。

(b)对所有的 i，U_i 是凹性的，并且在 $\mathbb{R}^S_{++}$ 二次连续可微。

(c)对所有的 i，c^i 是在 $\mathbb{R}^S_{++}$ 中；并且海赛矩阵 $\partial^2 U(c^i)$ 事实上为负定型(由凹性可知其必为半负

定)。

属性(c)可以用规则偏好(regular preferences)假设来代替。规则偏好的定义可以在注释的参考资料中找到。

(A)证明 U_λ 在 e 处连续可微的假定成立;而且对每个 i,存在系数 $\gamma_i>0$,使得 $\partial U_\lambda(e)=\gamma_i\partial U_i(c^i)$(这种线性比例关系被称为"等价边际替代率",它是所有帕累托最优分配的特征之一)。提示:应用下面的定理:

隐函数定理 假定对给定的 m 和 n,函数 $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为 C^k(k 次连续可微),$k\geqslant 1$。假设 f 对其第二个自变量的偏导数 $n\times n$ 矩阵 $\partial_y f(\bar{x},\bar{y})$ 在 $(\bar{x},\bar{y})$ 是非奇的。如果 $f(\bar{x},\bar{y})=0$,那么,存在系数 $\epsilon>0$ 和 $\delta>0$ 以及函数 $C^k:Z:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$,使得如果 $\|x-a\|<\epsilon$,那么,$f[x,Z(x)]=0$ 且 $\|Z(x)-b\|<\delta$。

(B)证明:如果 $e\gg 0$,且对所有的 i,U_i 是期望效用函数,形式为 $U_i(c)=E[u_i(c)]$ 时,条件(c)中的半负定部分就能得到满足。这里 u_i 为严格凹性的,且在 $(0,\infty)$ 上存在并不受边界限制的导数。

(C)不要假定效用函数二阶导数存在,证明上述(A)中的结果(因此,你不能利用海赛矩阵或隐函数定理)。第一步也是主要的一步,就是证明下面的内容:给定凹性函数 $f:\mathbb{R}^S_+\to\mathbb{R}$,$x\to\mathbb{R}^S_+$ 处的超微分(superdifferential)f 为:

$$\partial f(x)=\{z\in\mathbb{R}^s:f(y)\leqslant f(x)+z\cdot(y-x),y\in\mathbb{R}^S_+\}$$

对任一可行的分配 $(c^1,\cdots,c^m)$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}^m_+$,满足 $U_\lambda(e)=\sum_i\lambda_iU_i(C^i)$,那么,

$$\partial U_\lambda(e)=\bigcap_{i=1}^m\lambda_i\partial U_i(c_i)$$

1.11 (二项期权定价)作为第 1.1 节结果的一个应用,考虑下面具有二种状态(S=2)的期权定价问题。有 $N=3$ 个证券:

(a)一种股票,其最初价格 $q_1>0$,在状态 1 下的股利为 $D_{11}=Gq_1$,状态 2 下的股利为 $D_{12}=Bq_1$,这里 $G>B>0$,分别为"好的"和"坏的"回报率。

(b)一种无风险债券,其最初价格为 $q_2>0$,债息在两种状态下均为 $D_{21}=D_{22}=Rq_2$(也就是说,R 是无风险回报,而 R^{-1} 是贴现折扣)。

(c)该股票的看涨期权,其最初价格为 $q_3=C$。在状态 $j=1$ 和 $j=2$ 下,券息为 $D_{3j}=(D_{1j}-K)^+\equiv\max(D_{1j}-K,0)$,这里 $K\geqslant 0$ 是期权的执行价格[这一看涨期权赋予其持有者权利而不是义务,在状态显现后要为购买该股票(含息)而支付 K]。

(A)如果只考虑股票和债券,那么,请说明不存在套利的(G、B 和 R 必须满足的)充分和必要条件。

(B)假设三个证券之间不存在套利,根据 q_1、G、B、R 和 K,计算看涨期权的价格 C。根据 G、B 和 R 找出第 1.2 节指出的状态价格概率 $\hat{\psi}_1$ 和 $\hat{\psi}_2$,并证明 $C=R^{-1}\hat{E}(D_3)$,其中 $\hat{E}$ 表示针对 $(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2)$ 定义的期望。

1.12 (CAPM)在第 1.4 节的框架下,假设 $(c^1,\cdots,c^m)$ 是严格为正的均衡消费分配。对任一行为人 i,假设效用函数是期望效用函数类型 $U_i(c)=E[u_i(c)]$。对任一行为人 i,假设存在固定的正常数 $\bar{c}$ 和 b_i,使得对任意状态 j 和所有 $x\leqslant\bar{c}$,我们有 $c_j^i<\bar{c}$ 和 $u_i(x)=x-b_ix^2$。

(A)在第 1.5 节中推论 1.3 的环境下,证明对某正常数 k 和 K,有 $u'_\lambda(e)=k-Ke$。由此推导出 CAPM:

$$q=AE(D)-B\,\mathrm{cov}(D,e) \tag{1.10}$$

这里 A 和 B 为正常数，$\mathrm{cov}(D,e)\in\mathbb{R}^N$ 为券息与资源总量之间的协方差向量。

假设对一给定的证券组合 θ，下面的每一变量均可以被很好地定义：

- 回报 $R^\theta\equiv D^\top\theta/q\cdot\theta$；
- 具有收益 $D^\top M=e$ 的证券组合 M 的回报 R^M。
- 满足 $\mathrm{cov}(D^\top\theta^0,e)=0$ 的证券组合 θ^0 的回报 R^0。
- $\beta_\theta=\mathrm{cov}(R^\theta,R^M)/\mathrm{var}(R^M)$

回报 R^M 有时也称为市场回报。回报 R^0 被称为零贝塔回报(Zero-beta return)，即无风险债券的回报(如果存在无风险债券的话)。证明 CAPM 的贝塔形式：

$$E(R^\theta-R^0)=\beta_\theta E(R^M-R^0) \tag{1.11}$$

(B)前述(A)依赖于市场的完备性。不要任何这种假设，但假设均衡配置$(c^1,\cdots,c^m)$严格为正，证明(1.11)式的贝塔形式同样有效。如果我们将市场回报 R^M 的定义拓展为任一证券组合的回报，能够解以下问题：

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}^N}\mathrm{corr}(R^\theta,e) \tag{1.12}$$

对完备市场来说，$\mathrm{corr}(R^M,e)=1$，所以(A)是一种特殊情况。

(C)如前所述，如果没有二次方程的期望效用函数假设，资本资产定价模型基本可用，那么，只要假设每个行为人 i 是严格厌恶方差(strictly variance-averse)的，而且当 $E(x)=E(y)$ 和 $\mathrm{var}(x)<\mathrm{var}(y)$ 时，$U_i(x)>U_i(y)$。请提供一套合理的技术支持条件，并使上述陈述正规化。

我们注意到，CAPM 的另一种通常表述形式允许在最初资源禀赋 $\hat{\theta}^1,\cdots,\hat{\theta}^m$ 中有证券组合，对所有的 j，它们满足 $\sum_{i=1}^m\hat{\theta}^i_j=1$。在这种情况下，总的资源禀赋 e 被重新定义为 $e=\sum_{i=1}^m(e^i+D^\top\hat{\theta}^i)$，CAPM (1.11)式同样有效。如果对所有的 i 满足 $e^i=0$，那么，即使在不完备市场中，亦有 $\mathrm{corr}(R^M,e)=1$。因为，由(1.12)式可得出解 $\theta=(1,1,\cdots,1)$。本章注释中还提供了进一步的参考资料。

1.13 $[(U_i,e^i),D]$的阿罗—德布鲁均衡(Arrow-Debreu equilibrium)是一非零向量 $\psi\in\mathbb{R}^S_+$ 及可行消费分配$(c^1,\cdots,c^m)$，使得对每个 i，$\sup_c U_i(c)$的解 c^i 要受约束于 $\psi\cdot c^i\leqslant\psi\cdot e^i$。假设市场是完备的，即 $\mathrm{span}(D)=\mathbb{R}^S$，证明当且仅当$(c^1,\cdots,c^m)$是第 1.4 节意义上的均衡消费分配时，它就是阿罗—德布鲁均衡消费分配。

1.14 假定(D,q)不允许有套利，证明当且仅当市场完备时，存在惟一状态价格向量。

1.15 (总合)对代表性行为人问题(1.6)式，假设对所有的 i，有 $U_i(c)=E[u(c)]$，其中 $u(c)=c^\gamma/\gamma$，γ 为某非零系数且 $\gamma<1$。

(A)证明：对任一非零行为人权重向量 $\lambda\in\mathbb{R}^m_+$ 和某系数 $k>0$，有 $U_\lambda(c)=E[kc^\gamma/\gamma]$，以及 $c^i=k_i x$ 可以解问题(1.6)式，其中系数 $k_i\geqslant 0$，当且仅当 λ_i 是非零时，k 为非零。

(B)用特殊的效用假设，证明存在帕累托有效的均衡配置。不要使用市场是完备的假设，但可以假设对所有的 i，有 $e^i\in\mathrm{span}(D)$。计算相关的均衡配置。

1.16 (状态价格贝塔模型)。本练习要证明和拓展第 1.6 节中的状态价格贝塔模型(1.9)式。

(A)证明(1.8)式的解是任一证券组合 θ，其满足 $\pi=D^\top\theta+\epsilon$，这里，对任意证券 j，$\mathrm{cov}(\epsilon,D^j)=0$，$D^j\in\mathbb{R}^S$ 是证券 j 的收益。

(B)给定(1.8)式的一个解 θ,使得 R^θ 可以被很好地定义,而且其方差为非零,试证明(1.9)式。

(C)假定不存在无风险回报,在此情况下重新表述(1.9)式。方法是重新定义 R^θ 为任意证券组合 θ 的期望回报,使得 R^θ 可以被很好地定义且 $\mathrm{cov}(R^\theta,\pi)=0$(假设这样的证券组合存在)。

1.17 证明第1.6节中的利茨表述(Riesz representation)定理。下面的提示也许是不需要的,但会使结果推广到更广泛的希尔伯特空间(Hilbert Spaces)。给定向量空间 L,函数 $(\cdot|\cdot):L\times L\to\mathbb{R}$ 称为 L 的内积(inner product),如果对 L 中的任意 x、y 和 z 以及系数 α,我们有以下5个性质:

(a)$(x|y)=(y|x)$

(b)$(x+y|z)=(x|z)+(y|z)$

(c)$(ax|y)=\alpha(x|y)$

(d)$(x|x)\geqslant 0$

(e)$(x|x)=0$,当且仅当 $x=0$

假设有限维的向量空间 L 有内积函数 $(\cdot|\cdot)$(这定义了希尔伯特空间的一种特殊情形)。如果 $(x|y)=0$,那么,向量 x 和向量 y 被定义为正交 orthogonal。对 L 中的任意线性子空间 H 和 L 中的任意 x,可以证明,H 中存在惟一的 y,使得 $(x-y|z)=0$ 对 H 中的所有 z 都成立。向量 y 是 x 在 L 中对 H 的正交投影,且可以解问题 $\min_{h\in H}\|x-h\|$。令 $L=\mathbb{R}^S$,对 L 中的任意 x 和 y,令 $(x|y)=E(xy)$。我们必须说明,给定线性函数 F,存在惟一的 π 使得 $F(x)=(\pi|x)$ 对所有的 x 都成立。令 $J=\{x:F(x)=0\}$。如果 $J=L$,那么,F 就是零函数,且其惟一表述为 $\pi=0$。否则,存在 z 使得 $F(z)=1$ 和 $(z|x)=0$ 对 J 中所有的 x 都成立。我们可以用正交投影的思路来证明这一点,然后再证明 $\pi=z/(z|z)$ 可以表述 F,注意应用事实:对任意 x,我们有 $x-F(x)z\in J$。

1.18 假设有 $m=2$ 个消费者 A 和 B,他们的效用函数完全相同。设 c_1 和 c_2 分别是状态1和状态2下的消费,他们的效用函数被给定为 $U(c_1,c_2)=0.2\sqrt{c_1}+0.5\log c_2$。在状态1下,总的资源禀赋为 $e_1=25$ 个单位消费品。

(A)假定市场是完备的,并且给定某个均衡,消费者A的消费在状态1下是9个单位,在状态2下是10个单位。那么,状态2下总的资源禀赋 e_2 是多少?

(B)继续采用(A)中的假设。再假设有两种证券,第一种证券是无风险债券,在每种状态下均可收到10个单位的消费品;第二种证券是有风险的证券,状态1下可以收到5个单位的消费品,状态2下可以收到10个单位的消费品。在均衡条件下,债券价格与风险证券价格的比率是多少?

1.19 假设某个世界里有两种状态,记为状态1和状态2;有两个人;并且有两种均支付标准消费物品数量的证券。风险证券支付的总数量是:状态1下1个,状态2下3个;无风险证券在每种状态下均支付1个数量单位。每个人的初始分配为风险证券总数量的一半,而且再没有别的资源禀赋(无风险证券的净供给为零)。两人均对两种状态赋予相同的概率估计,但其中一人为风险中性,其效用函数为 $E(c)$,c 为与状态对应的消费,并且在任何状态下可正可负。另一人为厌恶风险者,其效用函数为 $E(\sqrt{c})$,c 为与状态对应的非负消费。求解竞争均衡下两证券的均衡配置。

1.20 考虑这样一种情形,两种资产 A 和 B,均支付同一随机变量 X,当概率严格为正时,X 的取值在每种状态下均为非负且非零。资产 A 的价格为 p,资产 B 的价格为 q。那么,套利就是这两项资产的一个组合 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$,使得其总收益 $\alpha X+\beta X$ 为非负,以及其最初价格 $\alpha p+\beta q$ 严格为负,或者当状态概率严格为正时,其总收益为非负且严格为正(其最初价格为负或零)。

(A)假设对资产组合没有限制,也没有交易费用或摩擦。那么,请给出不含套利的资产价格集合(p,q)(即准确地给出$\mathbb{R}^2$中的子集)。

(B)假设资产不允许卖空(即$\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$),那么,请给出不含套利的价格子集$(p,q)$。

(C)现在假设资产A和资产B可以被卖空,但资产A被卖空时必须支付额外费用。每一种被卖空的单位资产A所必须支付的额外费用为$\phi>0$,而且再没有其他任何费用。请给出新的"无套利"定义(使用严密的数学语言),以及不允许套利的价格子集。

注 释

本章的基本方法遵循阿罗(Arrow, 1953),其运用起源于瓦尔拉斯(Walras, 1877)的一般均衡观点。布莱克(Black, 1995)对一般均衡方法进行了归纳,并对其他方法进行了评论。

(第1.1节)第1.1节中有关无套利的状态价格含义来自于罗斯(Ross, 1978)。

(第1.2节)"风险中性概率"观点显然来自于阿罗(Arrow, 1970),阿罗(Arrow, 1953)的修订,也可参见德鲁兹(Drèze,1971)。

(第1.3节)这部分材料是标准的。

(第1.4节)命题1.2是阿罗(Arrow, 1951)和德布鲁(Debreu, 1954)中的第一福利定理。非完备市场均衡配置的一般非最优可从加克浦欧斯(Geanakoplos, 1990)所引用的资料中获取。实际上加克浦欧斯和普洛马查克斯(Geanakoplos and Polemarchakis, 1986)说明了在某些非完备市场情形下,受约束最优这一合理概念也行不通。但卡基(Kajii, 1994)和第2章附注中所引用的部分参考资料提供了一些缓和的结果。马斯科勒(Mas-Colell, 1987)和沃纳(Werner, 1991)也论述约束最优。

(第1.5节)"行为人代表"的方法最少可以追溯到纳吉什(Negishi, 1960)。在这种情形下,行为人代表的存在只不过是表述上的简化,请不要与习题1.15中出现的高曼(Gorman, 1953)中更难的总合概念相混淆。第10章中,习题1.11基础上的具有光滑效用函数的代表性行为人的存在,由于技术处理方面的原因,而显得非常重要。

(第1.6节)"贝塔模型"定价法的均值——方差偏好版本可以追索到夏普(Sharpe, 1964)和林特纳(Lintner, 1965)的资本资产定价模型(CAPM),不存在无风险资产的版本则归功于布莱克(Black, 1972)。阿林汉姆(Allingham, 1991)、伯克(Berk, 1992)、尼尔森(Nielsen, 1990a)和尼尔森(Nielsen, 1990b)探讨CAPM中均衡的存在问题。均值—方差模型和二基金分离的特征概括由布塔兹、海恩斯和罗弗勒(Bottazzi, Hens and Löffler, 1994)、尼尔森(Nielsen, 1993b),以及尼尔森(Nielsen, 1993a)提供。罗弗勒(Löffler)根据均值—方差偏好的语言提供了方差厌恶的充分条件。

额外话题 罗斯(Ross, 1976)引入的资产期望回报多因子模型,亦称为套利定价理论,它可以被认为CAPM的延伸。关于这点,也可参见布雷(Bray, 1994a),布雷(Bray, 1994b),基勒斯和理罗伊(Gilles and LeRoy, 1991),巴拉斯科和卡斯(Balasko and Cass, 1986),以及巴拉斯科、卡斯和斯科诺尔费(Balasko, Cass and Siconolfi, 1990)论述的受约束参与的证券交易均衡。另外,还可以参见哈拉(Hara, 1994)。

德布鲁(Debreu, 1972)探讨了规则偏好的概念,它相当于每位行为人的效用函数在均衡配置点处存在负定海塞矩阵。更多有关用规则偏好和微分方法处理一般均衡的资料,可参见马斯科勒(Mas-Colell, 1985)和巴拉斯科(Balasko, 1989)。克莱普斯(Kreps, 1988)回顾和评论了选择理论和偏好的效

用表述。关于法卡斯(Farkas)和斯泰尔克(Stiemke)定理,以及其他形式的二中择一定律,可参见格勒(Gale, 1960)。

阿罗和德布鲁(Arrow and Debreu, 1954),以及以略为不同的模型形式出现的麦凯兹(McKenzie, 1954)提供了完备市场均衡存在的证明。德布鲁(Debreu, 1982)纵览了存在性问题。一般均衡理论的标准的入门处理可以在德布鲁(Debreu, 1959)与希尔顿伯莱德和科曼(Hildenbrand and Kirman, 1989)中找到。在市场不完备的框架下,普洛马查克斯和斯科诺尔费(Polemarchakis and Siconolfi, 1993)论证了存在性的失败,除非某人的证券组合 θ 的收益满足 $D^{\top}\theta>0$。加克浦欧斯(Geanakoplos, 1990)纵览了在非完备市场条件下均衡存在的文献资料,其中有些资料选用名义计价单位来定义证券收益,同时允许消费多种商品。绝大多数文献允许在不确定性揭示之前有初始期的消费。要想更全面地了解相关内容,可参见麦吉尔和夏弗(Magill and Shafer, 1991)。非完全市场均衡更进一步的结果包括阿鲁约和莫泰罗(Araujo and Monteiro, 1989),伯克(Berk, 1997),布伊尔和王(Boyle and Wang, 1999),以及维尔(Weil, 1992)。

对多期情形下的相关成果,第 2 章的注释将注明有关参考资料。

习题 1.10(C)的超可微结果应归功于思凯达斯(Skiadas, 1995)。

赫尔威克(Hellwig, 1996),马斯科勒和莫泰罗(Mas-Colell and Monteiro, 1996),以及莫泰罗(Monteiro, 1996)最近证明了在连续状态下的均衡的存在。加克浦欧斯和普洛马查克斯(Geanakoplos and Polemarchakis, 1986),以及蔡(Chae, 1988)在一个与本章非常接近的模型中表明了均衡的存在。格罗达尔和芬德(Grodal and Vind, 1988),以及亚玛萨基(Yamazaki, 1991)证明了在其他表述下均衡的存在。在多商品或多期的情况下,哈特(Hart, 1975)表明在任何自然条件下,均衡的存在并不能得到保证。哈特(Hart, 1975)还给出了一个反例。对这些更特别的情形,有关一般存在性的文献将在第 2 章的注释中有所说明。

习题 1.11 的二项期权定价公式来自于夏普(Sharpe, 1985)的早期版本,在第 2 章中它被拓展到多期情形。利茨表述习题中的提示是从卢安博格(Luenberger, 1969)所提供的利茨—弗莱吉定理(Riesz-Frechet Theorem)的证明中摘要过来的。利茨—弗莱吉定理认为:对任意有内积函数 $(\cdot|\cdot)$ 的希尔伯特空间 H,任意连续的线性函数 $F: H\to\mathbb{R}$ 具有惟一的 $\pi\in H$,使得 $F(x)=(\pi|x), x\in H$。习题 1.4 中的不动点定理来自于卡库塔尼(Kakutani, 1941)。

关于不履行契约和抵押的影响,可参见加克浦欧斯和查姆(Geanakoplos and Zame, 1999),以及萨巴沃尔(Sabarwal, 1999)。格塔瑞德和卡基(Gottardi and Kajii, 1999)研究了太阳黑子均衡的作用和存在性。皮尔特拉(Pietra, 1992)论述了非决定性。罗博、法泽尔和布伊德(Lobo, Fazel and Boyd, 1999)论述了固定交易费用情况下证券组合的选择。

2.

基本的多期模型

本章把第1章关于套利、最优化及均衡的内容展延到多期的场合。出于表述证券价格的目的，我们在状态价格和鞅之间建立起了一种联系。本章的习题包括基于消费的资本资产定价模型和多期"二项"期权定价模型。

2.1 不确定性

同第1章一样，存在一有限状态集 Ω。但为了处理多期问题，我们将把不确定性处理得更正式一些，并引入概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$，其中 $\mathcal{F}$ 代表 Ω 的子集族（Ω 的子集称为事件），P 代表赋予 $\mathcal{F}$ 中任意事件 B 的概率度量 $P(B)$。如果读者对概率空间的概念不熟悉，那么，可以参见附录A。"σ 代数"、"σ 场"以及其他一些术语也常用来代替"族"一词。

时间是有 $T+1$ 期（天）：$0,1,\cdots,T$。每一期均有族集 $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$，代表在时间 t 时能得到的信息所对应的事件的集合。实际上，事件 $B\in\mathcal{F}_t$ 在时间 t 时就被得知是真是假（根据 Ω 的"分割"来定义族集将在习题2.11中给出）。我们采纳通常的传统，只要 $t\leqslant s$，$\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$ 则意味着事件不被遗忘。为了简明起见，我们也假定 $\mathcal{F}_0$ 中的每一事件的概率要么是0，要么是1，大概意思是在时间 $t=0$ 时没有信息。总而言之，过滤$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_0,\cdots,\mathcal{F}_t\}$表示信息被揭示的过程。对任意随机变量 Y，给定 $\mathcal{F}_t$，令 $E_t(Y)=E(Y|\mathcal{F}_t)$表示 Y 的条件期望（附录A.1将提供随机变量和条件期望的定义）。适应过程即某一序列 $X=\{X_0,\cdots,X_T\}$，使得对每一时间 t，X_t 是定义于$(\Omega,\mathcal{F}_t)$上的随机变量。这就意味着 X_t 在时间 t 是可观测的。适应过程 X 是一个鞅，如果对任意时间 t 和 s，且 $s>t$，我们有 $E_t(X_s)=X_t$。我们将看到，在概括证券价格特征方面，鞅是非常有用的。为了使事情简化，对任意两个随机变量 Y 和 Z 来说，如果 $Y\neq Z$ 的概率是零，那么，我们总是把 Y 和 Z 之间的关系写成"$Y=Z$"。

2.2 证券市场

证券是对券息适应过程 δ 的权益(claim)(δ_t 表示该证券在时间 t 可以领到的利息)。每个证券都有其适应价格过程 S,S_t 是该证券在时间 t 的息后价格过程,也就是说,在每一时刻 t,该证券先支付其券息,然后再以价格 S_t 进行交易。这种惯例意味着 δ_0 在证券息后价格的决定上不起作用。该证券在时间 t 的含息价格是 $S_t+\delta_t$。

假设有 N 种证券,它们由取值属于 $\mathbb{R}^N$ 的券息适应过程 $\delta=(\delta^{(1)},\cdots,\delta^{(N)})$ 所定义。这些证券有其价格适应过程 $S=(S^{(1)},\cdots,S^{(N)})$。交易策略是某个适应过程 $\theta\in\mathbb{R}^N$。这里 $\theta_t=(\theta_t^{(1)},\cdots,\theta_t^{(N)})$ 表示时间 t 交易后所持有的证券组合。交易策略 θ 所产生的券息过程 δ^θ 定义为:

$$\delta_t^\theta=\theta_{t-1}\cdot(S_t+\delta_t)-\theta_t\cdot S_t \tag{2.1}$$

按惯例,θ_{-1} 的取值为零。

2.3 套利、状态价格和鞅

给定 N 个证券的券息—价格偶(δ,S),如果 $\delta^\theta>0$,那么,交易策略 θ 就是套利。(读者应设法弄懂此概念与第 1 章的定义是一致的。)令 Θ 表示交易策略空间。对 Θ 中的任意 θ 和 φ,以及系数 a 和 b,我们有 $a\delta^\theta+b\delta^\varphi=\delta^{a\theta+b\varphi}$。因此,由交易策略产生的券息过程的买卖子空间 $M=\{\delta^\theta:\theta\in\Theta\}$ 是适应过程空间 L 上的线性子空间。

命题 2.1 要使套利不存在,只有当且仅当存在严格递增线性函数 $F:L\to\mathbb{R}$,使得对任意交易策略 θ 有 $F(\delta^\theta)=0$。

证明:此命题的证明几乎与定理 1.1 的证明完全一样。令 $L_+=\{c\in L:c\geqslant 0\}$。当且仅当锥体 L_+ 和买卖子空间 M 正好相交在零点时,就不存在套利。假设不存在套利。附录 B 中锥体形式的分离超平面定理告诉我们,存在非零线性函数 F 使得对 M 中的每一个 x,以及 L_+ 中的每一个非零 y 都有 $F(x)<F(y)$。由于 M 是线性空间,这就意味着对 M 中的每一个 x,有 $F(x)=0$,以及对 L_+ 中的每一个非零 y,有 $F(y)>0$。这说明 F 是严格递增的;反之,亦立刻可以得证。 □

下面的结果给出一个线性函数在适应过程空间上一般的利茨(Riesz)表述。证明仍留作习题,作为第 1.6 节中单期利茨表述定理的扩展。

引理 2.1 对每一个线性函数 $F:L\to\mathbb{R}$,存在惟一的 $\pi\in L$,称为 F 的利茨表述,使得:

$$F(x)=E\Big(\sum_{t=0}^{T}\pi_t x_t\Big),x\in L$$

如果 F 是严格递增的，那么，π 严格为正。

为了方便起见，我们称任意严格为正的适应过程为缩子。缩子 π 是状态价格缩子，如果对所有的 t，

$$S_t=\frac{1}{\pi_t}E_t\Big(\sum_{j=t+1}^{T}\pi_j\delta_j\Big) \tag{2.2}$$

状态价格缩子在文献中也被称为状态价格密度、价格核和边际替代率过程。

对 $t=T$，(2.2)式右边是零，所以当有状态价格缩子时，$S_T=0$。这里的状态价格缩子概念是第 1 章中状态价格缩子的自然延伸。可以证明(作为练习留给读者)，缩子 π 是状态价格缩子，当且仅当对任意交易策略 θ，

$$\theta_t\cdot S_t=\frac{1}{\pi_t}E_t\Big(\sum_{j=t+1}^{T}\pi_j\delta_j^{\theta}\Big),t<T \tag{2.3}$$

其大概意思为交易策略的市场价值就是该策略所产生的按状态价格贴现的未来券息期望。交易策略 θ 的含息价值过程 V^{θ} 被定义为 $V_t^{\theta}=\theta_{t-1}\cdot(S_t+\delta_t)$。如果 π 是状态价格缩子，我们有：

$$V_t^{\theta}=\frac{1}{\pi_t}E_t\Big(\sum_{j=t}^{T}\pi_j\delta_j^{\theta}\Big)$$

(δ,S)的获利过程 G 被定义为 $G_t=S_t+\sum_{j=1}^{t}\delta_j$，即价格加上累积券息。给定缩子 γ，紧缩后的获利过程 G^{γ} 被定义为 $G_t^{\gamma}=\gamma_t S_t+\sum_{j=1}^{t}\gamma_j\delta_j$，我们可以把紧缩理解为标准尺度的变化。

定理 2.1 当且仅当存在状态价格缩子时，券息—价格偶(δ,S)不允许有套利。当且仅当 $S_T=0$ 而且按状态价格紧缩的获利过程 G^{π} 是一个鞅时，缩子 π 为状态价格缩子。

证明：从下面可以看到，证明“当且仅当 $S_T=0$ 而且按状态价格紧缩的获利过程 G^{π} 是一个鞅”时，缩子 π 为状态价格缩子”是一个简单的练习。

假设没有套利。那么，$S_T=0$；否则当 $\theta_t=0,t<T,\theta_T=-S_T$ 时，策略 θ 是套利。前面的命题告诉我们，存在某严格递增线性函数：$F:L\to\mathbb{R}$，使得对任意策略 θ 有 $F(\delta^{\theta})=0$。由前面的定理，存在缩子 π 使得对所有 $x\in L$，有 $F(x)=E(\sum_{t=0}^{T}x_t\pi_t)$。这说明对任意交易策略 θ，$E(\sum_{t=0}^{T}\delta_t^{\theta}\pi_t)=0$ 恒成立。

我们必须证明(2.2)式或等价地证明 G^{π} 是一个鞅。由附录 A 可知，适应过程 X 是鞅，当且仅当对任意停止时间 $\tau\leqslant T$，有 $E(X_{\tau})=X_0$。考虑对任意证券 n 和任意停止时间 $\tau\leqslant T$，由 $\theta^{(k)}=0,k\neq n$ 和 $\theta_t^{(n)}=1,t<\tau$ 以及 $\theta_t^{(n)}=0,t\geqslant\tau$ 定义的交易策略 θ。由于 $E(\sum_{t=0}^{T}\pi_t\delta_t^{\theta})=0$，我们有：

$$E\Big(-S_0^{(n)}\pi_0+\sum_{t=1}^{\tau}\pi_t\delta_t^{(n)}+\pi_{\tau}S_{\tau}^{(n)}\Big)=0$$

说明证券 n 紧缩后的获利过程 $G^{n,\pi}$ 满足 $G_0^{n,\pi}=E(G_\tau^{n,\pi})$。由于 τ 是任意的，$G^{n,\pi}$ 是鞅，并且 n 是任意的，因此 G^π 也是鞅。

以上表明没有套利意味着状态价格缩子的存在。反之，亦容易得证。 □

2.4 单个行为人最优化

我们引入一个行为人，该行为人由定义于 L_+（非负适应消费过程集）上的严格递增效用函数 U 和资源禀赋过程 $e\in L_+$ 所定义。给定券息—价格偶 (δ,S)，交易策略 θ 会使得该行为人具有总的消费过程 $e+\delta^\theta$。因此，该行为人的预算可行消费集为：

$$X=\{e+\delta^\theta\in L_+ : \theta\in\Theta\}$$

其优化问题为：

$$\sup_{c\in X} U(c) \tag{2.4}$$

(2.4)式的解的存在就意味着没有套利。反之，如果 U 连续，那么，没有套利就意味着(2.4)式的解存在（建议读者将其作为习题来证明）。在检验 L 中集合的连续性和封闭性时，如果 $E[\sum_{t=0}^T|c_n(t)-c(t)|]\to 0$，那么，我们说 c_n 收敛于 c。如果当 $c_n\to c$ 时，$U(c_n)\to U(c)$，那么，U 就是连续的。

假设(2.4)式有严格正解 c^*，以及 U 在 c^* 连续可微。我们可用最优化的一阶条件（参见附录 1.2）（效用函数 U 在 c^* 处的导数）来概括证券的价格。具体来说，对 L 中的任意 c，U 在（c 方向上）c^* 点的导数为 $g'(0)$，这里 $g(\alpha)=U(c^*+\alpha c)$，其中 α 为绝对值足够小的任意系数。也就是说，$g'(0)$ 为当行为人的消费偏离 c^* 时，该行为人效用的边际改善率。该导数记为 $\nabla U(c^*;c)$。因为 U 在 c^* 处连续可微，则函数 $c\mapsto\nabla U(c^*;c)$（从 L 到 $\mathbb{R}$）为线性。由于 δ^θ 对任意交易策略 θ，是预算可行的变化方向，而且最优化的一阶条件告诉我们：

$$\nabla U(c^*;\delta^\theta)=0,\theta\in\Theta$$

于是，我们就可以概括状态价格缩子的特征。

命题 2.2 假设(2.4)式有严格正解 c^*，而且 U 在 c^* 处的导数连续且严格为正。那么，就不存套利，且状态价格由 $\nabla U(c^*)$ 的利茨表述 π 给出：

$$\nabla U(c^*;x)=E\Big(\sum_{t=0}^T\pi_t x_t\Big),\quad x\in L$$

虽然我们假定 U 严格递增，但是一般来说，$\nabla U(c^*;\cdot)$ 不需要严格递增。如果 U 是凹的，那么，$\nabla U(c^*;\cdot)$ 确实也是严格递增。

例如，假设 U 是“可加型”的，即对某 $u_t:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，$t\geqslant 0$，

$$U(c)=E\Big[\sum_{t=0}^{T}u_t(c_t)\Big],c\in L_+ \tag{2.5}$$

可以证明(作为习题留给读者),如果$\nabla U(c)$存在,那么,

$$\nabla U(c;x)=E\Big[\sum_{t=0}^{T}u_t'(c_t)x_t\Big] \tag{2.6}$$

如果对所有的t,u_t是凹的且其导数没有边界限制,而且e严格为正,那么,(2.4)式的任意解c^*也严格为正。

推论 2.1 假设U由(2.5)式给出,那么,在上述命题的条件下,对任一时间t以及$\tau\geqslant t$,

$$S_t=\frac{1}{u_t'(c_t^*)}E_t\Big[S_\tau u_\tau'(c_\tau^*)+\sum_{j=t+1}^{\tau}\delta_j u_j'(c_j^*)\Big]$$

当$\tau=t+1$时,这个结果常被称为随机欧拉方程。本章随后的习题还把这一经典成果推广到其他的效用函数类型,例如习惯形成(habit-formation)效用函数和递归(recursive)效用函数。同第1章一样,我们下面将探讨多个行为人的情形。

2.5 均衡和帕累托最优

假定有m个行为人。同上一节一样,行为人i由其严格递增效用函数$U_i:L_+\to\mathbb{R}$和资源禀赋过程$e^{(i)}\in L_+$界定。给定N个证券的券息过程δ,那么,均衡就是由交易策略$\theta^{(i)}$和证券价格过程S组成的集合$(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(m)},S)$,使得对每个行为人$i$,其交易策略$\theta^{(i)}$可以解:

$$\sup_{\theta\in\Theta}U_i(c)\quad \text{满足约束 } c=e^{(i)}+\delta^\theta\in L_+ \tag{2.7}$$

同时,$\sum_{i=1}^{m}\theta^{(i)}=0$。

如果对任意L中的过程x存在交易策略θ,且$\delta_t^\theta=x_t,t\geqslant 1$,那么,我们就说市场是完备的。因此,完备市场意味着,凭借在时刻0投资的一定金额以便在未来每一时刻t产生券息x_t的交易策略投资,就能得到任意消费过程x。若使用第1章中定义的帕累托最优性,那么,命题1.2就可以推广到多期的情形。令$c^{(i)}-e^{(i)}$是由交易策略$\theta^{(i)}$产生的券息过程,那么,任意均衡$(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(m)},S)$有其对应的可行消费配置(方案)$(c^{(1)},\cdots,c^{(m)})$。

命题 2.3 假设$(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(m)},S)$是一个均衡,而且市场是完备的,那么,它所对应的消费配置是帕累托最优的。

市场的完备性取决于证券价格过程S本身。事实上,买卖子空间对S的依赖性使得均衡的存在性是一个没有意义的问题。因此,这里我们忽略了均衡的存在问题,而在随后的附注中指出相关的参考资料。

2.6 均衡资产定价

遵循第1章的思路，我们定义，对任一$\lambda\in\mathbb{R}^m_+$，效用函数$U_\lambda: L_+\to\mathbb{R}$为：

$$U_\lambda(x)=\sup_{(c^{(1)},\cdots,c^{(m)})}\sum_{i=1}^m\lambda_iU_i(c^i)\quad\text{满足约束 } c^{(1)}+\cdots+c^{(m)}\leqslant x \tag{2.8}$$

命题 2.4 假设对所有的i，U_i为凹性，且严格递增。假设$(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(m)},S)$是一个均衡以及市场是完备的。那么，存在某非零$\lambda\in\mathbb{R}^m_+$，使$(0,S)$为单一行为人经济$[(U_\lambda,e),\delta]$(非交易)的均衡，其中$e=e^{(1)}+\cdots+e^{(m)}$。凭借此$\lambda$以及$x=e=e^{(1)}+\cdots+e^{(m)}$，(2.8)式可由均衡消费配置解出。

对此命题的证明就作为习题留给读者。这一结果实质上与命题1.3是一样的。该命题的直观感觉是：由于市场是完备的，状态价格缩子π代表所有行为人[包括代表性行为人(U_λ,e)]在不同时期和状态下消费的拉格朗日乘子。

推论 2.2 如果再假设U_λ在e处可微，那么，λ可被选定使得对任意时刻t和$\tau\geqslant t$，存在状态价格缩子π，且π由$\nabla U_\lambda(e)$的利茨表述给出。

习题1.10中有更多有关可微性的内容。

推论 2.3 假设对每一个i，U_i具有下面的可加形式：

$$U_i(c)=E\Big[\sum_{t=0}^T u_{it}(c_t)\Big]$$

那么，U_λ也具有可加形式：

$$U_\lambda(c)=E\Big[\sum_{t=0}^T u_{\lambda t}(c_t)\Big]$$

这里

$$u_{\lambda t}(y)=\sup_{x\in\mathbb{R}^m_+}\sum_{i=1}^m\lambda_iu_{it}(x_i)\qquad\text{满足约束 } x_1+\cdots+x_m\leqslant y$$

这种情况下，U_λ在e处可微意味着对任意时刻t和$\tau\geqslant t$，

$$S_t=\frac{1}{u'_{\lambda t}(e_t)}E_t\Big[u'_{\lambda\tau}(e_\tau)S_\tau+\sum_{j=t+1}^\tau u'_{\lambda j}(e_j)\delta_j\Big] \tag{2.9}$$

2.7 套利和鞅测度

本节阐述没有套利，就相当于存在这样一个概率测度Q，使得在概率测度Q下，证券

的券息的期望贴现值等于证券的价格。

如果对任意给定时间 $t<T$，存在交易策略 θ 使得 $\delta^{\theta}_{t+1}=1$，以及对 $s<t$ 和 $s>t+1$ 有 $\delta^{\theta}_{s}=0$，那么，我们就说存在短期无风险借贷，其对应的贴现折扣为 $d_t=\theta_t \cdot S_t$。如果没有套利，那么，贴现折扣 d_t 是惟一界定和严格为正的，且其对应的短期利率 r_t 由 $1+r_t=1/d_t$ 给出。意即在任意时间 $t<T$，投资者可以投资一个计价单位，而于时刻 $t+1$ 收到 $1+r_t$ 数量的计价单位。我们把 $\{r_0, r_1, \cdots, r_{T-1}\}$ 称为相应的"短期利率过程"，尽管无法定义 r_T。

贯穿本节内容，我们假定存在短期无风险借贷，且短期利率过程 r 惟一界定。对任意时刻 t 和 $\tau \leqslant T$，定义

$$R_{t,\tau}=(1+r_t)(1+r_{t+1})\cdots(1+r_{\tau-1})$$

为在时刻 t 时无风险地借入一个计价单位，并按短期借入方式重复向前滚动至时刻 τ 时所需支付的偿还额。

如果任意证券的价格仅是期望券息的贴现，那么，概念和计算问题就非常简单明了。当然，如果市场中有厌恶风险的投资者，这便是不太可能的了。但如果我们调整最初的概率测度 P，我们可以得到与此非常接近的证券定价特征。为了做到这点，如果 Q 和 P 对同样的事件都赋予零概率，那么，我们定义新概率测度 Q 等价于 P。如果

$$S_t = E^{Q}_{t}\left(\sum_{j=t+1}^{T}\frac{\delta_j}{R_{t,j}}\right), t<T$$

那么，等价概率测定 Q 就为等价鞅测试，这里 E^{Q} 表示 Q 测度下的期望，同样对任意随机变量 x，$E^{Q}_{t}(x)=E^{Q}(x|\mathcal{F}_t)$。等价鞅测度常被称为风险中性测度。

不难证明，Q 为等价鞅测度，当且仅当对任意交易策略 θ 有：

$$\theta_t \cdot S_t = E^{Q}_{t}\left(\sum_{j=t+1}^{T}\frac{\delta^{\theta}_{j}}{R_{t,j}}\right), t<T \tag{2.10}$$

如果利率是决定型的，那么，(2.10)式仅为用 Q 替代 P 后总的期望券息贴现。我们将证明如果没有套利就相当于存在等价鞅测度。

由 $\gamma_t=R^{-1}_{0,t}$ 给出的缩子 γ 界定了贴现获利过程 G^{γ}。术语"等价鞅测度"中的"鞅"一词，来自于下述的等价。

引理 2.2 当且仅当 $S_T=0$ 以及贴现获利过程 G^{γ} 是 Q 测度下的鞅时，等价于 P 的概率测量 Q 是 (δ, S) 的等价鞅测度。

根据定理 2.1 可知，没有套利就相当于存在状态缩子 π。正如附录 A 中所解释的那样，P 的等价概率测度 Q 可根据拉顿—尼科代姆(Radon-Nikodym)导数来定义。拉顿—尼科代姆导数 $\frac{dQ}{dP}$ 是严格为正的随机变量，且 $E\left(\frac{dQ}{dP}\right)=1$，其界定由 $E^{Q}(Z)=E\left(\frac{dQ}{dP}\cdot Z\right)$ 给出，这里的 Z 为任意随机度量。我们将选择一个独特的等价概率测度 Q，使得其拉顿—

尼科代姆导数$\frac{dQ}{dP}=\xi_T$，这里

$$\xi_T=\frac{\pi_T R_{0,T}}{\pi_0}$$

（事实上，读者可以验证，ξ_T 严格为正，且期望为 1。）Q 的密度过程 ξ 由 $\xi_t=E_t(\xi_T)$ 定义。附录中的(A.2)式说明，对任意时间 t 和 $j>t$，以及任意 F_j 可测度的随机变量 Z_j，

$$E_t^Q(Z_j)=\frac{1}{\xi_t}E_t(\xi_j Z_j) \tag{2.11}$$

锁定时刻 $t<T$，考虑这样一个交易策略 θ，即在时刻 t，投入一个计价单位（的财富）于短期无风险市场，并不断向前滚动投资直到时刻 T。该交易策略的最终价值为 $R_{t,T}$。也就是说，有 $\theta_t \cdot S_t=1$ 和 $\delta_T^\theta=R_{t,T}$。(2.3)式说明：

$$\pi_t=E_t(\pi_T R_{t,T})=\frac{E_t(\pi_T R_{0,T})}{R_{0,t}}=\frac{E_t(\xi_T\pi_0)}{R_{0,t}}=\frac{\xi_t\pi_0}{R_{0,t}} \tag{2.12}$$

从(2.11)式、(2.12)式以及状态价格缩子的定义可知，(2.10)式成立。因此，Q 的确是等价鞅测度。于是，我们证明了下面的定理。

定理 2.2 *当且仅当存在等价鞅测度时，不存在套利。当且仅当等价鞅测度 Q 具有由 $\xi_t=R_{0,t}\pi_t/\pi_0$ 定义的密度过程 ξ 时，π 是状态价格缩子。*

命题 2.5 *假定 $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}$，而且不存在套利。那么，当且仅当存在惟一的等价鞅测度时，市场是完全的。*

证明：假定市场是完备的，并令 Q_1 和 Q_2 为两个等价鞅测度。我们必须证明 $Q_1=Q_2$。令 A 为任意事件。由于市场是完备的，存在交易策略 θ，其付息过程 δ^θ 满足 $\delta_T^\theta=R_{0,T}1_A$ 和 $\delta_t^\theta=0(0<t<T)$。由(2.10)式得出，$\theta_0 \cdot S_0=Q_1(A)=Q_2(A)$。由于 A 是任意的，因此，$Q_1=Q_2$。

习题 2.18 给出了定理的逆向部分的证明框架。 □

鞅的方法简化了许多资产定价的问题。如果没有鞅的方法，这些问题将变得相当复杂。其实鞅的方法的应用比这里所指出的还要普遍和广泛。例如，短期借贷的假设只不过是为图个方便。更一般地，正如第 6 章中所阐述的那样，人们在用某种特别证券或交易策略的价格对价格和券息进行模化后，就可能到等价鞅测度。

2.8 富余证券的价值

假定给定的券息—价格偶(δ,S)无套利，并且其对应的状态价格缩子为 π。现考虑引入某种新的证券，其券息过程为 $\hat{\delta}$，价格过程为 $\hat{S}$。给定(δ,S)，如果存在一个只就原来给

定的息价过程(δ,S)而言的交易策略θ,使得其所产生的息过程$\delta_t^\theta=\hat{\delta}_t, t\geqslant 1$。我们就说$\hat{\delta}$是富余的,而且$\hat{\delta}$是可被复制的。在这种情况下,新(增加的)息价过程$[(\delta,\hat{\delta}),(S,\hat{S})]$无套利意味着,$\hat{S}_t=Y_t$,其中:

$$Y_t=\frac{1}{\pi_t}E_t\left(\sum_{j=t+1}^{T}\pi_j\hat{\delta}_j\right), t<T$$

如果不是这样,那么,就一定存在套利。说明如下:例如,假设对停止时间τ,有$\hat{S}_\tau>Y_\tau$,且$\tau\leqslant T$有严格为正的概率。定义以下的交易策略:

(a)在时刻τ按价格$\hat{S}_\tau$卖出该富余证券$\hat{\delta}$,并持有这种头寸直到时间T。

(b)在时刻τ向复制交易策略θ中投入$\theta_\tau\cdot S_\tau$,并遵循这样的投资策略直到时间T。

由于从(a)到(b)的组合策略中所产生的利息在时刻τ后是零,因此,惟一的利息是时间τ所产生的,其数量为$\hat{S}_\tau-Y_\tau>0$,这意味着是一个套利。同理,如果$\hat{S}_\tau<Y_\tau$,那么,对某一并非无意义的停止时间τ,上述策略的反向也是一个套利。于是,我们证明了下面的命题。

命题2.6 假定(δ,S)是无套利的,且其状态价格缩子为π。令$\hat{\delta}$为富余券息过程,其价格过程为$\hat{S}$。那么,当且仅当其状态价格缩子也是π时,新增后的券息—价格偶$[(\delta,\hat{\delta}),(S,\hat{S})]$无套利。

在应用中,通常假定(δ,S)产生完备市场,此种情况下,任何其他证券都是富余的。习题2.1提供了富余证券的经典例子,该富余证券是一个基于某个起初证券的期权。

2.9 美式履约方针和定价模型

现在再把我们的定价模型拓展到可以包容一族被称为"美式"证券的情形。美式证券的特点是在现金流的定时方面具有自由决定权。

给定适应过程X,每个有限取值的停止时间τ会导致付息过程$\delta^{X,\tau}$:$\delta_t^{X,\tau}=0, t\neq\tau$和$\delta_\tau^{X,\tau}=X_\tau$。在此情形下,取某个有限的停止时间为履约方针,即决定接受支付的时间。任何履约方针τ都必须受$\tau\leqslant\bar{\tau}$的约束,$\bar{\tau}$为到期时间,$\bar{\tau}\leqslant T$。[在以后的内容中,我们也可以把$\bar{\tau}$当成停止时间,这将在处理某些撞出(knockout)期权时特别有用,就像习题2.1中的情况一样。]我们称$(X,\bar{\tau})$定义了美式证券。履行方针由证券的持有者选定。一旦执行了履约,那么,该证券就再没有剩余现金流。一个典形的例子是关于价格过程为p的证券

的美式看跌期权。美式期权赋予期权持有者有权力(而不是义务)在到期时间 $\bar{\tau}$ 之前的任一时间以某个固定价格卖出基础证券。如果该期权的履约价格为 K,到期时间为 $\bar{\tau}<T$,那么,$X_t=(K-p_t)^+$,$t\leqslant\bar{\tau}$ 和 $X_t=0$,$t>\tau$。

我们假设,除了美式证券$(X,\bar{\tau})$之外,还存在具有无套利券息—价格偶(δ,S)且能产生完备市场的其他证券。完备市场的假设使我们的分析一下子变得简单,因为这意味着,对任意履约方针 τ,若给定(δ,S),其付息过程 $\delta^{X,\tau}$就是富余的。为了表述的方便,我们假设 $0<\bar{\tau}<T$。

令 π 是与(δ,S)相关的状态价格缩子。由命题 2.6 可知,给定任意履约方针 τ,该美式证券的券息过程 $\delta^{X,\tau}$有与其对应的含息价格过程 V^τ,而且该过程在无套利的情况下满足:

$$V_t^\tau=\frac{1}{\pi_t}E_t(\pi_\tau X_\tau),t\leqslant\tau$$

这一价值不取决于选择哪个状态价格缩子,因为在完备市场的情况下,所有状态价格缩子的差别只是一个正的系数,就像我们可以从第 2.7 节中的定理和命题看到的一样。

我们考虑下述最佳停止问题:

$$V_0^*\equiv\max_{\tau\in\mathcal{T}(0)}V_0^\tau \tag{2.13}$$

其中,对任意时刻 $t\leqslant\bar{\tau}$,我们令 $\mathcal{T}(t)$表示下界为 t 和上界为 $\bar{\tau}$ 的停止时间集合。(2.13)式的解被称为美式证券 X 的理性履约方针,因为它将使结果的最初无套利价值最大化。

我们声称,在无套利的情况下,该美式证券的初始价格 V_0 必须等于"理性价值"V_0^*。为了明白这一点,首先假设 $V_0^*>V_0$。那么,人们可以买进该美式证券,并对其采用理性履约方针 τ,与此同时,实施一个交易策略对$-\delta^{X,\tau}$进行复制。由于 $V_0^*=E(\pi_\tau X_\tau)/\pi_0$,该复制导致了初始收入 V_0^*,并且净收益为总的初期息,即 $V_0^*-V_0>0$。因为时刻 0 以后,净息为零,这就定义了一个套利。因此,无套利容易得出结论 $V_0\geqslant V_0^*$。同样,可以证明,无套利意味着相反的不等式 $V_0\leqslant V_0^*$ 成立。

假设 $V_0>V_0^*$,人们可以在时刻 0 以价格 V_0 卖出美式证券。我们将说明对初始投资 V_0^*,人们可以"超级复制"(super-replicating)美式证券持有者所要求的履约处的收入,而不管采用什么样的履约方针。具体来说,$(X,\bar{\tau},\delta,S)$的超级复制交易策略 θ 是仅涉及具有券息—价格偶(δ,S)且满足下述特征的证券交易策略:

(a)当 $0<t<\bar{\tau}$ 时,$\delta_t^\theta=0$。

(b)对所有的 $t\leqslant\tau$,$V_t^\theta\geqslant X_t$。

其中,V_t^θ 为 θ 在时刻 t 的含息价值。不管证券持有人的履约方针 τ 如何,他在时刻 τ 所要求的支付 X_τ 总是被超级复制策略 θ 的市场价值 V_t^θ 所主导。(实际上通过在时刻 τ 对 θ_τ 清盘,人们可以修改 θ 使得与套利相关的实际交易策略 φ 为:对 $t<\tau$,$\varphi_t=\theta_t$;对 $t\geqslant\tau$,$\varphi_t=0$。)现在,假设 θ 为超级复制,且 $V_0^\theta=V_0^*$。如果确实有 $V_0>V_0^*$,那么,就卖出美式证券,

同时采纳超级复制策略并在美式证券履约时对超级复制清盘，这个复合的交易策略有效地定义了一个套利。

这种关于美式证券的套利概念，是本章前面所述的套利概念的合理延伸，因为超级复制策略不依赖于美式证券持有者（或者时间过程内的一系列持有者）所采纳的履约方针。对于涉及美式证券卖空的策略而言，如果在执行的时候还需要知道该美式证券的履约方针，那么，就不应该把它称为套利。因为该美式证券的履约是由其他行为人实施的，这些人毕竟可能有非理性的行动。

命题 2.7 给定$(X,\bar{\tau},\delta,S)$，假设(δ,S)无套利且能产生完备市场，那么，对$(X,\bar{\tau},\delta,S)$存在超级复制交易策略θ，且其初始价值$V_0^\theta=V_0^*$。

为了构造超级复制策略，我们将对最佳停止的理论作一个简述。对任意过程$Y\in L$，Y的斯耐尔包络(Snell envelope)W被定义为：

$$W_t=\max_{\tau\in\mathcal{S}(t)}E_t(Y_\tau),0\leqslant t\leqslant\bar{\tau}$$

作为练习可以证明，对任意$t<\bar{\tau}$，$W_t=\max[Y_t,E_t(W_{t+1})]$。所以$W_t\geqslant E_t(W_{t+1})$，意味着$W$是一个上鞅。正如附录A中所解释的那样，这意味着我们可以把W按下式分解：对某鞅Z和某递增的且满足$A_0=0$的适应过程A而言，$W=Z-A$。图2.1对这一分解做出说明，在该图中，Y为确定过程，这意味着W、Z和A也是确定型的。

为了证明本节中的命题，我们定义Y为$Y_t=X_t\pi_t$，W、Z和A则同上述之定义。由完备市场的定义可知，存在交易策略θ，其具有下述特征：

- 当$0<t<\bar{\tau}$时，$\delta_t^\theta=0$；
- $\delta_{\bar{\tau}}^\theta=Z_{\bar{\tau}}/\pi_{\bar{\tau}}$；
- 当$t>\bar{\tau}$时，$\delta_t^\theta=0$。

该交易策略θ满足超级复制策略的特征(a)。从Z是一个鞅的事实和状态价格缩子的定义可得，该交易策略θ的含息价值V^θ满足：

$$\pi_tV_t^\theta=E_t(\pi_{\bar{\tau}}\delta_{\bar{\tau}}^\theta)=E_t(Z_{\bar{\tau}})=Z_t,t\leqslant\bar{\tau}\tag{2.14}$$

根据(2.14)式和$A_0=0$的事实，我们知道$V_0^\theta=V_0^*$，这是因为$Z_0=W_0=\pi_0V_0^*$。由于对所有的t，$Z_t-A_t=W_t\geqslant Y_t$，根据(2.14)式，我们得出：

$$V_t^\theta=\frac{Z_t}{\pi_t}\geqslant\frac{1}{\pi_t}(Y_t+A_t)=X_t+\frac{A_t}{\pi_t}\geqslant X_t,t\leqslant\bar{\tau}$$

最后的不等式是由$A_t\geqslant0$对所有的t均成立的事实得出。因此，控制特征(b)也同样得到了满足，θ确实为满足$V_0^\theta=V_0^*$的超级复制策略。而且，这也使得命题得证，并且意味着除非存在套利，否则美式证券的初始价格V_0将等于该证券与理性履约方针相应的市场价值V_0^*。

斯耐尔包络W是找到理性履约方针的关键。类似于图2.1所示的确定型的情况，理性履约方针可由$\tau^0=\min\{t:W_t=Y_t\}$给出。现在来说明τ^0的最优性。首先，我们知道，

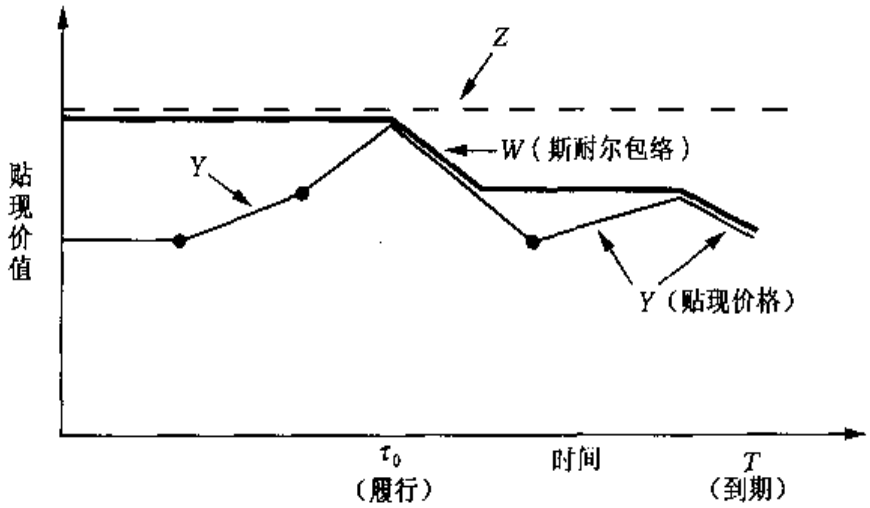


图 2.1 斯耐尔包络和最佳停止原则：决定性情形

如果 τ 是理性履约方针，那么，$W_\tau=Y_\tau$。（这点可以由以下事实得出：即 $W_\tau\geqslant Y_\tau$，以及如果 $W_\tau>Y_\tau$，τ 就不可能是理性的。）由这一事实可知，任意理性履约方针 τ 具有特性 $\tau\geqslant\tau^0$。对任一 τ，我们有：

$$E_{\tau^0}[Y(\tau)]\leqslant W(\tau^0)=Y(\tau^0)$$

再应用期望迭代法则，有 $E[Y(\tau)]\leqslant E[Y(\tau^0)]$，所以 τ^0 是理性的。

我们已阐明了下面的定理：

定理 2.3 给定 $(X,\bar{\tau},\delta,S)$，假设 (δ,S) 能产生完备市场。假设 (δ,S) 存在状态价格缩子 π，令 W 为 $X\pi$ 直至到期时间 $\bar{\tau}$ 的斯耐尔包络。那么，$(X,\bar{\tau},\delta,S)$ 理性履约方针就可以由 $\tau^0=\min\{t:W_t=\pi_tX_t\}$ 给出。该美式证券的惟一初始含息无套利价格为：

$$V_0^*=\frac{1}{\pi_0}E[X(\tau^0)\pi(\tau^0)]$$

2.10 提前履约最优吗

借助于第 2.7 节中定义的等价鞅测度 Q，我们也可把最佳停止问题(2.13)式写成下列形式：

$$V_0^*=\max_{\tau\in\mathcal{T}(0)}E^Q\left(\frac{X_\tau}{R_{0,\tau}}\right)\tag{2.15}$$

理性履约问题的这种表述有时是非常方便的，例如，让我们考虑关于价格过程为 p 的证券的美式看涨期权的情形。对于履约价格 K，我们有 $X_t=(p_t-K)^+$。假设该基础证券在到期之前和到期日 $\bar{\tau}$ 均无息。我们假设利息为正，即对所有的 t 和 $s\geqslant t$，有 $R_{t,s}\geqslant 1$。在

这些假设前提下，我们将阐明在到期时间 $\bar{\tau}$ 之前履行该看涨期权总不会是最优的。

这一特征有时也被称为“不提早履约”或者“活着比死好。”

我们定义“贴现后的价格过程”p^* 为 $p^*=p_t/R_{0,t}$。“基础证券只能在到期时间 $\bar{\tau}$ 后付息”这一事实表明，根据定理 2.4，至少至到期时间 $\bar{\tau}$ 为止，p^* 是一个 Q 鞅。也就是说，$t\leqslant s\leqslant\bar{\tau}$ 时，我们有 $E_t^Q(p_s^*)=p_t^*$。

杰森不等式可以用来说明下述关于鞅的凸函数事实。我们将用这一事实来得到产生“不提早履约”结果的条件。

引理 2.3 假设 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 对其第一个自变量为凸，Y 为一个鞅，$\tau(1)$ 和 $\tau(2)$ 为两个停止时间，且 $\tau(2)\geqslant\tau(1)$，Z 为某个适应过程。那么，$f(Y_{\tau(1)},Z_{\tau(1)})\leqslant E_{\tau(1)}[f(Y_{\tau(2)},Z_{\tau(1)})]$。此外，期望迭代法则表明 $E[f(Y_{\tau(1)},Z_{\tau(1)})]\leqslant E[f(Y_{\tau(2)},Z_{\tau(1)})]$。

借助于这一定理和正的利息率，对任意停止时间 $\tau\leqslant\bar{\tau}$，我们有：

$$\begin{aligned}E^Q\left[\frac{1}{R_{0,\tau}}(p_\tau-K)^+\right]&=E^Q\left[\left(p_\tau^*-\frac{K}{R_{0,\tau}}\right)^+\right]\\&\leqslant E^Q\left[\left(p_\tau^*-\frac{K}{R_{0,\bar{\tau}}}\right)^+\right]\\&\leqslant E^Q\left[\left(p_{\bar{\tau}}^*-\frac{K}{R_{0,\bar{\tau}}}\right)^+\right]\\&=E^Q\left[\frac{1}{R_{0,\bar{\tau}}}(p_{\bar{\tau}}-K)^+\right]\end{aligned}$$

因此，$\bar{\tau}$ 为理性履约方针。在典型场合下，$\bar{\tau}$ 为惟一的理性履约方针。

如果基础证券在到期之前付息，那么，提早履约美式看涨期权在某些场合下是最优的。由看跌期权的收入是随执行价格增加而增加的这一事实能够得出（看涨期权则相反，是递减的），对于看跌期权，上述第二个不等式应该反过来，所以人们可以猜测，提早履约美式看跌期权有时是最优的。

习题 2.1 给出在完备市场的情形下，美式证券定价的一个简单例子。第 3 章将介绍马尔可夫情形，这将为解决理性履约方针和美式证券的市场价值提供计算上的优势。在第 3 章中，我们仍将考虑在到期前付息的美式证券的情形。

分析美式证券的真正难点在于不完备市场。在那种情形下，执行方针的选择可能会对市场子空间的决定并进而对证券的定价起作用。如果状态价格缩子依赖于执行方针，那么，就表明理性执行方针这一概念不能被很好地定义。

习 题

2.1 根据第 2.2 节中的情形，假设 S 是某证券的价格过程，该证券的股息在时间 T 之前为零。我们假定：

$$S_{t+1}=S_tH_{t+1};t\geqslant 0;S_0>0$$

式中，H 为如下所述的适应过程：对所有的 $t\geqslant 1$，H_t 只有两种可能的结果：$U>0$ 和 $D>0$。给定 $\mathscr{F}_{t-1}$，U 和 D 均具有正的条件概率。假设 β 为在时间 T 之前没有股息的证券的价格过程，而且：

$$\beta_{t-1}=\beta_t R;\ t\geqslant 0;\ \beta_0>0$$

式中，$R>1$ 为常数。我们可以把 β 看成是无风险债券的价格过程。考虑第三种证券：关于 S 的欧式看涨期权，其到期日被固定为 $\tau<T$，履约价格为 $K\geqslant 0$。这意味着第三种证券的价格过程 C^τ 在到期时的价格为：

$$C_\tau^\tau=(S_\tau-K)^+=\max(S_\tau-K,0)$$

且 $C_t^\tau=0$，$t>\tau$。也就是说，期权给予其持有者权利（而不是义务）在时间 τ 以价格 K 购买该股票。

不存在套利意味着 $U=R=D$ 或者 $U>R>D$。我们在本习题的余下部分里假定后者（即非退化的回报率）成立。

(A) 假设没有套利，证明对 $0\leqslant t<\tau$，有：

$$C_t^\tau=\frac{1}{R^{\tau-t}}\sum_{i=0}^{\tau-t}b(i;\tau-t,p)(U^iD^{\tau-t-i}S_t-K)^+ \tag{2.16}$$

式中，$p=(R-D)/(U-D)$，以及：

$$b(i;n,p)=\frac{n!}{i!\ (n-i)!}p^i(1-p)^{n-i} \tag{2.17}$$

为 n 次贝努利（独立二项）试验中第 i 次成功的概率，每次成功的概率为 p，因此，(2.16)式可以被看成期权的贴现期望履约价值，其期望运算所需的概率测度是根据股票和债券的回报构造的。

为了用模型表述这一观点，令 $\hat{S}$ 为由下式定义的过程：

$$\hat{S}_{t+1}=\hat{S}_t\hat{H}_{t+1};\quad t\geqslant 0;\quad \hat{S}_0=S_0 \tag{2.18}$$

这里 $\{\hat{H}_0,\hat{H}_1,\cdots\}$ 为具有结果 U 和 D 以及对应概率 p 和 $1-p$ 的贝努利试验。那么，(2.18)式意味着：

$$C_0^\tau=E\left[\frac{(\hat{S}_\tau-K)^+}{R^\tau}\right] \tag{2.19}$$

(B) 我们假定 $\mathbb{F}$ 为回报过程 H 产生的过滤，即对所有的 $t\geqslant 1$，$\mathscr{F}_t$ 为 $\{H_0,\cdots,H_t\}$ 所产生的族集。我们把(A)中描述的期权定义扩展到可以允许到期日期 τ 为停止时间的情况。证明(2.19)式仍可由无套利推得。

(C) 证明市场是完备的。

(D) 具备决定性到期时间 $\tau<T$ 执行价格 K 的看涨期权的含金量(moneyness)为 $(S_0R^\tau-K)/K$。如果含金量是正的，那么，该期权被说成是实值的(in the money)；如果含金量为负，那么，该期权被说成是虚值的(out of the money)；如果含金量为零，那么，期权被说成是平价(at the money)的。对具有同样履约价格 K 和到期时间 τ 的看跌期权，其含金量为 $(K-S_0R^\tau)/K$（看涨期权的含金量为负值），这也应用了同样的术语。令 $S_0=100$，$U=1.028$，$R=1.001$，$D=0.978$。请将以下各期权的价格对其含金量画图或制表：欧式看涨期权、美式看涨和看跌期权。所有这些期权均在 $\tau=100$ 到期。

(E) 对(D)中的参数，假定股票回报的上升和下跌的可能性在每一时期均是一样大的，再假定每一期代表 0.01 年。请计算（连续的）年复利 r，以及年回报 $\rho=(\log S_{100}-\log S_0)/100$ 的均值和标准差。以频率图的形式描绘 ρ 的可能性，即对 ρ 的每一结果展示其概率。

(F) 障碍期权(barrier option)的特征是该期权能否履行取决于其基础证券的价格是否在到期之前穿越了某一给定水平。例如,一个跌出局买权(down-and-out call),存在障碍$\underline{S}$,履约时间为τ(可能为停止时间),履约价格$K\geqslant\underline{S}$,那么,该期权$\underline{S}$在时间τ时应支付$1_A(S_\tau-K)^+$,其中A为事件$\{\omega:\min\{S_0(\omega),S_1(\omega),\cdots,S_{\tau(\omega)}(\omega)\}>\underline{S}\}$,也就是说,$A$是这样一件事件:到时刻$\tau$为止,基础证券的最低价格比障碍$\underline{S}$大。这说明,美式跌出局买权在任意时刻$\tau\leqslant\bar{\tau}$均可执行,而更具合理性的是只在时刻$\bar{\tau}$执行(如果要执行的话)。

(G) 对于(D)中的参数和$\bar{\tau}=100$,当履约价格K的变化范围为80~120时,请为具有障碍$\underline{S}=80$的跌出局看涨期权定价,并为在此变化范围内的整数K所决定的价格作图(如果你觉得有困难的话,亦可为其制表)。

(H)对于(D)中的参数,为具有撞出障碍$\bar{S}=120$的欧式和美式涨出局看跌期权定价,并再次令履约价格K在80~120的范围内变动。请为在此范围内的整数K所决定的价格作图(如果你觉得有困难的话,亦可为其制表)。对于$K=100$的特殊情形,画出对美式涨出局看跌期权的最优行权区域。也就是说,对于每个$t\leqslant100$,作图说明S_t是最优行权(在时刻t)的结果集。

2.2 假定在(2.4)式的环境下,(δ,S)不允许有套利且U是连续的,证明解的存在性。提示:紧集上的连续函数有最大值。在本题中,如果集合为闭集并且有界,那么就是紧性的。

2.3 假定在(2.4)式的环境下,$e\gg0$且U具有可加形式(2.5)式,其中对任意t,u_t为凹性且有界的导数,证明任意解c^*严格为正。并证明如果$e\gg0$的假设被市场是完备的且e为非零的假设所取代,同样的结论亦成立。

2.4 证明引理2.1。提示:对L中的任意x和y,令

$$(x\mid y)=E\Big(\sum_{t=0}^{T}x_ty_t\Big)$$

然后遵循习题1.17中的提示。注意,如果对所有的t几乎肯定有$x_t=y_t$,那么,我们就记"$x=y$"。

2.5 对U的可加型形式(2.5)式,请说明如果梯度$\nabla U(c)$存在的话,那么,其正如(2.6)式所表述。

2.6 (基于消费的CAPM)假设$(c^{(1)},c^{(m)})$是严格为正的均衡消费配置,且对所有的i,U_i为可加型:$U_i(c)=E[\sum_{t=0}^{T}u_{it}(c_t)]$。假设存在常数$\bar{c}$,对所有的$i$和$t$,$\bar{c}>c_t^i$,且$u_{it}(x)=A_{it}x-B_{it}x^2$,$x\leqslant\bar{c}$,其中$A_{it}$和$B_{it}$为正常数。也就是说,效用函数在相关区域内为二次型。

(A)在推论2.3的背景下,说明对任一时间t,存在常数k_t和K_t,使得$u'_{it}(e_t)=k_t+K_te_t$。假设给定交易策略θ和时间t,下面几点可以被很好定义:

- $R_t^\theta=\theta_{t-1}\cdot(S_t+\delta_t)/\theta_{t-1}\cdot S_{t-1}$是交易策略$\theta$在时间$t$的回报;
- R_t^M是在时间t使$\mathrm{corr}_{t-1}(R_t^\varphi,e_t)$最大化的交易策略$\varphi$的回报,其中$\mathrm{corr}_t(\cdot)$表示$\mathcal{F}_t$下的条件相关;
- $\beta_{t-1}^\theta=\mathrm{cov}_{t-1}(R_t^\theta,R_t^M)/\mathrm{var}_{t-1}(R_t^M)$是交易策略$\theta$的条件贝塔(相对于市场证券回报),其中$\mathrm{cov}_t(\cdot)$表示$\mathcal{F}_t$下的条件协方差,$\mathrm{var}_t(\cdot)$表示$\mathcal{F}_t$下的条件方差;
- R_t^η是在时间t满足$\mathrm{corr}_{t-1}(R_t^\eta,e_t)=0$的策略$\eta$的回报。

推导基于消费的CAPM的下述贝塔形式:

$$E_{t-1}(R_t^\theta-R_t^\eta)=\beta_{t-1}^\theta E_{t-1}(R_t^M-R_t^\eta)\tag{2.20}$$

(B)证明即使不假设完全市场,同样的CAPM贝塔形式(2.20)也成立。

(C)推广第 1.6 节中状态价格贝塔模型到如下所示的情形，并且不要用 CAPM 的假设：令 π 为状态价格缩子。对任一时间 t，假设 R_t^* 是能够解下述问题的交易策略的回报：

$$\sup_{\theta} \mathrm{corr}_{t-1}(R_t^\theta, \pi_t)$$

假定 $\mathrm{var}_{t-1}(R_t^*)$ 几乎肯定为非零。说明对任意回报 R_t^θ，

$$E_{t-1}(R_t^\theta - R_t^0) = \beta_{t-1}^\theta E_{t-1}(R_t^* - R_t^0)$$

其中 $\beta_{t-1}^\theta = \mathrm{cov}_{t-1}(R_t^\theta, R_t^*)/\mathrm{var}_{t-1}(R_t^*)$ 和 $\mathrm{corr}_{t-1}(R_t^\theta, \pi_t) = 0$。

2.7 证明命题 2.3。

2.8 在第 2.4 节的环境下，假定 U 为习惯养成效用函数，并定义为 $U(c) = E[\sum_{t=0}^{T} u(c_t, h_t)]$，其中 $u: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在其定义域的内部连续可微，且对任意 t 和 $\alpha \in \mathbb{R}^\top$，消费的“习惯”水平被定义为 $h_t = \sum_{j=0}^{t} \alpha_j c_{t-j}$。例如，对于 $\gamma \in (0,1)$，我们可以取 $\alpha_j = \gamma^j$，它对过去的消费给出了下降的权值。请计算 U 在严格为正的消费过程 c 处的梯度的利茨(Riesz)表述。

2.9 考虑如下述所定义的效用函数 U：$U(c) = V_0$，其中效用过程 V 是通过递归定义的。在时刻 T 以后，V 由 $V_T = J(c_T, h(0))$ 定义，以及若 $t < T$，则由 $V_t = J(c_t, E_t[h(V_{t+1})])$ 定义。其中 $J: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是递增的且在其定义域的内部连续可微，$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是递增的且连续可微的。这是被称为递归效用函数的一种特殊情况，同时也是被称为克瑞普斯--波特乌斯(Kreps-Porteus)效用的一种特殊情况。注意，效用函数在某种意义上取决于过滤$\mathbb{F}$，而可加型的或习惯养成型的效用函数则不具备这一特征。本题中效用函数模式将在第 3 章的习题中被再次考虑。

(A) 计算 U 在严格正消费过程 c 处的梯度的利茨(Riesz)表述 π。

(B) 假设 h 和 J 为凹性且递增的函数，证明 U 是凹性的和递增的。

2.10 在第 2.5 节的情形下，阿罗--德布鲁(Arrow-Debreu)均衡为可行的消费配置 $(c^{(1)}, \cdots, c^{(m)})$ 和非零线性函数 $\Psi: L \to \mathbb{R}$，使得对所有的 i，c^i 可以解 $\max_{c \in L_+} U_i(c)$，约束为 $\Psi(c^i) \leqslant \Psi(e^i)$。假设 $(c^{(1)}, \cdots, c^{(m)})$ 和 Ψ 构成一个阿罗--德布鲁均衡，以及 π 为 Ψ 的利茨(Riesz)表述。令 S 由下述约束定义：$S_T = 0$ 且 π 为状态价格缩子。假设给定 (δ, S)，市场是完备的，证明存在交易策略 $\theta^{(1)}, \cdots, \theta^{(m)}$，使得 $(\theta^{(1)}, \cdots, \theta^{(m)}, S)$ 是具有消费配置 $(c^{(1)}, \cdots, c^{(m)})$ 的均衡。

2.11 给定有限状态集 Ω，Ω 的分割(partition)是指 Ω 的分离非空子集的集合，其并集为 Ω。例如，$\{1,2,3\}$ 的分割是 $\{\{1\},\{2,3\}\}$。由给定 Ω 的分割 p 生成的有限状态集 Ω 上的族 $\sigma(p)$ 是在 Ω 上的最小族 $\mathcal{F}$，使得 $p \subset \mathcal{F}$。反之，对任何 Ω 上的族 $\mathcal{F}$，由 $\mathcal{F}$ 生成的分割 $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ 是 Ω 的最小分割 p，使得 $\mathcal{F} = \sigma(p)$。举例来说，族 $\{\varnothing, \Omega, \{1\}, \{2,3\}\}$ 是由上述例子中的分割生成的。因为分割和给定有限集 Ω 上的族为一一对应关系，因此，我们就能借助于 Ω 的分割的递增序列 $p_0, p_1, \cdots, p_T$ 而非族 $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_T$ 的过滤来发展第 2 章中的结果。(然而，在有限状态模型中，使用族比使用分割更方便。)

为了简单起见，我们假定对任意非空事件 B，有 $P(B) > 0$。给定 Ω 的子集 B 及 Ω 的分割 p，令 $n(B, p)$ 表示并集包含 B 时，p 中元素的最小数量。在此意义上，该数量就是当事件 B 发生时，不同的可能发生的非空事件的数量。对 $t < T$，令：

$$n_t = \max_{B \in p_t} n(B, p_{t+1})$$

最后，由 $p_0, \cdots, p_T$ 生成的过滤$\mathbb{F}$的张量数(spanning number)是 $n(\mathbb{F}) \equiv \max_{t<T} n_t$。由此，$n(\mathbb{F})$ 就是在二期之间可能被揭示的不同事件的最大数量。

证明：完备市场至少要求 $n(\mathbb{F})$ 证券以及给定过滤$\mathbb{F}$，存在 $n(\mathbb{F})$ 券息过程的集合以及与无套利相联系的证券价格过程，使得市场是完备的。这一问题在附注指明的资料中得到了更进一步的研究。

2.12 给定具有券息—价格偶为(δ,S)的证券，请拓展定理 2.2 说明：在每一时期允许以严格为正的贴现折扣进行无风险借贷的情形下，下面这些陈述的等价性：

(a) 存在状态价格缩子。

(b) 存在缩子 π 使得(2.3)式对任意交易策略 θ 成立。

(c) $S_T=0$ 且存在缩子 π 使得紧缩后的获利过程 G^* 是一个鞅。

(d) 不存在套利。

(e) 存在等价鞅测度。

2.13 根据(2.11)式和(2.12)式，说明(2.10)式的确可以证明 Q 为等价鞅测度。

2.14 说明：同第 2.9 节中所声明的那样，如果 τ^* 为美式证券 X 的理性履约方针，且 V^* 为美式证券在此理性履约方针下的含息价格过程，那么，对任意停止时间 $\tau\leqslant\tau^*$，有 $V_\tau^*\geqslant X_\tau$ 成立。

2.15 (修改后的总合)假设在求(2.8)式的上确界的环境下，$x\gg0$，且对所有的 i，$U_i(c)=E[\sum_{t=0}^{T}u_t(c_t)]$，其中对所有的 t，$u_t(x)=k_t x^{\gamma(t)}/\gamma(t)$，这里 k_t 和 $\gamma(t)<1$，$\gamma(t)\neq0$ 为常数(依赖于 t)。

(A)说明 U_i 具有与效用函数 U_i 同样的形式。

(B)假设 $\gamma(t)$ 为独立于 t 的常数，用如下假设代替命题 2.4 中完备市场的假设：$e\gg0$ 且对所有的 i 存在券息过程为 e^i 的证券(此假设可以很容易地被再弱化)。请说明存在具有与命题 2.4 同样特征的均衡，包括其消费配置的帕累托最优性。

2.16 (看涨看跌期权平价)在第 2.2 节所解释的一般情形下，假设存在下述证券：

(a)某股票，其价格过程为 X。

(b)关于该股票的欧式看涨期权，其履约价格为 K，到期时间为 τ。

(c)关于该股票的看跌期权，其履约价格为 K，到期时间为 τ。

(d)某 τ 期的零息无风险债券。

令 X_0、C_0、P_0 和 B_0 表示各类证券的最初价格。假设不存在套利，且该股票在时间 τ 之前不支付股息。请明确地用 X_0、P_0 和 B_0 求解 C_0。

2.17 (期货—远期价格等价)此习题定义了(在理想状态下)远期合约(forward contract)和期货合约(futures contract)，并且给出了使得期货价格和远期价格保持一致的简单条件。我们采用了第 2.2 节中无套利的情形，并且从头至尾固定了交付日 τ 和结算量 W_τ(一个 $\mathcal{F}_\tau$ 可测度的随机变量)。

不正规地讲，在时间 t 签订的远期协议是对付出一定数量 F_τ(远期价格)的承诺，其在时间 t 达成，在时间 τ 交付并在时间 τ 获得数量为 W_τ 的回报。正式地讲，在时间 t 签订的远期价格 F_T 并在时间 τ 获得交付 W_τ 的远期合约是一种证券，其价格在时间 t 时为零，并且其券息过程 δ 由 $\delta_t=0,t\neq\tau$ 和 $\delta_t=W_\tau-F_t$ 定义。

(A)假设 Q 为等价鞅测度，并且存在可在任何日期 t 以决定性的贴现率 d_t 进行短期无风险借贷。证明$\{F_0,F_1,\cdots,F_\tau\}$为 Q 鞅，且对所有的 $t\leqslant\tau$，有 $F_t=E_t^Q(F_\tau)$。

期货合约在许多由基本原理细节决定的实践方法上区别于远期合约。一个对定价目标尤其重要的细节就是重新结算(resettlement)。就理论模型的目的而言，我们可以将重新结算描述如下：对于在时间 τ 的交付 W_τ，期货价格过程 $\Phi=\{\Phi_0,\cdots,\Phi_\tau\}$ 按下述方式进行：在任何时间 t，投资者可以采取 θ 期货合约

的一个头寸，其方法是同意接受在时间 $t+1$ 的再结算支付 $\theta(\Phi_{t+1}, -\Phi_t)$，以及在时间 $t+2$ 的 $\theta(\Phi_{t+2}-\Phi_{t+1})$，直至头寸不再改变(或消失)。这种逐期支付或收取期货价差的过程被称为"盯市"(marking to market)，其在实践中有助于减少潜在违约的可能性或大规模性。正式地讲，所有这些都简单地意味着：期货合约的券息过程 δ 由 $\delta_t=\Phi_t-\Phi_{t-1}(1\leqslant t\leqslant\tau)$ 所定义。

就我们的目的而言，很自然地可以假定交付值 Φ_τ 合约性地等同于 W_τ。(在一个更细致的模型中，我们可以借助于不存在交付套利来等同 Φ_τ 和 W_τ。)

(B)假定 Q 是等价鞅制度，证明对所有的 $t\leqslant\tau$，$\Phi_t=E_t^Q(W_\tau)$。由(A)和(B)可知，在决定性的利率及无套利的条件下，期货和短期价格是一致的。

(C)我们现在假定 W_τ 是具有券息过程 δ 的证券的市场价值 S_τ。假设 δ 和在风险借贷上的贴现过程 $d=\{d_1,\cdots,d_T\}$ 是决定性的。请计算期货和远期价格 Φ_t 和 F_t，并请明确地使用 S_t，d 和 δ。

2.18 给定细节强化以下对命题 2.5 的逆向证明部分的概括：

令 $J=\{(x_1,\cdots,x_T):x\in L\}$ 和 $H=\{(\delta_1^\theta,\cdots,\delta_T^\theta):\theta\in\Theta\}$。当且仅当 $J=H$ 时，市场是完备的。由定理 2.2 可知，当且仅当存在惟一的状态价格缩子 π 使得 $\pi_0=1$ 时，存在惟一的等价鞅测度假设 $H\neq J$。因为 H 是 J 的线性子空间，因此有一些 J 中的非零 y"垂直"于 H，在此意义上对所有 H 中的 h，有 $E(\sum_{t=1}^T y_t h_t)=0$。令 $\hat{\pi}\in L$ 由 $\hat{\pi}_0=1$ 和 $\hat{\pi}_t=\pi_t+\alpha y_t(t\geqslant 1)$ 定义，其中 $\alpha>0$ 是小的足以使 $\hat{\pi}\gg 0$ 的系数。那么，$\hat{\pi}$ 是具有 $\hat{\pi}_0=1$ 的不同的状态价格缩子。这表明若有惟一的具有 $\pi_0=1$ 的价格缩子 π，市场就是完备的。

提示：用

$$(y\mid h)\equiv E\Big(\sum_{t=1}^{T}y_t h_t\Big),\qquad h\in H$$

来定义 H 的内积$(\cdot\mid\cdot)$。(在习题 1.17 的意义上)

2.19 第 2.9 节中推断，如果 W 是 Y 的斯耐尔(Snell)包络，那么，$W_t=\max[Y_t,E_t(W_{t+1})]$。请证明这一自然属性。

2.20 证明引理 2.3。

2.21 考虑在图 2.2 中显示的证券 A 和证券 B 的价格"树"。在"树"的每一节点上，显示了价格对 (P_A,P_B)。其中 P_A 是在此节点上 A 的价格，P_B 是 B 的价格。

(A)请明确地构造概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$，族的过滤$\{\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\}$以及证券价格过程向量 V，以正式地为图中的信息编码。令证券价格是券息累积的，从而使得 V_2 同时是在时间 2 时证券的价格和券息支付向量。在时间 0 和时间 1，没有券息支付。

(B)假定不存在套利。请找出在时间 0 对于资产 B 的美式卖权的价格，其有执行价格 95 并且在时间 2 到期。(记住：这是一种在任何时间都以执行价格 95 卖出 B 的期权。)

(C)假定此卖权在时间 0 的市场价格实际上比你在(B)中得到的无套利价格低 10 个百分点。请明确说明在时间 0 后无现金流的情况下，如何在时间 0 时创造 100 万美元的无风险利润。

(D)假定此卖权在时间 0 的市场价格实际上比你在(B)中得到的无套利价格高 10 个百分点。请明确说明在时间 0 后有非负现金流的情况下，如何在时间 0 时创造 100 万美元的无风险利润。提示：如果你决定卖出此期权，那么，你无需确定那个向你购买期权的人以何种特殊方式行权。

2.22 令 $T=1$ 并假设世界上有三种等权的可能状态 ω_1、ω_2 和 ω_3。其中的一个将在时间 1 被揭示

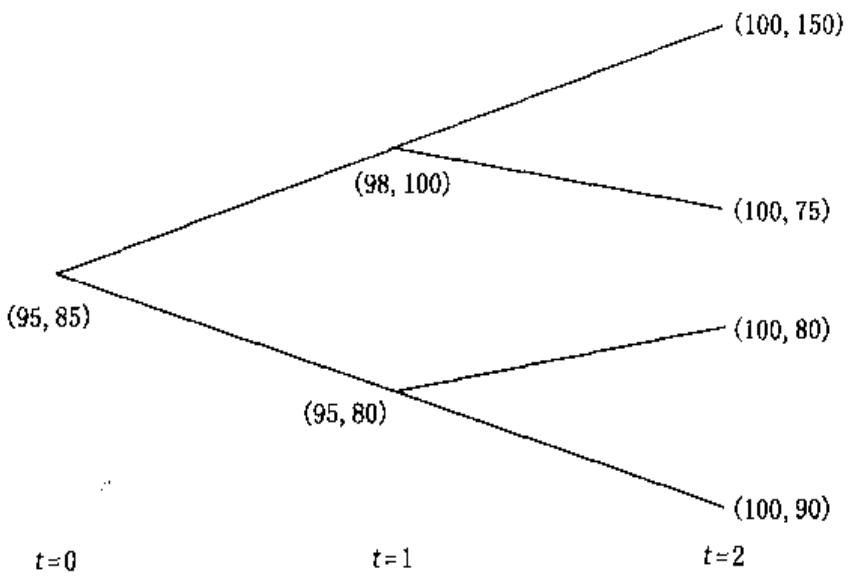


图 2.2 具有价格的事件树

为真。一个特殊的行为人具有效用函数 U 和均衡消费选择 $c_0=25$，以及：

$$c_1(\omega_1)=9, c_1(\omega_2)=16, c_1(\omega_3)=4$$

在以下的情形中，请计算在状态 ω_1 时支付 3，在状态 ω_2 时支付 6，在状态 ω_3 时支付 5 的证券价格，并且展示你的成果。

(A)期望但非时间可加型效用 $U(c_0,c_1)=E[u(c_0,c_1)]$，其中 $u(x,y)=\sqrt{xy}$。

(B)非期望效用 $U(c_0,c_1)=\sqrt{c_0c_1(\omega_1)c_1(\omega_2)c_1(\omega_3)}$。

2.23 为了具体起见，我们将 1 期的长度定为 1 年。有两种基本形式的投资：第一种是无风险借入或贷出，每年有均衡的 1 年短期利率(简单的年利率)25%。(所以，你可以在时间 0 投资 1 并在第 1 年结束时获取 1.25。)在每年结束时，抛掷一枚公平硬币。风险证券的初始市场价值为 0。如果在那年硬币的抛掷结果是正面朝上，那么，此证券的市场价值将在每年结束时上升 1 个单位。如果在那年硬币的抛掷结果是反面朝上，那么，此证券的市场价值将在每年结束时下降一个单位。例如，该无风险证券在第 2 年结束时的价格将分别以概率 0.25、0.50 和 0.25 而分别为−2、0 或+2。

假设有一欧式期权在第 2 年结束时仅以 1 单位数目的执行价格来购买上述风险证券。

(A)假定不存在套利。陈述期权的初始市场价值 q(说明你的理由)。

(B)现在假定期权将实际以 $q/2$ 售出，构造交易策略以生成 1 000 单位数目的净正初始现金流，并且此后再无其他现金流。(陈述在每一种突发情况中的每一时间，卖人或卖出每一证券的数量的详细方法。)

2.24 证明推论 2.2 和推论 2.3。

2.25 (计量标准不变性)考虑券息—价格偶 $(\delta,S)\in L^N\times L^N$ 和缩子 γ。令 $\hat{S}=S\gamma$ 和 $\hat{\delta}=\delta\gamma$ 表示缩小后的价格和券息过程。令 θ 为任意给定交易策略。证明：给定 $(\hat{\delta},\hat{S})$，由 θ 生成的息过程 $\hat{\delta}^\theta$ 和在

(θ,S)下由θ生成的息过程δ^θ通过$\hat{\delta}^\theta=\gamma\delta^\theta$相关联。并证明当且仅当$\theta$是对于$(\hat{\delta},\hat{S})$的套利时，$\theta$是对于$(\delta,S)$的套利。如果$\pi$是对于$(\delta,S)$的状态价格缩子，请借助于$\pi$和$\gamma$来计算对于$(\hat{\delta},\hat{S})$的状态价格缩子$\hat{\pi}$。

注 释

雷德纳(Radner, 1967,1972)最早论述了类似本章的动态均衡模型。麦吉尔和昆兹(Magill and Quinzii, 1996b)专集是非完备市场情形下一般均衡理论的全面纵览。

(第2.1节～第2.2节)不确定性和信息的模型是标准的。不确定性模型与源自德布鲁(Debreu, 1953)的一般均衡模型理论等，都是出现于德布鲁(Debreu, 1959)的第7章。有关金融情形的细节，参见多斯安(Dothan, 1990)。

(第2.3节～第2.4节)第2.3节和第2.7节中有关套利鞅之间的联系来自于哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)中的更一般的模型。基罗特和奥图(Girotto and Ortu, 1996)介绍了在有限维的情形下，无套利和等价鞅存在的一致通用成果。最优化和状态价格成果的精华也可以在哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)中找到。基罗特和奥图(Girotto and Ortu, 1994,1997a,1997b)在有限维的经济情形中彻底地探索了这种等价一致性。

(第2.5节)这一节的精神来自克莱普斯(Kreps, 1982)以及达菲和黄(Duffie and Huang, 1985)。

(第2.6节)此情形下的代表性行为人代表状态定价模型在康斯坦丁尼德斯(Constantinides,1982)中有所论述。库克和贺(Cuoco and He,1992a)把这一概念延伸到非完备市场，这时通常无法得到帕累托最优化。

(第2.7节～第2.8节)这些章节也是基于哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)中的观点。

(第2.9节)本节中的美式证券定价模型非常类似于贝索沙恩(Bensoussan, 1984)和卡拉特查斯(Karatzas, 1988)中对连续时间的处理。他们没有正式将美式证券的定价与无套利联系起来，但使用了一个类似的概念"公平价格"。默顿(Merton, 1973b)最先对如何系统地应用套利方法对美式期权定价提出挑战，并在布莱克—斯科尔斯类型的模式下指出提前执行美式期权是不可取的。美式期权的定价在第3章和第8章中再次予以考虑，在那两章的注释中引用了更多的参考文献。

(第2.10节)默顿(Merton , 1973b)在连续时间的模式下开发出了这些成果。

额外话题 习惯形成效用函数由达恩和辛格尔顿(Dunn and Singleton, 1986)提出，连续时间的形式则由瑞德和希尔(Ryder and Heal,1973)提出。在本章的模式下，把习惯形成效用函数应用到状态定价的研究可在查普曼(Chapman, 1998b)中找到。多种形式的递归效用模型应归功于萨尔登(Selden, 1978)，克莱普斯和波特斯(Kreps and Porteus, 1978)，以及爱普斯坦恩和秦(Epstein and Zin, 1989)。爱普斯坦恩(Epstein, 1992)对此做了综合考察。库普曼斯(Koopmans, 1960)则给出了一些早期的研究成果。递归效用模型允许不确定的更早或更晚揭示(这对可加型效用函数没有影响)偏好。这是一个与诸如罗斯(Ross, 1989)的论述相关的问题，而且已经被思凯达斯(Skiadas, 1998)与杜菲、施洛德和思凯达斯(Duffie, Schroder and Skiadas, 1997)所证明。有关信息提示偏好的更多内容，请参见格拉恩特、卡基和普拉克(Grant, Kajii and Polak, 2000)。对练习2.9中出现的递归效用，用下一时期的效用条件分布函数取代范·诺伊曼—摩根斯坦恩(Von Neumann-Morgenstern)函数h，即可得到更一般形式的递归

效用条件分布函数。范例有马奇那(Machina, 1982)的局部期望效用模型,以及丘(Chew, 1983,1989),德卡尔(Dekel,1989)与古尔和朗特(Gul and Lantto, 1990)的中间状态确定型等价模型。凯恩(Kan, 1995)计算出了此种情形下马尔可夫版本的递归效用所对应的均衡状态价格。有关递归效用函数的更进一步的解释和性质,可参见丘和爱普斯坦恩(Chew and Epstein, 1988),思凯达斯(Skiadas,1998),以及思凯达斯(Skiadas,1997)。对资产定价的应用的更进一步研究,可参见爱普斯坦恩(Epstein, 1988),爱普斯坦恩(Epstein, 1992),爱普斯坦恩和秦(Epstein and Zin, 1999),以及基瓦尼利和维尔(Giovannini and Weil, 1989)。凯恩(Kan, 1993)考察了此种情形下递归效用的效用梯度表述。

习题 2.11 中的存在问题的基本解法由克莱普斯(Kreps,1982)提出,在技术规则性条件下,麦克玛(McManus, 1984),雷普洛(Repullo, 1986),以及麦吉尔和夏弗(Magill and Shafer,1990)证明它适用于"一般的"券息和资源禀赋,给定证券的数量至少是过滤下的张量数Γ(参见习题 2.11)。加克浦欧斯(Geanakoplos, 1990)对此类文献作了详细的回顾和评论。有关更一般情形下张量数的定义和连续时间版本的类似内容,请参见达菲和黄(Duffie and Huang, 1985)。达菲和夏弗(Duffie and Shafer, 1985, 1986b)给出了非完备市场中均衡存在的一般性,哈特(Hart, 1975)则举出反例。布塔兹(Bottazzi, 1995)则给出了这一成果在单期多物品形式下更高级的版本。读者也可参见沃恩(Won, 1996a,1996b)。相关的存在性课题研究有布塔兹和海恩斯(Bottazzi and Hens, 1996),海恩斯(Hens,1991)与周(Zhou, 1997b)。海洛特(Henrotte, 1994)和本田(Honda, 1992)证明了在模型的暂时均衡变异下,散布的期望可导致均衡的存在。二期模型的其他证明可参见加克浦欧斯和夏弗(Geanakoplos and Shafer, 1990),希瑞斯乔、麦吉尔和马斯科勒(Hirsch, Magill, and Mas-Colell, 1990) 与哈塞尼、拉斯瑞和麦吉尔(Husseini, Lasry and Magill,1990)。T 期模型则参见弗罗瑞查诺和高德尔(Florenzano and Gourdel, 1994)。如果券息以名义形式定义,而不是依据消费品的单位数,那么,在关于偏好和资源禀赋的标准技术条件下,均衡总是存在的。正像卡斯(Cass, 1984),沃纳(Werner, 1985),达菲(Duffie,1987)以及格塔瑞德和海恩斯(Gottardi and Hens,1996) 所展现的那样。尽管此时均衡可能是不确定的,正如卡斯(Cass, 1989) 以及加克浦欧斯和马斯科勒(Geanakoplos and Mas-Colell, 1989)所论述的那样。关于这一点,还请参见凯德兰和普莱斯克特(Kydland and Prescott, 1991),马斯科勒(Mas-Colell, 1991),以及卡斯(Cass, 1991)。同样,我们有单期限模型的均衡存在,给定证券的收益为某种单一物质(本书大部分内容的框架),正像蔡(Chae, 1988) 以及加克浦欧斯和普洛马查克斯(Geanakoplos and Polemarchakis, 1986)所展现的那样。非完备市场情形下一般均衡模型的全面考察可参见卡斯(Cass, 1991),达菲(Duffie, 1992),加克浦欧斯(Geanakoplos, 1990),麦吉尔和昆兹(Magill and Quinzii,1996b),以及麦吉尔和夏弗(Magill and Shafer,1991)。在存在依据价格而定的期权条件下,均衡的存在可以变得更有问题,就像普洛马查克斯和顾(Polemarchakis and Ku, 1990)所说明的那样,但其变型在很多情况下是有解存在的,就像黄和吴(Huang and Wu, 1994)以及克拉沙和沃纳(Krasa and Werner, 1991)所论述的那样。迪特姆普勒和萨尔登(Detemple and Selden, 1991)考察期权在非完备市场一般均衡模型下对资产定价的意义。巴乔克斯—贝斯莱罗和罗切特(Bajeux-Besnainou and Rochet, 1996)考察了期权的动态张量意义。伯克和尤利格(Berk and Uhlig, 1993)给出了此种情形下信息时间的重要性。辛迪和黄(Hindy and Huang, 1993b)展现了线性抵押物约束对证券定价的意义。哈拉(Hara, 1993)探讨了交易费用条件下"富余"证券的作用。

哈恩(Hahn,1994,1999)提出了关于完备市场和效率可能性的一些哲学问题。非完备市场均衡消

费配置的帕累托非有效性，以及受约束效率的概念，在下述的参考文献均有所论述：哈特(Hart，1975)，克莱普斯(Kreps，1979)(以及其中的参考文献)，斯坦纳、卡基和维拉纳希(Citanna，Kajii and Villanacci，1994)，斯坦纳和维拉纳希(Citanna and Villanacci，1993)，以及潘(Pan，1993，1995)。

此情形下非完备市场中个别组合和消费选择的最优性在贺和佩吉(He and Pages，1993)中有着双重解释[基罗特和奥图(Girotto and Ortu，1994)提供相关的批注]。非完备市场均衡的计算方法由下列文献资料开发出来：布朗、德马兹奥和伊威斯(Brown，DeMarzo and Eaves，1996a)，布朗、德马兹奥和伊威斯(Brown，DeMarzo and Eaves，1996b)，以及德马兹奥和伊威斯(DeMarzo and Eaves，1996)。读者也可参见本书第12章的附注。

克劳斯和林特博格(Kraus and Litzenberger，1975)以及史丹普尔登和萨博拉曼耶姆(Stapleton and Subrahmanyam，1978)给出了均衡的参数例子。哈恩森和理查德(Hansen and Richard，1987)探索了更一般情形下的多期状态价格贝塔模型。罗斯(Ross，1987)和普莱斯曼(Prisman，1985)展示了税收和交易成本对状态定价模型的影响。哈拉(Hara，1993)讨论了有交易成本情形下"富余"证券的作用。习题2.6中的基于消费的CAPM可在鲁宾斯坦因(Rubinstein，1976)中以略微不同的形式找到。习题2.15中的总量成果是基于鲁宾斯坦因(Rubinstein，1974a)。鲁宾斯坦因(Rubinstein，1974b)中有本章模式下资产定价成果的详细处理。鲁宾斯坦因(Rubinstein，1987)是该情形下衍生资产定价的非常有用的表述性处理。

科克斯、罗斯和鲁宾斯坦因(Cox，Ross and Rubinstein，1979)发展了习题2.1中已分析过的多期二项期权定价模型，在第12章中又进一步针对布莱克-斯科尔斯公式的收敛性进行了分析。达菲和夏弗(Duffie and Shafer，1986a)与奈克(Naik，1994)考虑生产的规则。此情形下的莫迪格利尼-米勒定理在下述文献中予以重新考虑：德马兹奥(DeMarzo，1988)，达菲和夏弗(Duffie and Shafer，1986a)，以及格塔瑞德(Gottardi，1995)。

3.

动态规划法

本章将阐述动态规划框架下的证券组合选择和资产定价理论。这里的动态规划法是递归结构下求解动态最优化问题的一种技术。有关资产定价方面的含义并没有比前一章多出很多，但本章的方法有计算方面的优势。在介绍确定情形下的动态规划思想后，我们将回顾有限马尔可夫链的一些基本知识。研究表明，贝尔曼方程概括了马尔可夫模式下的最优性。其一阶条件(常被称为"随机欧拉方程")已经被证明概括了证券的均衡价格。这在本章的主体中是通过可加型效用函数来实现的，并在习题中被推广到更一般的递归形式的效用函数。本章的最后几节阐述了马尔可夫模式下无套利衍生证券价值的计算，包括贝尔曼方程在美式证券(诸如美式卖出期权)定价中的最佳停止应用问题。最后，通过一个习题来介绍简单"二项"模式下期限结构衍生证券的数值解算法。

3.1 贝尔曼法

为了突出最基本的思想，在上一章 T 期的框架下，我们首先只允许证券以短期无风险证券的形式出现。在时间 t，无风险借贷贴现折扣为 $d_t>0$。假设给定行为人的资源禀赋过程为 e，再给定消费过程 c，那么，行为人的财富过程 W^c 可方便地定义为 $W_0^c=0$ 和

$$W_t^c=\frac{W_{t-1}^c+e_{t-1}-c_{t-1}}{d_{t-1}},\quad t\geqslant 1 \tag{3.1}$$

若给定效用函数 $U: L_+\to\mathbb{R}$[定义域为非负适应过程的集合(L)]，那么，行为人的优化问题可以被写成：

$$\sup_{c\in L_+} U(c) \qquad \text{根据约束(3.1)式和 } c_T\leqslant W_T^c+e_T \tag{3.2}$$

动态规划法只对某些类型的效用函数才显得有效。这种特殊类型的效用函数的一个例子就是可加型效用函数 U，它被定义为：

$$U(c)=E\Big[\sum_{t=0}^{T}u_t(c_t)\Big] \tag{3.3}$$

其中 $u_t:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，严格递增且对每个 t 均连续。给定这样的效用函数，在任意时间 t，很自然地应考虑如何在假定当期财富 $W_t^c=w$ 给定的情况下，使(以后)"留下的效用"最大化。为了使事情在最初就变得简单，我们先考虑没有不确定性的情形，即对所有的 t，$\mathcal{F}_t=\{\Omega,\emptyset\}$，其中 $\emptyset$ 表示空集。在任意时间 t，对任意 $\omega\in\mathbb{R}$，最大余留效用可以写成：

$$V_t(\omega)=\sup_{c\in L_+}\sum_{s=t}^{T}u_s(c_s)$$

上式的约束为 $W_t^c=w$，财富动态关系(3.1)，以及 $c_T\leqslant W_T^c+e_T$。如果不存在预算可行的消费选择(如果 w 过份地为负)，那么，我们记 $V_t(w)=-\infty$。

显然，$V_T(w)=u_T(w+e_T)$ 对所有 $w\geqslant -e_T$ 成立，并且可以证明(作为习题完成)对 $t<T$，有：

$$V_t(w)=\sup_{\bar{c}\in\mathbb{R}_+}u_t(\bar{c})+V_{t+1}\left(\frac{w+e_t-\bar{c}}{d_t}\right) \tag{3.4}$$

这就是所谓的贝尔曼(Bellman)方程。对任意时间 $t<T$ 和任意(3.4)式均有解的 w，令 $C_t(w)$ 表示该解，并令 $C_T(w)=w+e_T$。可以证明(也被作为习题完成)最佳消费策略被定义为 $c_t=C_t(W_t^c)$。根据(3.4)式，价值函数 V_{t+1} 汇聚了在时间 t 进行选择所需要的关于该问题未来的所有信息。

3.2 一阶贝尔曼条件

在本节中，我们采纳可加型效用函数(3.3)，并且假设对任意 t，u_t 为严格凹性并在 $(0,\infty)$ 上可微。根据习题 2.2，存在最佳消费方案 c^*。我们假设 c^* 严格为正，并且令 W^* 表示与 c^* 相应的财富过程[参见(3.1)式]。

引理 3.1 对任意时间 t，V_t 为严格凹性并在 W_t^* 处连续可微，而且 $V_t'(W_t^*)=u_t'(c_t^*)$。

该引理的证明被留作习题 3.4 来完成，在那里将配有简要的提示。因此，贝尔曼方程(3.4)的一阶条件告诉我们，对 $t<T$，单期的贴现折扣为：

$$d_t=\frac{u_{t+1}'(c_{t+1}^*)}{u_t'(c_t^*)} \tag{3.5}$$

同样的方程也很容易从均衡证券价格[参见(2.9)式]的一般特征概括中推出。更一般地，一个在时间 $\tau>t$ 到期的无风险债券的价格 $\Lambda_{t,\tau}$ 在时间 t 为：

$$\Lambda_{t,\tau}\equiv d_t d_{t+1}\cdots d_{\tau-1}=\frac{u_\tau'(c_\tau^*)}{u_t'(c_t^*)} \tag{3.6}$$

很显然，这一价格就是两期之间的消费边际替代率。

在此种决定型的情形下，任意证券价格可以根据该零息债券的价格$\{\Lambda_{t,\tau}\}$计算出来。

3.3 马尔可夫不确定性

我们先来看最简单的马尔可夫不确定性：时间均性马尔可夫链。把固定集$Z=\{1,\cdots,k\}$中的元素称为冲击。对任意冲击i和j，令$q_{ij}\in[0,1]$表示在任意时间t，若假定冲击i发生在时间t，那么，冲击j被认为将发生在时间$t+1$的概率。当然，对任意i，$q_{i1}+\cdots+q_{ik}=1$。这样，$k\times k$过渡矩阵q就是过渡概率的一个完全特征概括。通过构造概率空间和族集过滤，这一观点可以得到正规的表述。我们足以把世界的状态看做是可能发生的冲击序列$(z_0,\cdots,z_T)$。因此，我们令$\Omega=Z^{T+1}$，并令$\mathcal{F}$为Ω的所有子集的集合。对任意时间t，令$X_t:\Omega\to Z$(时间t时的随机冲击)为由$X_t(z_0,\cdots,z_T)=z_t$定义的随机变量。最后，对Z中任意可能的初始状态i，令P_i为由下述两条件惟一定义的(Ω,F)上的概率测度：

$$P_i(X_0=i)=1 \tag{3.7}$$

以及对所有的$t<T$，

$$P_i[X(t+1)=j\,|\,X(0),X(1),X(2),\cdots,X(t)]=q_{X(t),j} \tag{3.8}$$

(3.7)式和(3.8)式的意思是，在P_i的概率测度下，X以概率1从i处开始，然后具有如前所述的过渡概率测定。特别地，(3.8)式意味着，$X=\{X_0,\cdots,X_T\}$是马尔可夫过程：给定$X_0,\cdots,X_t,X_{t+1}$的条件分布只决定于X_t。为了使描述显得更正规，对任意t，我们令$\mathcal{F}_t$为$\{X_0,\cdots,X_t\}$所生的族集，这表明时间t时所能提供的信息是通过观测直到时间t的冲击过程X所得到的。下面的定理全面地描述了马尔可夫特性。

引理 3.2 对任意时间t，令$f:Z^{T-t+1}\to\mathbb{R}$为任意函数，那么，就存在固定函数$g:Z\to\mathbb{R}$使得对Z中的任意i有：

$$E^i[f(X_t,\cdots,X_T)\,|\,\mathcal{F}_t]=E^i[f(X_t,\cdots,X_T)\,|\,X_t]=g(X_t)$$

其中E^i表示在P_i概率测度下所进行的期望运算。

3.4 马尔可夫资产定价

假定马尔可夫不确定性如第3.3节中所描述的那样，我们现在来考虑单个或具有代表性的行为人具有(3.3)式情形下的可加型效用函数的资产定价问题。在(3.3)式中，对所有的t，u_t在$(0,\infty)$上具有严格正的连续导数。再假设，对任意时间t，存在函数$f_t:Z$

$\to \mathbb{R}^N$ 和 $g_t: Z \to \mathbb{R}$ 使得券息为 $\delta_t = f_t(X_t)$ 和资源禀赋为 $e_t = g_t(X_t)$。引理 3.2 和均衡证券价格的一般梯度解(2.9)式意味着均衡证券价格过程 S 具有下述特征：对任意时间 t，存在函数 $\mathcal{S}_t: Z \to \mathbb{R}^N$ 使得 $S_t = \mathcal{S}_t(X_t)$。具体来说，对任意初始冲击 i 和任意时间 $t < T$，有：

$$\mathcal{S}_t(X_t) = \frac{1}{\pi_t} E^t(\pi_{t+1}[f_{t+1}(X_{t+1}) + \mathcal{S}_{t+1}(X_{t+1})] \mid X_t) \tag{3.9}$$

式中，π 是状态价格缩子，$\pi_t = u'_t[g_t(X_t)]$。这被称为证券价格的随机欧拉方程。

3.5 马尔可夫控制下的证券定价

在更强的条件下，我们应用马尔可夫动态规划法再次证明(3.9)式。假设 X 是已经描述的冲击过程。为了使问题简化，本节中我们假设过渡矩阵 q 严格为正，而且对所有的 t，有：

- u_t 连续，严格为凹性，递增且在 $(0, \infty)$ 上可微；
- 对 $g_t: Z \to \mathbb{R}_{++}$，有 $e_t = g_t(X_t)$；
- 对 $f_t: Z \to \mathbb{R}^N_{++}$，有 $\delta_t = f_t(X_t)$。

我们假定 $\mathcal{S}_t: Z \to \mathbb{R}^N_{++}$，$t < T$，而且不存在套利。我们令 Θ 表示交易策略空间，L_+ 表示非负消费适应过程。对任意 $t \leqslant T$，考虑由下式定义的价值函数 $V_t: Z \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：

$$V_t(i, w) = \sup_{(c,\theta) \in L_+ \times \Theta} E\Big[\sum_{j=t}^{T} u_j(c_j) \mid X_t = i\Big] \tag{3.10}$$

并且受约束于：

$$W_j^\theta = \theta_{j-1} \cdot [\mathcal{S}_j(X_j) + f_j(X_j)], \quad j > t; \quad W_t^\theta = w \tag{3.11}$$

和

$$c_j + \theta_j \cdot \mathcal{S}_j(X_j) \leqslant W_j^\theta + g_j(X_j), t \leqslant j \leqslant T$$

而且，给定当期状态 X_t，我们可以把 $V_t(X_t, \cdot)$ 看成时间 t 时财富的间接效用函数。根据引理 3.2，(3.10)式中的条件期望并不取决于初始的状态 X_0，因而在该种类型的表达式中，我们干脆忽略了初始状态。对足够负的 w 而言，不存在对(3.10)式可行的 (θ, c)，在这种情况下，我们记 $V_t(i, w) = -\infty$。对初始财富 $w = 0$ 和时间 $t = 0$，(3.10)式等同于对任意时间 j 有 $S_j = \mathcal{S}_j(X_j)$ 的(2.4)式。

我们现在定义从 $Z \times \mathbb{R}$ 到 $\bar{\mathbb{R}}$ 的函数序列 $F_0, \cdots, F_T$，然后再说明它们正好是价值函数 $V_0, \cdots, V_t$。我们先定义 $F_{T+1} \equiv 0$。对 $t \leqslant T$，我们用递归法根据贝尔曼方程定义：

$$F_t(i, w) = \sup_{(\bar{\theta}, \bar{c}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} G_t(\bar{\theta}, \bar{c}) \text{满足约束} \ \bar{c} + \bar{\theta} \cdot \mathcal{S}_t(i) \leqslant w + g_t(i) \tag{3.12}$$

其中

$$G_u(\bar{\theta},\bar{c})=u_t(\bar{c})+E[F_{t+1}(X_{t+1},\theta\cdot[\mathcal{S}_{t+1}x_{t+1}+f_{t+1}(X_{t+1})])|X_t=i]$$

下面的命题是引理 3.1 的推广，其证明过程也与引理 3.1 基本一致。

命题 3.1 对任意 $i\in Z$ 和 $t\leqslant T$，限制函数 $F_t(i,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的自变量 w 在有限域即 $w\in\{w:F_t(i,w)>-\infty\}$ 内，那么，该函数为严格凹性和递增的。如果 $(\bar{c},\bar{\theta})$ 是(3.12)式的解，而且 $\bar{c}>0$，那么 $F_t(i,\cdot)$ 在 w 处连续可微，其导数 $F_{tw}(i,w)=u_t'(\bar{c})$。

作为习题，可以证明，除非约束(3.12)式不可行，否则(3.12)式总是有解。在这种解总是存在的情况下，对任意 i、t 和 w，令 $[\Phi_t(i,w),C_t(i,w)]$ 表示一个解，那么，我们可以用递归法定义相关的财富过程 W^*：对任意初始的条件 w，有 $W_0^*=w$，和

$$W_t^*=\Phi_{t-1}(X_{t-1},W_{t-1}^*)\cdot[\mathcal{S}_t(X_t)+f_t(X_t)],\quad t\geqslant 1$$

在任意时间 t，令 (c^*,θ^*) 由下述公式定义：$c_t^*=C_t(X_t,W_t^*)$ 和 $\theta_t^*=\Phi_t(X_t,W_t^*)$。

对 $t=0$，(c^*,θ^*) 是(3.10)式的解这一事实可以由以下得证：令 (c,θ) 为任意可行的方案。对任意时间 t，由贝尔曼方程(3.12)式可得：

$$F_t(X_t,W_t^\theta)\geqslant u_t(c_t)+E[F_{t+1}(X_{t+1},\theta_t\cdot[\mathcal{S}_{t+1}(X_{t+1})+f_{t+1}(X_{t+1})])|X_t]$$

重新安排上述不等式，并应用重复期望法则，有：

$$E[F_t(X_t,W_t^\theta)]-E[F_{t+1}(X_{t+1},W_{t+1}^\theta)]\geqslant E[u_t(c_t)] \tag{3.13}$$

把(3.13)式从 $t=0$ 到 $t=T$ 加起来，有 $F_0(X_0,W_0)\geqslant U(c)$。对特别的方案 $(c,\theta)=(c^*,\theta^*)$ 再重复以上计算，就允许我们把不等式(3.13)变成等式，从而有 $F_0(X_0,W_0)=U(c^*)$。这表明，对任何可行的 (θ,c)，有 $U(c^*)\geqslant U(c)$，这意味着 (θ^*,c^*) 确实是当 $t=0$ 时(3.10)式的解。最佳方案因而可以根据函数 C_t 和 φ_t，$t\leqslant T$，以反馈方案的形式概括。我们也知道，对所有的 $t\leqslant T$，$F_t=V_t$，所以 V_t 具有由上述命题给出的所有 F 的性质。

我们现在可以直接从(3.12)式的一阶条件得到随机欧拉方程(3.9)式，而不需要从第 2 章中有关 U 的梯度基础上发展出的更一般的一阶导数条件出发。

定理 3.1 假定 c^* 是严格为正的消费过程，以及 θ^* 是使得 $c_t^*=W_t^{\theta^*}+e_t-\theta_t^*\cdot S_t$ 的交易策略。那么，当且仅当对所有的 $t<T$，有：

$$\mathcal{S}_t(X_t)=\frac{1}{u_t'(c_t^*)}E[u_{t+1}'(c_{t+1}^*)[\mathcal{S}_{t+1}(X_{t+1})+f_{t+1}(X_{t+1})]|X_t]$$

时，(c^*,θ^*) 是当 $t=0$ 时(3.10)式的解。

根据(3.12)式一阶条件的充分性和必要性，以及命题 3.1 所得的事实：

$$F_{t+1,w}(X_{t+1},W_{t+1}^*)=u_{t+1}'(c_{t+1}^*) \tag{3.14}$$

即可得到上述定理。

在单个行为人的模型中，我们定义证券价格函数序列 $\{\mathcal{S}_0,\cdots,\mathcal{S}_T\}$ 为单一行为人均衡：如果对 $t=0$，$w=0$ 以及任意初始冲击 i，$(e,0)$(无交易)是(3.10)式的解。

推论 3.1 $\{\mathscr{C}_1,\cdots,\mathscr{C}_T\}$是单一行为人均衡，当且仅当 $\mathscr{C}_T=0$ 和对所有的 $t<T$，$c^*=e$ 满足随机欧拉方程(3.9)。

3.6 马尔可夫无套利定价

继续考虑第 3.3 节中所描述的马尔可夫不确定性情形，但不假设有任何特别的最优化性或均衡。假设在任意时间 t，证券价格和券息由从 Z 到 $\mathbb{R}^N$ 的函数 $\mathscr{S}_t$ 和 f_t 给出。我们再假定，状态价格缩子 π 由函数 $\pi_t=\psi_t(X_t)$给出，ψ_t 为函数 $\psi_t: Z\to(0,\infty)$。那么，我们对 $0<t\leqslant T$，有：

$$\mathscr{S}_{t-1}(X_{t-1})=\frac{1}{\psi_{t-1}(X_{t-1})}E(\psi_t(X_t)[f_t(X_t)+\mathscr{S}_t(X_t)]\,|\,X_{t-1}) \tag{3.15}$$

例如，在第 3.5 节中的特殊情形下，(3.9)式告诉我们 $\psi_t(i)=u_t'[g(i)]$。

由于对整数 k，有 $Z=\{1,\cdots,k\}$，我们现在混用记号，把诸如 $\psi_t: Z\to\mathbb{R}$ 的任何函数都处理成 $\mathbb{R}^k$ 中的向量 ψ_t，将其第 i 个元素处理成 $\psi_t(i)$。同样，$\mathscr{S}_t$ 可以被处理成 $k\times N$ 矩阵，等等。在这种意义上，(3.15)式可以被写成：

$$\mathscr{S}_{t-1}=\Pi_{t-1}(f_t+\mathscr{S}_t) \tag{3.16}$$

式中，Π_{t-1}是 $k\times k$ 矩阵，其(i,j)元素为 $q_{ij}\psi_t(j)/\psi_{t-1}(i)$。对时间 t 和 $s>t$，我们令 $\Pi_{t,s}=\Pi_t\Pi_{t+1}\cdots\Pi_{s-1}$，那么，对时间 t 和 $\tau>t$，(3.16)式便等价于：

$$\mathscr{S}_t=\Pi_{t,\tau}\mathscr{S}_\tau+\sum_{s=t+1}^{\tau}\Pi_{t,s}f_s \tag{3.17}$$

作为一个例子，考虑习题 2.1 中的“二项”模型。我们可以令 $Z=\{0,1,\cdots,T\}$，那么，冲击 i 可以理解成：到目前为止，股票上涨了 i 次。图 3.1 所描述的就是 $T=6$ 的情形。

根据习题 2.1 的计算，显然对任意时间 t，我们可以选择 $\Pi_t=\Pi$，其中：

$$\begin{aligned}\Pi_{ij}&=\frac{p}{R},j=i+1\\&=\frac{1-p}{R},j=i\\&=0\qquad\text{其他情况}\end{aligned}$$

式中，$p=(R-D)/(U-D)$，其中 R、U、D 为常数，且 $0<D<R<U$。对任意给定的股票价格 x 和任意 $i\in Z$，习题 2.1 中的股票价格过程 S，在时间 t 确实可以被描述成：$\mathscr{S}_t: Z\to\mathbb{R}$，且 $\mathscr{S}_t(i)=xU^iD^{t-i}$。

注意，执行价格为 K，到期时间为 τ 的欧式看涨期权可以被看成这样一种证券，该证券只能在时间为 τ 时有股息，并由下述函数给出：$g: Z\to\mathbb{R}$，而且 $g(i)=[\mathscr{S}_\tau(i)-K]^+$。

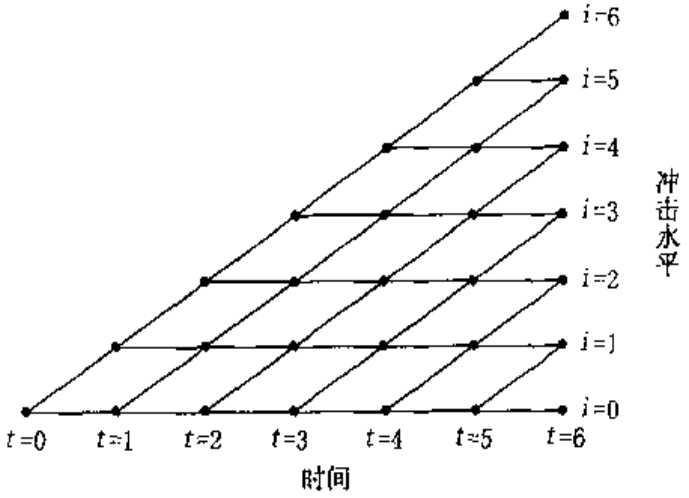


图 3.1 二项树

这样，我们就可以重新得到“二项”期权定价公式(2.16)。从(3.17)式可知，在时间 t，无套利的期权价值为 $C_t=\Pi^{T-t}g$，其中 Π^t 表示 Π 的 t 次方函数。这一定价公式同样也可以应用于只在时间 τ 时具有付息特性且付息函数为 $g:Z\to\mathbb{R}$ 的任何证券。

3.7 提前履约和最佳停止

在第 3.6 节中的一般马尔可夫情形中，考虑由收入函数 $g_t:Z\to\mathbb{R}_+(t\in\{0,\cdots,T\})$ 定义的美式证券。如同第 2.9 节中所解释的那样，该证券是对股息 $g_\tau(X_\tau)$ 的认领权，其中 τ 为持有该证券的任意停止时间。假定该证券在时间 $\bar{\tau}$ 到期则被处理成当 $t>\bar{\tau}$ 时，令 g_t 等于零。给定状态价格缩子 π 由 $\pi_t=\psi_t(X_t)$ 定义，那么，如同上一节中所描绘的一样，具有初始冲击 i 的该美式证券的理性履约问题(2.13)，由下式给出：

$$J_0(i)\equiv\max_{\tau\in\mathcal{T}}\frac{1}{\psi_0(i)}E^i[\psi_\tau(X_\tau)g(X_\tau)] \tag{3.18}$$

式中 $\mathcal{T}$ 是界限为 T 的停止时间集。如同第 2.9 节中所解释的那样，如果该美式证券是富余的且不存在套利，那么，$J_0(i)$ 则为在时间 0 并给定初始冲击 i 下，该美式证券的含息价值。(3.18)式的贝尔曼方程为：

$$J_t(X_t)\equiv\max\left(g_t(X_t),\frac{1}{\psi_t(X_t)}E[\psi_{t+1}(X_{t+1})J_{t+1}(X_{t+1})\mid X_t]\right) \tag{3.19}$$

可以证明，J_0 确实是通过(3.19)式以及 $J_T=g_T$ 从时间 T 向后推导出来。而且，就像第 2.9 节中所揭示的那样，(3.18)式由下述停止时间解出：

$$\tau^*=\min\{t:J_t(X_t)=g_t(X_t)\} \tag{3.20}$$

在第1章中，我们是把 J_t 处理成 $\mathbb{R}^k$ 中的向量，这样，贝尔曼方程(3.19)就可以被改写成以下形式：

$$J_t=\max(g_t,\Pi_t J_{t-1}) \tag{3.21}$$

式中，对任意 $\mathbb{R}^k$ 中的 x 和 y，$\max(x,y)$ 表示第 i 个元素为 $\max(x_i,y_i)$ 的 $\mathbb{R}^k$ 中的向量。

贝尔曼方程(3.21)可以为习题2.1中的美式看跌期权提供一个简单的递归解算法。给定到期时间 $\bar{\tau}<T$ 和履约价格 K，我们有 $J_{\tau+1}=0$ 和

$$J_t=\max[(K-\mathcal{S}_t)^+,\Pi J_{t+1}],t\leqslant\tau \tag{3.22}$$

更明确地说，对任意 t 和 $i\leqslant t$，

$$J_t(i)=\max\left([K-\mathcal{S}_t(i)]^+,\frac{pJ_{t+1}(i+1)+(1-p)J_{t+1}(i)}{R}\right) \tag{3.23}$$

式中 $\mathcal{S}_t(i)=xU^iD^{t-i}$，$p=(R-D)/(U-D)$。这里 R、U、D 为常数，且 $0<D<R<U$。

更一般地，考虑由其券息函数 $h_0,\cdots,h_T$ 和履约收入函数 $g_0,\cdots,g_T$ 定义的美式证券。对给定的到期时间 $\bar{\tau}$，我们有 $h_t=g_t=0,t>\bar{\tau}$。该证券的持有人若选择停止时间 τ，那么，在此时履约的结果是产生券息过程 δ^τ：

$$\begin{aligned}\delta_t^\tau&=h_t(X_t),t<\tau\\&=g_t(X_t),t=\tau\\&=0,t>\tau\end{aligned}$$

假设对任意履约方针 τ，δ^τ 是富余的，那么，该证券的无套利含息价值可由 $J_{\tau+1}=0$ 以及(3.21)式的延伸：

$$J_t=\max(g_t,h_t+\Pi_t J_{t+1}) \tag{3.24}$$

通过递归法定义。

习 题

3.1 假设习题2.1中推导出的价格过程 S 为经典二项分布的模型。在任意时间 t，标的证券在时间 t 的价格 $S(t)$ 由 $S(t)=S(t-1)H(t)$ 决定，其中 $H(t)$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 空间中的随机变量，该随机变量的可能结果为 U 和 D，每种结果发生的概率严格为正。过滤 $\{\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1,\cdots,\mathcal{F}_T\}$ 由收益过程 H 产生。单期的利率由无风险投资的不变单期回报率 $R>1$ 代表。我们假设 $U>R>D>0$，以及 $S_0>0$。在时间 T 之前，没有支付任何股息。

(A)考虑下面的可取消买权，这是由协议方A和B之间签订的一个协议。当任意偶数期时，A方有权从B方以固定价格 K 购买标的资产。奇数期时，B方则可以支付A方固定的费用 F，从而取消签订的协议。协议从时间为0时开始生效，时间 T 时失效，其中 T 为偶数。在时间为0时，由A方向B方支付C数量的计价单位而使协议生效。在时间为0时，A方向B方支付款项C后，A方可以要求立即执行买权。A方和B方在任何时候均有权转让其协议权利(或责任)给第三方，承担责任或权利的第三方可以因此而得到支付或进行支付。承担责任或权利的一方还有权继续转让他们的权利或责任，并且如此继续下去。假设这一可取消的买权市场中不存在套利，并且A方和B方的消费过程(非负适应过程)有

严格递增的效用函数。A 方会在最后可能的日期 T 之前以严格正的概率执行其买权吗？如果是，请给出证明。如果不是，也请给出证明。例如，可以用举反例的形式来证明。然后，再给出该可取消期权初始定价的一个算法，即给出计算该可取消期权的初始价格 U_0 的简易计算方法。证明：如果在时间为 0 时，该可取消期权的交易价格如果不是应用你的算法所得出的价格，那么就存在套利。如果套利要求购买或出卖该期权，那么，就不要假设协议对方会"理性地"履行他的权力。

(B)现在考虑一种美式卖权，即以确定价格 K，在 T 或 T 之前的任何时候卖出具有价格过程 S 的标的证券的权力。不过也有下述例外：我们将强制执行常见的股票交易所规则"下跌中不许卖"，但这仅就执行期权的目的而言。也就是说，在任意时间 t，如果 $S_t<S_{t-1}$，那么，就不容许你在该时刻执行期权所赋予的权力，即以价格 K 卖出标的证券。(标的证券本身则可以像通常一样，在任何时候无限制地交易。)具体来说，这就意味着即使该期权在时间 T 是有实值的，如果该期权在时间 T 之前没有被执行，而且 $S_T<S_{T-1}$，那么，期权会无价值地失效。请给出计算此种特别卖出期权的无套利的初始价格 U_0 的简便方法。你可以假设"$S_0>S_{-1}$"，因而在时间 0 时行权是可能的。证明：如果在时间 0 时，期权并非以你的计算方法决定的某些初始价格交易，则会存在套利。如果套利要求售出期权，则不必假定期权买入者会"理性"地行权。

3.2 证明贝尔曼方程(3.4)。

3.3 对任意 t 和任意 w 存在某个可行的政策，令 $C_t(w)$ 是(3.4)式的解。令 W^* 由(3.1)式给出，且有 $c_{t-1}=C_{t-1}(W^*_{t-1})$，$t>0$。证明最佳政策 c^* 由 $c^*_t=C_t(W^*_t)$，$t<T$ 和 $c^*_T=e_T+W^*_T$ 给出。

3.4 证明引理 3.1。提示：如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是凹性的，那么对任意 x，存在 β 使得对所有的 y，有 $\beta(x-y)\leqslant f(x)-f(y)$。如果 f 也在 x 处可微，那么 $\beta=f'(x)$。如果 f 是可微的且严格为凹性，那么 f 连续可微。令 $w^*=W^*_t$。如果 $c^*_t>0$，那么，存在区间 $I=(\underline{w},\overline{w})\subset\mathbb{R}$ 且 $w^*\in I$，使得 $v:I\to\mathbb{R}$ 由下式给出：

$$v(w)=u_t(c^*_t+w-w^*)+V_{t-1}(W^*_{t+1})$$

现在，运用 v 的可微性和导数的定义，以及对所有 $w\in I$ 有 $v(w)\leqslant V_t(w)$ 的事实，就可以证明该引理。

3.5 证明方程(3.9)。

3.6 证明命题 3.1。

3.7 证明定理 3.1 及其推论 3.1。

3.8 考虑证券供给为正的情形，并且不失一般性，假设每个证券的供给为 1。那么，第 3.5 节中的均衡可由此重新给出定义：$\{\mathcal{S}_1,\cdots,\mathcal{S}_T\}$ 为一个均衡，如果 (c^*,θ^*) 在 $t=0$ 和 $w=\mathbf{1}\cdot[\mathcal{S}_0(X_0)+f_0(X_0)]$ 是(3.10)式的解，其中 $\mathbf{1}=(1,\cdots,1)$，以及对所有的 t，$\theta^*_t=\mathbf{1}$ 和 $c^*_t=g_t(X_t)+\mathbf{1}\cdot f_t(X_t)$。请给出能够概括此种情况下的均衡特征的新版本的随机欧拉方程(3.9)。

3.9 (递归效用函数修改版)该习题的目的是要把本章的基本成果推广到能导出可加型效用函数的递归效用函数的情形。此时我们不再像以往那样假设下述形式的典型可加型效用函数 U：

$$U(c)=E\Big[\sum_{t=0}^{T}\rho^t u(c_t)\Big] \tag{3.25}$$

而是采用更一般的由 $U(c)=Y_0$ 给出的效用的递归定义，其中 Y 是按下式定义的过程：$Y_{T+1}=0$ 和对任意 $t\leqslant T$，

$$Y_t=J(c_t,E_t[h(Y_{t+1})]) \tag{3.26}$$

其中 $J:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。这是在习题 2.9 中处理过的递归效用函数的特殊情形。(甚至在

更一般的递归效用函数模型中，范·诺伊曼—摩根斯坦恩(von Neumann-Morgenstern)标准$E[h(\cdot)]$被某个通用分布函数所取代，但是我们这里不再研究这种更进一步的推广。)特别情形$J(q,v)=u(q)+\rho v$和$h(y)=y$给出了我们所需要的可加型标准(3.25)。传统的可加型效用函数的不足之处在于跨期替代弹性(按确定型模式测量)和相对风险厌恶是彼此互相确定的。但是，这里给出的递归标准却允许我们考察变化的风险厌恶的影响，与此同时，我们固定效用函数的跨期替代弹性(按确定型模式)不变。

(A)(动态规划)用递归效用函数代替可加型效用函数，从而给出最佳证券组合和消费选择模型的贝尔曼方程(3.12)的一种推广。也就是说，陈述修改的贝尔曼方程以及关于效用原始对象(J,h)的规则条件，在这些规则性条件下，贝尔曼方程的解意味着其所对应的反馈政策导致最佳消费和证券组合选择。(试陈述该定理及其证明。)并且，请给出贝尔曼方程有解的条件。为了简单起见，在你的条件中，你可以引入J和h为连续且严格递增的假设。

(B)(资产定价理论)假设J和h是可微、递增和凹性的，且h或J(或二者均是)为严格凹性的。为了推导出类似随机欧拉方程(3.9)的证券价格模型，请给出其他你认为是必要的规则性条件。

(C)(增长问题)令$G:Z\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$并考虑由下式定义的资本存量投资问题：

$$\sup_{c\in L_+} U(c) \tag{3.27}$$

其约束为对所有的t，有$0\leqslant c_t\leqslant K_t$，其中$K_0,K_1,\cdots$，是由$K_t=G(X_t,K_{t-1}-c_{t-1})$定义的资本存量过程，并且$X_0,\cdots,X_T$是第3.3节中定义的马尔可夫过程。效用函数$U$是如上述根据$(J,h)$定义的递归函数。请给出解存在的关于$(J,h,G)$的合理条件，并陈述贝尔曼方程。

(D)(参数举例)在本部分内容中，为了能获得闭型(closed-form)解，我们用正态分布的假设来取代冲击可能值数量有限的假设。请给出(C)取自下列形式时的解：

(a)X是如下述所定义的实值冲击过程：$X_{t+1}=A+BX_t+\epsilon_{t+1}$，其中$A$和$B$为系数，$\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots$是满足$E(\epsilon_t)=0$和$\mathrm{var}(\epsilon_t)=\sigma^2$的正态分布随机变量的$i.i.d.$序列。

(b)对某些$\gamma\in(0,1)$，$G(x,a)=a^\gamma e^x$。

(c)对某些$\alpha\in(0,1)$，$J(q,w)=\log(q)+\rho\log(w^{1/\alpha})$。

(d)对$v\geqslant 0$，$h(v)=e^{\alpha v}$。

提示：你也许希望从下述形式的价值函数中推测出(c)的解：$V_t(x,k)=A_1(t)\log(k)+A_2(t)x+A_3(t)$，其中$A_1,A_2$和$A_3$为时间依赖的系数。本例不可能满足你在(C)中所引入的规则性条件。

(E)(期限结构)对由(D)的解所定义的消费资源禀赋过程e，让我们再回到(B)的情形，并请计算允许在时间$s>t$支付一个单位消费品的纯贴现债券在时间t时的价格$\Lambda_{t,s}$。注意，α是风险忍度的测量，在本模型中它可以独立于跨期替代影响而被研究。因为，对确定型的消费过程，效用独立于α，并且$J[q,h(v)]=\log(q)+\rho\log(v)$。

3.10 请说明方程(3.5)直接来自方程(2.9)。

3.11 (二项期限结构算法)本习题要求给出短期利率变化在取二项形式的情形下，期限结构定价问题的一系列数值解。在第3.6节的模式下，当无套利时，假设在任意时间t以贴现率d_t进行短期无风险借入是被允许的。那么，在时间t，将一期利率记为r_t，且由下述定义给出：

$$d_t=\frac{1}{1+r_t}$$

潜在冲击过程X具有要么$X_t=X_{t-1}+1$，要么$X_t=X_{t-1}$的特征。也就是说，在每一期中，新的冲击等于

旧的冲击加上一个 0—1 二项试验。习题 2.1 和第 3.6 节所探讨过的股票期权二项定价模型就是这样一个例子。与那个例子不一样的是，这里我们并不假设利率一定是常数，而是允许在任意时间 t，存在函数 $\rho_t: Z \to \mathbb{R}$ 使得 $r_t=\rho_t(X_t)$。为了简单起见，我们假设在任意时间 t，第 3.6 节中定义的定价矩阵 Π_t 为下述具体形式：

$$\begin{aligned}(\Pi_t)_{ij}&=\frac{p}{1+\rho_t(i)}, j=i+1\\&-\frac{1-p}{1+\rho_t(i)}, j=i\\&=0, \text{其他情况}\end{aligned}$$

其中 $p\in(0,1)$ 是 $X_{t+1}-X_t=1$ 成立的风险中性概率。我们表述性的假设存在等价鞅测度 Q(在第 2 章的意义下)，在该测度下，对所有的 t，我们有：

$$Q(X_{t-1}-X_t=1\mid X_0,\cdots,X_t)=p$$

想像一下图 3.1 中所给的“树”中各结点的证券价格的计算也许会有所帮助。图中横轴表示时期数，纵轴对应着可能的冲击水平，并假设 $X_0=0$。在任意时间 t 和任意冲击水平 i，给定证券在“树”中 (i,t) 点的价格为其后续两个结点 $(i+1,t+1)$ 和 $(i,t+1)$ 价值的加权平均值。准确地说，即

$$\mathcal{S}_t(i)=\frac{1}{1+\rho_t(i)}[p(\mathcal{S}_{t+1}(i+1)+f_{t+1}(i+1))+(1-p)(\mathcal{S}_{t+1}(i)+f_{t+1}(i))]$$

短期利率的两个典型模型可通过令 $p=1/2$ 以及下述两个条件之一得到：

(a)何—李(Ho-Lee)模型：对任意 $t<T$，$\rho_t(i)=a_t+b_t i$ 在某些常数 a_t 和 b_t 时成立。

(b)布莱克—德曼—托尔(Black-Derman-Toy)模型：对任意 t，$\rho_t(i)=a_t\exp(b_t i)$ 在某些常数 a_t 和 b_t 时成立。

(A)对上述第 2 种情况，即布莱克—德曼－托尔模型，在给定任意时间 t 的系数 a_t 和 b_t 的情况下，请给出计算到期时间为 t(任意给定)的零息债券无套利价格 $\Lambda_{0,t}$ 的计算机代码。并且请给出一个具体例子，令 $b_t=0.01$(对所有的 t)，以及 $a_0,a_1,\cdots,a_T$ 使得对所有的 t，有 $E^Q(r_t)=0.01$。(这些参数的取值是以月为期的情形下的典型取值量。)解出到期时间为 t(对 $\{1,\cdots,50\}$ 中所有的 t)的单位无风险零息债券的价格 $\Lambda_{0,t}$。

(B)对任意 i 和 t，考虑允许在时间 t 以及当且仅当 $X_t=i$ 时支付一个计价单位的证券，在时间 0 时的价格 $\psi_t(i)$。

请说明 ψ 可以用递归的方式从下述“向前”(forward)差分方程中计算出来：

$$\begin{aligned}\psi_{t+1}(i)&=\frac{\psi_t(i)}{2[1+\rho_t(i)]}+\frac{\psi_t(i-1)}{2[1+\rho_t(i-1)]}, 0<i<t+1\\&=\frac{\psi_t(i-1)}{2[1+\rho_t(i-1)]}, i=t+1\\&=\frac{\psi_t(i)}{2[1+\rho_t(i)]}, i=0\end{aligned}\tag{3.28}$$

其初始条件为：对 $i>0$，$\psi_0(0)=1$ 和 $\psi_0(i)=0$。因此，冲击价格函数 ψ 方面的知识是非常有用的。例如，允许在时间 t 支付券息 $f(X_t)$(除此之外再没别的券息)的证券在时间 0 时的无套利价格由 $\sum_{i=0}^{t}\psi_t(i)f(i)$ 给出。

(C)在实际中，当给定了“风险”(volatility)系数 $b_0,\cdots,b_T$，系数 a_t 和 b_t 常常取匹配初始期限结构

$\Lambda_{0,1}, \cdots, \Lambda_{0,T}$的值。下面的算法就是为了这个目的并运用事实 $\Lambda_{0,t}=\sum_{i=0}^{t}\psi_t(i)$而提出的：

(a)令 $\psi_0(0)=1$，并令 $t=1$。

(b)固定 ψ_{t-1}和 b_t，令 $\lambda_t(a_{t-1})=\sum_{i=0}^{t}\psi_t(i)$，其中 ψ_t 由向前差分方程(3.28)给出。从记法上看，只有在时间 t 到期的零息债券价格 $\lambda_t(a_{t-1})$对 a_{t-1}的依赖性(函数)是明晰的。因为 $\lambda_t(a_{t-1})$是 a_{t-1}的严格单调函数，我们可以用数值的方法求出满足 $\Lambda_{0,t}=\lambda_t(a_{t-1})$的系数 a_{t-1}解。(应用牛顿—拉夫森搜寻法就足够了。)

(c)令 t 以 1 递增。如果 $t \leqslant T$，就回到步骤(b)；否则就停止。

给出算法(a)—(b)—(c)的计算机代码。假定对所有的 t，有 $b_t=0.01$，运用布莱克—德曼-托尔模型求出对所有 t 的 a_t 的解。我们还假定初始期限结构是由 $\Lambda_{0,t}=\alpha^t$ 给出，其中 $\alpha=0.99$。

(D)只要有必要，就拓展你的计算机编码，使得其能够给出任意给定到期日的有息债券美式买入期权的价格。对你从(C)中确定的各系数 $a_0, \cdots, a_{T-1}$，计算直到到期日为时间 20 时，每期支付的券息均为 0.013，而且在到期时除了需支付券息之外，还需支付一个计价单位的债券的美式期权的初始价格。该美式买权的执行价格为 1.00(债券除息后)，到期日为时间 10。只就布莱克—德曼—托尔模型进行此种计算。

注 释

(第 3.1 节～第 3.2 节)贝尔曼优化原则应归功于贝尔曼(Bellman, 1957)。习题 3.3 中所构绘的关于价值函数可微性的引理 3.1 的证明来自本温尼斯特和施埃恩克曼(Benveniste and Scheinkman, 1979)，并且可以很容易地推广到一般的状态空间。这可以参见达菲(Duffie, 1988c)以及斯托克伊和卢卡斯(Stokey and Lucas, 1989)。

(第 3.3 节)弗里德曼(Freedman, 1983)论述了马尔可夫链理论。关于离散时间马尔可夫模式下动态规划的一般处理，可参见贝兹卡斯(Bertsekas, 1976)和贝兹卡斯和施莱弗(Bertsekas and Shreve, 1978)。

(第 3.4 节～第 3.6 节)这是本书第 4 章中将讨论的马尔可夫资产定价模型[参见理罗伊(LeRoy, 1973)和卢卡斯(Lucas, 1978)]的简单有限时间视野版本。(3.17)式中隐含的半组定价方法来自达菲和高曼(Duffie and Garman, 1991)。第 3.6 节中的二次期权定价模型是威廉·夏普(William Sharpe)以及考克斯、罗斯和鲁宾斯坦因(Cox, Ross and Rubinstein, 1979)发展而来，并且在习题 2.1 和本书第 12 章得到了更进一步的探索。

额外话题 习题 3.9 运用习题 2.9 中的递归效用函数来处理资产定价，在习题 4.12 中，还被推广到爱普斯坦恩和秦(Epstein and Zin, 1989)的无限时间视野中来。本书第 2 章的注释可以找到关于递归效用函数更多的参考资料。关于递归效用函数的动态规划更多的内容，请参见司基尔伏特(Streufert, 1991a, 1991b, 1996)。关于离散时间马尔可夫模式下递归效用函数和资产定价方面的更多工作，请参见凯恩(Kan, 1993, 1995)和马(Ma, 1993b, 1994)。

关于二次期限结构模型的扩展习题几乎完全基于杰姆斯迪安(Jamshidian, 1991c)。在那里，差分方程(3.28)的解与或有权状态定价之间的关系得到了特别重视。在第 7 章和第 12 章的连续时间的应用中，这种关系被重新予以考虑。该习题中出现的两种特别的期限结构模型是分别基于何和李(Ho and Lee, 1986)和布莱克、德曼和托尔(Black, Derman and Toy, 1990)。这里所给出的何和李(Ho-Lee)模型

的参数形式比实际出现于何和李(Ho and Lee,1986)中的形式稍微通用一些。绝大多数作者都采用传统的把 X_{i-1} 作为 X_i+1 或 X_i-1 的方法,这会导致同一模型出现略微不同的形式。在参数变化之后,这两种形式是等价的。派伊(Pye,1966)(其研究成果早于"风险中性定价"概念)是这些期限结构离散时间马尔可夫模型的出色的先驱之作。这些模型的连续时间版本将在第 7 章中考虑。第 12 章将非常详细地探讨能与初始期限结构相匹配的算法。习题 12.5 演示了随着时间期间长度的缩小,离散时间布莱克—德曼—托尔模型会收敛于其连续时间模型。杰姆斯迪安(Jamshidian,1991c)考虑了大量相关的案例。

德曼和卡尼(Derman and Kani, 1994),达派(Dupire,1994b),以及鲁宾斯坦因(Rubinstein, 1994, 1995)提供了多种方法来把"二次"马尔可夫股票价格过程(类似于第 3.6 节中的)校准到不同履约价格和到期日的期权现有价格。这是论述微笑曲线的一部分文献资料。微笑曲线是指以期权价格布莱克—斯科尔斯公式中所导出的"隐含波动性"为纵坐标,以不同期权的履约价格为横坐标所绘出的图形。如果布莱克—斯科尔斯公式背后的假设是正确的,那么,隐含的波动性不会依赖于履约价格。第 8 章将会再次讨论微笑曲线,但是,这将在随机波动性的话题下进行。相关的文献资料可在第 8 章的注释中找到。

布沙兹、吉塞尔斯和高瑞洛克斯(Bossaerts, Ghysels and Gourieroux,1996)分析了随机波动性下基于套利的定价。乔尼、科霍尔和托兹(Jouini, Koehl, and Touzi, 1995)探索了此情形下交易成本和非完备市场的影响。

4.

无限时期情形

本章将向读者展示第 2 章和第 3 章的结论在无限期情形下的结果。尽管本章的情形要求更高的技术水平，但其并不产生更多新的观点，只是有时候能够把结果简化，并且它正好满足计量经济学在样本理论(要求能够处理无边界的观测样本数)上的要求。我们从第 3 章有限期成果的马尔可夫动态规划推广开始，然后考虑在不运用马尔可夫假设的情况下的无套利或最优化对证券价格的含义。最后，我们回到静态马尔可夫模式，并简要地回顾估计资产价格模型的大样本方法。第 4.1 节和第 4.2 节具有实质性意义，其他各节在第一次阅读时可以跳过去。

4.1 马尔可夫动态规划

假设 $X=\{X_0,X_1,X_2,\cdots\}$是一个时间同一的马尔可夫冲击链，正像第 3.3 节所定义的那样，它在有限集合 $Z=\{1,\cdots,k\}$中取值，有所不同的是在本章中时期的数目有无限多。给定 $k\times k$ 非负矩阵 q ，假定该矩阵的每一行元素之和均为 1，那么，注释中的参考资料指出存在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P_i)$，对任意初始冲击 i ，满足定义特征 $P_i(X_0=i)=1$ 和

$$P_i(X_{t+1}=j\mid X_0,\cdots,X_t)=q_{X(t),j}$$

同第 3 章一样，$\mathcal{F}_t$ 表示由$\{X_0,\cdots,X_t\}$所生的族集，也就是说，信息来源是马尔可夫链$\{X_t\}$。这是在本书中第一次出现不必是有限状态集 Ω 的情况，但因为对任意时间 t ，$\mathcal{F}_t$ 中的事件是有限数量的，因此，本章的绝大部分内容不需要参考附录 C 就可以轻易弄懂。附录 C 只是对一般概率空间的重温。

令 L 表示由下述过程定义的随机变量序列空间：对随机变量序列 $c=\{c_0,c_1,c_2,\cdots\}$，存在 $\bar{c}$ 使得对所有的 t ，c_t 为 $\mathcal{F}_t$ 可测且 $|c_t|\leqslant\bar{c}$。换言之，L 是有界适应过程空间。行为人从 L 的非负过程集 L_+ 中选择消费过程。有 N 个证券，证券 n 由 L 中的息过程 $\delta^{(n)}$ 定义，

且有价格过程 $S^{(\omega)}\in L$，某个交易策略被定义为 $\theta=(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(N)})\in\Theta\equiv L^N$。每一个交易策略 $\theta\in\Theta$ 产生券息过程 $\delta^\theta\in L$。同第 2 章中一样，券息过程被定义为：

$$\delta_t^\theta=\theta_{t-1}\cdot(S_t+\delta_t)-\theta_t\cdot S_t,\qquad t\geqslant 0$$

其中“θ_{-1}”$=0$ 是传统的处理方法。假设行为人具有资源禀赋过程 $e\in L_-$，给定特别初始冲击 i，其效用函数为 $U^i:L_+\to\mathbb{R}$。该行为人的优化问题为：

$$\sup_{\theta\in\Theta(e)}U^i(e+\delta^\theta)$$

其中 $\Theta(e)=\{\theta\in\Theta:e+\delta^\theta\geqslant 0\}$。

为了建立时间同一性的马尔可夫模型，我们先假定效用函数、资源禀赋以及股息具有特殊的时间同一性特征。给定初始冲击 i，考虑由贴现折扣 $\rho\in(0,1)$ 和严格递增、有界、凹性且连续的 $u:\mathbb{R}_-\to\mathbb{R}$ 所定义的效用函数 $U^i:L_+\to\mathbb{R}$，其具有下述具体形式：

$$U^i(c)=E^i\Big[\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t u(c_t)\Big] \tag{4.1}$$

式中 E^i 表示对应于初始冲击 $X_0=i$ 的概率测度 P_i 下的期望。假设 $g:Z\to\mathbb{R}_{++}$ 和 $f:Z\to\mathbb{R}_{++}^N$，使得对所有的 t，资源禀赋为 $e_t=g(X_t)$，息向量为 $\delta_t=f(X_t)$。最后，假设证券价格由下述方法给定：假设存在固定的 $\mathcal{S}:Z\to\mathbb{R}_{++}^N$，使得对所有的 t，$S_t=\mathcal{S}(X_t)$。

我们锁定证券组合 $b\in\mathbb{R}_{+-}^N$，并认为 $-b$ 为允许做空的最低取值极限。这条限制以后将被排除掉。但就现在来说，财富的下限为：

$$\underline{w}=\min_{i\in Z}-b\cdot[\mathcal{S}(i)+f(i)]$$

令 $D=Z\times[\underline{w},\infty)$，函数 $F:D\to\mathbb{R}$ 被定义为在空间 $B(D)$ 中，如果对每个 $i\in Z$，$F(i,\cdot):[\underline{w},\infty)\to\mathbb{R}$ 是有界、连续和凹性的。行为人的控制问题的价值为 $V\in B(D)$，且

$$V(i,w)=\sup_{(c,\theta)\in L_+\times\Theta}U^i(c) \tag{4.2}$$

上式满足约束：

$$W_0^\theta=w \tag{4.3}$$

$$W_t^\theta=\theta_{t-1}\cdot[\mathcal{S}(X_t)+f(X_t)],\qquad t\geqslant 1 \tag{4.4}$$

$$c_t+\theta_t\cdot\mathcal{S}(X_t)\leqslant W_t^\theta+g(X_t),\qquad t\geqslant 0 \tag{4.5}$$

$$\theta_t\geqslant -b,\qquad t\geqslant 0 \tag{4.6}$$

我们求解价值函数 V 的方法是取 $B(D)$ 中的任意 F，从该候选 F 中，用下述方法构造新的函数并记为 $\mathcal{U}F$。我们的方法将说明，如果 $F=\mathcal{U}F$，那么 $F=V$。事实上，在计算价值 V 时，这种方法导出了一种算法，称为价值迭代法。该算法的陈述即为对 $B(D)$ 中的任意 F，令 $\mathcal{U}F:D\to\mathbb{R}$ 定义如下：

$$\mathcal{U}F(i,w)=\sup_{(\bar\theta,\bar c)\in\mathbb{R}^N\times\mathbf{R}^+}u(\bar c)+\rho E^i[F(X_1,\bar\theta\cdot[\mathcal{S}(X_1)+f(X_1)])] \tag{4.7}$$

而且，满足约束：

$$\bar{c}+\bar{\theta}\cdot\mathcal{S}(i)\leqslant w+g(i) \tag{4.8}$$

$$\theta\geqslant -b \tag{4.9}$$

换言之，假设下一时期的价值函数为 F，那么，$\mathcal{U}F(i,w)$ 是在 (i,w) 处可以取得的最大效用。

下面三个结果的说明将留为习题完成。

事实 4.1 如果 F 属于 $B(D)$，那么，$\mathcal{U}F$ 也属于 $B(D)$。

对任意属于 $B(D)$ 的 F 和 G，令

$$\mathrm{d}(F,G)=\sup\{|F(i,w)\}-G(i,w)|:(i,w)\in D\}$$

这就给出了任意两个此类函数之间距离的概念。显然，当且仅当 $\mathrm{d}(F,G)=0$ 时，$F=G$。

引理 4.1 对 $B(D)$ 中的任意 F 和 G，$\mathrm{d}(\mathcal{U}F,\mathcal{U}G)\leqslant\rho\mathrm{d}(F,G)$。

应用这条定理，我们定义方程 $\mathcal{U}F=F$ 的惟一解 F。该方程在(4.2)式～(4.6)式中被称为贝尔曼方程。解 F 被称为 $\mathcal{U}$ 的固定点，下面的结果显示，当时间趋向于无穷时，F 可以被构造成价值函数为有限时间型时的极限。

命题 4.1 对 D 中所有的 (i,w)，令 $F_{-1}(i,w)=0$，再令 $F_t=\mathcal{U}F_{t-1}$，$t\geqslant 0$。那么，对 D 中所有的 (i,w)，$F(i,w)\equiv\lim_{t\to\infty}F_t(i,w)$ 存在且定义了 $B(D)$ 中满足 $F=\mathcal{U}F$ 的惟一解 F。

我们设 F 为 $\mathcal{U}$ 的惟一固定点。我们将证明 F 是(4.2)式～(4.6)式的价值函数。定义函数 $C:D\to\mathbb{R}_+$ 和 $\Phi:D\to\mathbb{R}^N$，使得 $[C(i,w),\Phi(i,w)]$ 是(4.7)式～(4.9)式的解。给定(4.2)式～(4.6)式的初始条件 (i,w)，令 W^* 定义如下：$W_0^*=w$ 和 $W_t^*=\Phi(X_{t-1},W_{t-1}^*)[\mathcal{S}(X_t)+f(X_t)]$，$t\geqslant 1$。然后再令 (c^*,θ^*) 定义为 $c_t^*=C(X_t,W_t^*)$ 和 $\theta_t^*=\Phi(X_t,W_t^*)$，$t\geqslant 0$。我们称 (θ^*,c^*) 为最佳反馈控制。函数 Φ 和 C 为相应的反馈方针函数。

定理 4.1 (4.2)式～(4.6)式的价值函数 V 是 $\mathcal{U}$ 的惟一固定点。任意最佳反馈控制 (c^*,θ^*) 是(4.2)式～(4.6)式的解。

证明：令 F 为贝尔曼方程 $\mathcal{U}F=F$ 的惟一解。锁定 Z 中任意初始 i 和初始财富 $w\in[\underline{w},\infty)$。令 (θ,c) 为任意可行控制。对任意时间 t，根据贝尔曼方程(4.7)式～(4.9)式，有：

$$F(X_t,W_t^\theta)\geqslant u(c_t)+\rho E^i[F(X_{t+1},W_{t+1}^\theta)|X_t]$$

两边同乘以 ρ^t，并重新安排不等式后，有：

$$\rho^t F(X_t,W_t^\theta)-\rho^{t+1}E^i[F(X_{t+1},W_{t+1}^\theta)|X_t]\geqslant\rho^t u(c_t) \tag{4.10}$$

两边取期望值，并应用期望迭代法则，有：

$$E^i[\rho^t F(X_t,W_t^\theta)]-\rho^{t+1}E^i[F(X_{t+1},W_{t+1}^\theta)]\geqslant E^i[\rho u(c_t)]$$

对任意 $T\geqslant 1$，计算上述表达式从 $t=0$ 到 $t=T$ 的和，将使得左边许多项抵消，最后有：

$$E^i[F(X_0,W_0^\theta)]-\rho^{T+1}E^i[F(X_{T+1},W_{T+1}^\theta)]\geqslant E^i\Big[\sum_{t=0}^{T}\rho^t u(c_t)\Big]$$

由于 F 是有界函数和 $\rho\in(0,1)$，当 $T\to\infty$ 时，上式左边的极限为 $F(i,w)$。根据控制收敛定理(参见附录 C)，上式右边的极限为 $U^f(i)$ 。这样就有 $F(i,w)\geqslant U^f(c)$。对任意给定的最佳反馈控制 (c^*,θ^*)，上述计算同样有效，只是，根据 C 和 Φ 的定义，我们可以把(4.10)式的不等式写成等式。这样就有 $F(i,w)=U^f(c^*)$。由于 (i,w) 是任意的，因此，F 确实是价值函数，而且 (c^*,θ^*) 是最优的，即为(4.2)式～(4.6)式的解。定理得证。 □

4.2 动态规划和均衡

第 4.1 节展示了反馈型的最佳控制的存在。它是由依据当期冲击—财富偶 (i,w) 而描述最佳消费和证券组合选择的方针函数 C 和 Φ 给出。为了用同样的方法概括均衡的特征，我们在本节中采用更为严格的效用函数条件。除了已有的 u 是严格递增、有界、凹性且连续的假设外，我们再增加下面的规则性条件。

假设 A 函数 u 为严格凹性且在 $(0,\infty)$ 上可微。

我们定义 $\mathcal{S}$ 为单一行为人的马尔可夫均衡，如果其相关的最佳反馈方针函数 C 和 Φ 可以被选定使得对任意冲击 i，$C(i,0)=g(i)$ 和 $\Phi(i,0)=0$。这样定义之后，如果行为人初始的资源仅仅是他或她的私人禀赋，那么，消费和证券市场总是清的(供需平衡，没有剩余)。证券组合卖空的限制在均衡时是多余的，因为卖空约束在解 $(e,0)$ 处没有约束力，并且我们所找到的惟一均衡不依赖于 $-b$ 的特别取值极限。(要求读者作为习题来验证这一事实。)我们的主要目标是说明下述均衡特征。

命题 4.2 当且仅当对所有的 i，有：

$$\mathcal{S}(i)=\frac{1}{u'[g(i)]}E^i\Big(\sum_{t=1}^{\infty}\rho^t u'[g(X_t)]f(X_t)\Big) \tag{4.11}$$

$\mathcal{S}$ 为马尔可夫均衡。

期望迭代法则告诉我们，下面的公式与(4.11)式等价。(4.11)式有时被称为随机欧拉方程。

推论 4.1 当且仅当对任意时间 t 和任意初始冲击 i，有：

$$\mathcal{S}(X_t)=\frac{1}{u'[g(X_t)]}E^i(\rho u'[g(X_{t+1})][\mathcal{S}(X_{t+1})+f(X_{t+1})]\,|\,X_t) \tag{4.12}$$

$\mathcal{S}$ 是马尔可夫均衡。

我们将运用下面的价值函数 V 的两个特征来说明上述结果。

事实 4.2 对任意 i，$V(i,\cdot):[\underline{w},\infty)\to\mathbb{R}$ 为递增且严格凹性的。

事实 4.3 锁定任意 $\mathcal{S}$，令 (C,Φ) 为如上所述的最佳反馈方针函数。假设对任意给定的 i 和 $\hat{w}>\underline{w}$，有 $\hat{c}=C(i,\hat{w})>0$。那么，$V(i,\cdot)$ 在 $\hat{w}$ 处是连续可微的，且 $V_w(i,\hat{w})=$

$u'(\hat{c})$。

以上两点事实，可以用第3章中类似的两点事实的证明方法来证明。根据贝尔曼方程(4.7)的一阶条件和 V 是贝尔曼方程的解的事实，我们知道对所有的 i，当且仅当

$$\mathcal{P}(i)=\frac{1}{u'[g(i)]}E'(\rho u'[g(X_1)][\mathcal{P}(X_1)+f(X_1)]),\quad i\in Z \tag{4.13}$$

C 和 Φ 可以被选定使得 $C(i,0)=g(i)$ 和 $\Phi(i,0)=0$。这样(4.13)式就等价于(4.11)式和(4.12)式。命题和推论得证。

4.3 套利和状态价格

为了考虑无套利和最优化在抽象的无限时期情形下对证券价格的含义和影响，我们暂时离开马尔可夫不确定性的特殊场合。假设 Ω 是一个集合，$\mathcal{F}$ 是 Ω 上的族集，以及对任意非负整数 t，$\mathcal{F}_t$ 是有限子族集，且对 $s\geqslant t$，有 $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$。我们也锁定$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度 P。跟通常一样，我们假定 $\mathcal{F}_0$ 只包含概率为0或1的事件。我们仍用 L 表示有界适应过程空间。有 N 个证券，证券 n 由其券息过程 $\delta^{(n)}\in L$ 定义，其价格记为 $S^{(n)}\in L$。交易策略就是某个 $\theta=(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(N)})\in\Theta\equiv L^{(N)}$。

套利就是满足 $\delta^\theta>0$ 的交易策略 θ。如果不存在套利，那么对任意 T，不存在 T 期套利。T 期套利的意思是满足下述条件的套利 θ：$\theta_t=0,t\geqslant T$。先暂时固定 T，如果不存在 T 期套利，那么，第2章的结果告诉我们，就存在 T 期状态价格缩子，在 L 中严格为正且满足 $\pi_0^T=1$ 的过程 π^T，使得对任意交易策略 θ，只要 $\theta_t=0,t\geqslant T$，我们便有 $E(\sum_{t=0}^T\pi_t^T\delta_t^\theta)=0$。同样，存在$(T+1)$期状态价格缩子 π^{T+1}。可以验证，由下述定义的 $\hat{\pi}$ 也是$(T+1)$期状态价格缩子：$\hat{\pi}_t=\pi_t^T,t\leqslant T$ 以及 $\hat{\pi}_t=\pi_t^{T+1},\ t>T$。通过在 T 中归纳，意味着存在严格为正的过程 π，使得对满足 $\theta_t=0,t>T$ 的任意交易策略 θ，我们有 $E(\sum_{t=0}^\infty\pi_t\delta_t^\theta)=0$。特别地，对任意 t 和 $\tau\geqslant t$，有下述我们很熟悉的状态价格关系特征：

$$S_t=\frac{1}{\pi_t}E_t\left(\pi_\tau S_\tau+\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right) \tag{4.14}$$

当 τ 为有界停止时间时，(4.14)式也成立。不幸的是，没有理由可以相信存在状态价格缩子，即严格为正的适应过程 π 使得(4.14)式对任意无界停止时间 τ 也成立，即没有理由(至少到目前为止)可以相信下式对任意 t 成立：

$$S_t=\frac{1}{\pi_t}E_t\left(\sum_{j=t+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right) \tag{4.15}$$

事实上，(4.15)式的右边有可能甚至不能被定义。我们需要对 π 有所限制。

如果 $E(\sum_{t=0}^\infty|x_t|)<\infty$，我们就称适应过程 x 为均值可加(mean-summable)过程，并且令 L^* 表示均值可加过程空间。如果 $\pi\in L^*$ 和 $c\in L$，那么，附录C中的控制收敛定理告

诉我们 $E(\sum_{t=0}^{\infty}\pi_t c_t)$ 是被很好地定义且是有限的，所以，如果要使(4.15)式有意义的话，那么，L^* 可以是可选的状态价格缩子的一个自然空间。

4.4 最优化和状态价格

假设某行为人由非负过程空间 L_+ 中的资源禀赋过程 e 和严格递增效用函数 $U: L_+ \to \mathbb{R}$ 定义。给定券息—价格偶 $(\delta, S) \in L^N \times L^N$，这位行为人所面临的优化问题为：

$$\sup_{\theta} U(e+\delta^{\theta}) \tag{4.16}$$

我们说效用函数 U 在 c 处为 L^*—光滑(L^*-smooth)，如果梯度 $\nabla U(c)$ 存在且具有由下述定义的惟一的利茨(Riesz)表述 $\pi \in L^*$：对 L 中的任意可行方向 x，

$$\nabla U(c;x) = E\left(\sum_{t=0}^{\infty}\pi_t x_t\right)$$

(对有关梯度和可行方向的定义，请参见附录 B。)例如，假设 U 被定义为 $U(c)=E[\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t u(c_t)]$，其中 $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是严格递增的且在 $(0,\infty)$ 上连续可微，$\rho \in (0,1)$。那么，对 L_+ 中的任意 c(其下界为零)，U 为在 c 处的 L^*—光滑，L 中的任意 x 均为在 c 处的可行方向，且

$$\nabla U(c;x)=E[\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t u'(c_t)x_t], \qquad x \in L \tag{4.17}$$

这意味着效用函数梯度的利茨表述在此种情况下为由 $\pi_t=\rho^t u'_t(c_t)$ 所定义的过程 π。

更一般地，我们有下述状态价格缩子特征概括。

命题 4.3 假设 c^* 是(4.16)式的解，c^* 的下界为零，且 U 在 c^* 处为 L^*—光滑。那么，$\nabla U(c^*)$ 的利茨表述 π 为状态价格缩子。

推论 4.2 再假设 U 被定义为：

$$U(c) = E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t u(c_t)\right]$$

其中 $\rho \in (0,1)$，且 u 在 $(0,\infty)$ 上有严格为正的导数。那么，由 $\pi_t=\rho^t u'(c_t^*)$ 定义的 π 为状态价格缩子，且对任意时间 t 和停止时间 $\tau > t$，有：

$$S_t = \frac{1}{u'(c_t^*)}E_t\left[\rho^{\tau-t}u'(c_\tau^*)S_\tau + \sum_{j=t+1}^{\tau}\rho^{j-t}u'(c_j^*)\delta_j\right]$$

这条推论给出了最优化的一个必要条件。当这一条件被特别用到均衡的情形时，就可得到作为均衡必要条件的随机欧拉方程(4.12)，而不要再借助于马尔可夫不确定性或动态规划。从充分性的角度看，我们还应给出随机欧拉方程意味着 S 为均衡的条件。为了这一点，我们定义 S 为单个行为人的均衡，如果给定 S，则 $\theta^*=0$ 为(4.16)式的解。

定理 4.2 假设 U 是严格递增、凹性的，在资源禀赋过程 e 处 L^∞—光滑。假定资源禀赋过程 e 的下界是零。令 $\pi\in L^\infty$ 为 $\nabla U(e)$ 的利茨表述。那么，S 为单一行为人均衡的充分必要条件为 π 是状态价格缩子。

在第 4.1 节中的马尔可夫例子中，e 的下界为零的假设是自动满足的。此定理的证明也被留作习题完成。

4.5 矩法估计

虽然我们的主要目的不是研究计量经济学，但似乎有必要在这里指出为什么无限期的情形在实证建模中非常有用。

假定对某整数 $m\geqslant 1$，$B\subset\mathbb{R}^m$ 为参数集合。B 中的任意 b 对应着一个具有同一状态空间 Z 的马尔可夫经济。尤其是，马尔可夫过程 X 的过渡矩阵 $q(b)$ 可能会随 b 变化。例如，我们可以取由如下效用函数所定义的单一行为人：贴现因子为 $\rho\in(0,1)$，酬劳函数为 $u_\alpha(x)=x^\alpha/\alpha$，其中 $\alpha<1$，且 $u_0(x)=\log x$。我们然后可以取 $m=2$ 和 $b=(\rho,\alpha)\in B=(0,\infty)\times(-\infty,1)$。在此例中，过渡矩阵 $q(b)$ 就不依赖于 b。

我们锁定某个 $b_0\in B$，将其看成是支配经济的“真”参数向量。我们的目标是估计未知的参数向量 b_0。

为了简单起见，我们将假设 X 的过渡矩阵 $q(b_0)$ 严格为正。在此基础上，被称为弗洛班努斯—佩隆(Frobenius-Perron)定理的成果意味着：存在惟一向量 $p\in\mathbb{R}^k_{++}$，其元素的和为 1，且满足特征 $q(b_0)^\top p=p$。令 $q(b_0)^t$ 表示 $q(b_0)$ 的 t 重积，那么，我们可以看到 $P_i(X_t=j)=q(b_0)^t_{ij}$，所以 $q(b_0)^t$ 为 t 期过渡矩阵。可以证明 p 是由 $\lim_t q(b_0)^t$ 的任意一行所给定。因此，不管初始冲击 i 如何，$\lim_t p_i(X_t=j)=p_j$。事实上，向稳态概率向量 p 收敛的速度呈指数函数性，因此，存在常数 $\beta>1$ 使得对任意 i 和 j，有：

$$\beta^t[p_j-P_i(X_t=j)]\to 0 \tag{4.18}$$

据此，对任意 $H:Z\to\mathbb{R}$ 和任意初始条件 $j\in Z$，我们立即有 $E^j[H(X_t)]\to\sum_{i=1}^k p_iH(i)$，且其收敛速度呈指数函数性。在时间 T，X 的实证分布向量 p_T 被定义为：

$$p_{Ti}=\frac{1}{T}\#\{t<T:X_t=i\}$$

其中，$\#A$ 表示有限集 A 中的元素数量，也就是说，p_{Ti} 为直到时间 T 为止在状态 i 下所花的时间的平均分数。对随机变量的 *i. i. d.*（独立同等分布）序列，我们可以应用大数定律。不难证明，p_T 几乎肯定地收敛于稳态分布向量 p。此事实的证明就留在了习题 4.14 中，那里做出了相关的提示。据此，我们有下述形式的马尔可夫链的大数定律：

马尔可夫链的强大数定律 对任意 $H:Z\to\mathbb{R}$，经验平均 $\sum_{t=0}^T H(X_t)/T$ 几乎肯定地

收敛于稳态平均值$\sum_{i=1}^{k}p_iH(i)$。

证明：由于$\sum_{t=0}^{T}H(X_t)/T=\sum_{i=1}^{k}p_{Ti}H(i)$，由事实$p_T\to p$几乎肯定地可以得出以上结果。□

假设存在整数$\ell\geqslant 0$使得对任意时间t，计量经济学家能在时间$t+\ell$观察到数据$h(Y_t)$，其中$Y_t=(X_t,X_{t-1},\cdots,X_{t+\ell})$和$h:Z^{\ell+1}\to\mathbb{R}^n$。例如，该数据可以以下列形式出现：证券价格、券息、资源禀赋或这些变量的函数。不难验证，只要t期过渡矩阵$q(b_0)^t$严格为正，那么，即使$q(b_0)$不严格为正，强大数定律亦成立。根据这一事实，Y也满足强大数定律，因为Y可以被处理为马尔可夫过程，其$(\ell+1)$期过渡矩阵严格为正。特别是，对任意$G:Z^{\ell+1}\to\mathbb{R}$，经验平均$\sum_{t=1}^{T}G(Y_t)/T$几乎肯定收敛于对应的稳态平均，而后者又等于$\lim_t E^i[G(Y_t)]$，一个与初始冲击$i$不相关的数量。

我们现在来具体说明某检验矩函数(test moment function) $K:\mathbb{R}^n\times B\to\mathbb{R}^M$，对某个整数$M$，且其满足下述特征：对所有的$t$，$E_t(K[h(Y_t),b_0])=0$。以随机欧拉方程(4.13)所描述的单一行为人马尔可夫均衡为例，其效用函数如上由未知参数向量$b_0=(\rho_0,\alpha_0)$所描述。在此例中，我们可以令$Y_t=(X_t,X_{t+1})$，而且$h(Y_t)=(R_{t+1},e_{t+1},e_t)$。其中$e_t=g(X_t)$为当期资源禀赋，$R_t$为由下述定义的取$\mathbb{R}^N$型值的回报向量：

$$R_{it}=\frac{\mathcal{P}_i(X_t)+f_i(X_t)}{\mathcal{P}_i(X_{t-1})},\quad i\in\{1,\cdots,N\}$$

由于$M=N$和$b=(\rho,\alpha)$，我们可以令：

$$K_i[h(Y_t),b]=\frac{\rho e_{t+1}^{\alpha-1}R_{i,t-1}}{e_t^{\alpha}-1}-1 \tag{4.19}$$

根据(4.13)式，我们可以证实$E_t(K[(Y_t,b_0)])=0$。

我们由强大数定律可知，对B中的任意b，经验平均$\overline{K}_T(b)\equiv\sum_{t=1}^{T}K(Y_t,b)/T$几乎肯定收敛于稳态平均，记为$\overline{K}_\infty(b)$。由期望迭代法则，对任意初始状态$i$，有：

$$E^i[K(Y_t,b_0)]=E^i(E_t[K(Y_t,b_0)])=0$$

据此，我们知道$\overline{K}_\infty(b_0)=0$几乎肯定成立。在时间$t$，$b_0$的自然估计值由下述问题的解$\hat{b}_t$给出：

$$\inf_{b\in B}\|\overline{K}_t(b)\| \tag{4.20}$$

(4.20)式的任意解序列$\{\hat{b}_t\}$被称为b_0的估计值的广义矩法或GMM。在适当的条件下，我们可以证明，GMM估计在下述意义下一致：即$\hat{b}_t\to b_0$几乎肯定成立。充分的技术条件给定如下：

GMM规则性条件 参数集B为紧性的。对B中除b_0之外的任意b，$\overline{K}_\infty(b)\neq 0$。函数$K$在下述意义下对$b$为利普斯基茨(Lipschitz)，即存在常数$k$使得对任意$Z^{\ell+1}$中的$y$，以及$B$中的$b_1$和$b_2$，我们有：

$$\|K(y,b_1)-K(y,b_2)\|\leqslant k\|b_1-b_2\|$$

定理 4.3 在 GMM 规则条件下，GMM 估计值存在且任意 GMM 估计值都是一致的。

该定理根据下述命题即可以求证。

均匀强大数定律 在 GMM 规则性条件下，

$$\sup_{b\in B}|\overline{K}_T(b)-\overline{K}_\infty(b)|\to 0 \text{ 几乎肯定成立。}$$

证明：下面的证明取自于注释中所列的参考资料。不失一般性，我们取 $M=1$。由于 B 是紧集，K 对 b 是利普斯基茨，对任意 $\epsilon\in(0,\infty)$，存在有限集 $B_\epsilon\subset B$，其具有以下特征：对 B 中的任意 b，B_ϵ 中存在 b_ϵ 和 b^ϵ，对所有的 y，满足：

$$K(y,b_\epsilon)\leqslant K(y,b)\leqslant K(y,b^\epsilon)\qquad |K(y,b_\epsilon)-K(y,b^\epsilon)|\leqslant b\epsilon \tag{4.21}$$

作为惯例，对于数的任意序列 $\{x_n\}$，我们令：

$$\underline{\lim}_n x_n=\sup_n\inf_{k\geqslant n}x_k$$

对给定的 $\epsilon>0$：

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_t\inf_b[\overline{K}_t(b)-\overline{K}_\infty(b)]&\geqslant\underline{\lim}_t\inf_b[\overline{K}_t(b_\epsilon)-\overline{K}_\infty(b)]\\&\geqslant\underline{\lim}_t\inf_b[\overline{K}_t(b_\epsilon)-\overline{K}_\infty(b_\epsilon)]\\&\quad+\inf_b[\overline{K}_\infty(b_\epsilon)-\overline{K}_\infty(b)]\\&\geqslant-b\epsilon\qquad\text{几乎肯定成立。}\end{aligned}$$

依据强大数定律、(4.21)式和 B_ϵ 是有限的事实，令 $A_\epsilon\subset\Omega$ 是概率为 1 的事件，且满足上述不等式。再令 $A=A_1\cap A_{1/2}\cap A_{1/3}\cdots$，那么，$A$ 也具有概率 1，而且对于 A 我们有：

$$\underline{\lim}_t\inf_b[\overline{K}_t(b)-\overline{K}_\infty(b)]\geqslant 0 \tag{4.22}$$

同样，用 b^ϵ 代替 B_ϵ，$-\overline{K}$ 代替 $\overline{K}$，我们有：

$$\underline{\lim}_t\inf_b[-\overline{K}_t(b)+\overline{K}_\infty(b)]\geqslant 0 \text{ 几乎肯定成立。} \tag{4.23}$$

上述不等式由(4.22)式和(4.23)式可得。 □

注释中引用的参考资料证明了 GMM 估计值在更弱条件下的一致性，并分析了这一估计值的理论特征。所包括的这些技术条件有说明 $(b_t-b_0)/\sqrt{t}$ 的极限分布呈正态性的，也有说明这一极限分布的协方差矩阵 Σ 的具体形式的。如同这些资料中所指出的一样，GMM 估计值相对于该极限协方差矩阵 Σ 的充分条件特征可以通过将(4.20)式中的准则函数 $b\mapsto||\overline{K}_t(b)||$ 换成准则函数 $b\mapsto\overline{K}_t(b)^\top W_t\overline{K}_t(b)$ 来进行改善，其中 $\{W_t\}$ 为具有半正定“权重”矩阵的特别适应过程。注释中还注明了把 GMM 估计值应用于金融的其他文章。

习 题

4.1 证明事实 4.1。

4.2 证明定理 4.1。

4.3 证明命题 4.1。

4.4 证明事实 4.2。

4.5 证明事实 4.3。

4.6 说明(4.13)式是 $C(i,0)=g(i)$ 和 $\Phi(i,0)=0$ 最优化的必要和充分条件，即均衡的必要充分条件。

4.7 证明(4.11)式、(4.12)式和(4.13)式是等价的。

4.8 证明当证券组合有下界时，约束(4.9)式在马尔可夫均衡中不是紧约束。

4.9 假设存在单个证券，其价格过程为 $S\equiv 1$，其券息过程为 δ 且满足对所有的 t，$\delta_t>-1$。效用函数由(4.1)式定义，其中对 $\alpha<1$ 且 $\alpha\neq 0$，$u(x)=x^{\alpha}/\alpha$。资源禀赋过程 e 可定义如下：$e_t=0$，$t\geqslant 1$ 和 $e_0=w>0$。令 $\mathcal{L}_+$ 表示非负适应过程空间。给定非负财富约束，假定再没有别的紧约束，那么，行为人的问题可修改成：

$$\sup_{c\in\mathcal{L}_+} U(c)\text{满足约束 } W_t^c\geqslant 0,t\geqslant 0 \tag{4.24}$$

其中 $W_0^c=w$，而且 $W_t^c=(W_{t-1}^c-c_{t-1})(1+\delta_t)$，$t\geqslant 1$。

(A)假设对所有的 t，有 $\delta_t=\epsilon$，其中 $\epsilon>-1$ 是常数。请给出在(4.24)式有解时关于 α、ρ 和 ϵ 的规则性条件，并求解价值函数和最佳消费控制。提示：运用动态规划法，并可猜测价值函数具有下述形式：对某些常数 k，$V(w)=kw^{\alpha}/\alpha$。再从贝尔曼方程中显示地解出 V，然后说明贝尔曼方程概括了最佳控制的特征[为此，你需说明：对任意可行的 c，以及 $V(w)=U(c^*)$，$V(w)\geqslant U(c)$。其中 c^* 是你的候选控制]。注意，这将要求你证明对任意可行的 c，$\rho^t V(W_t^c)\to 0$。

(B)假设 δ 是 *i. i. d.* 过程。请给出(4.24)式有解的关于 $\beta=\rho E[(1+\delta_1)^{\alpha}]$、$\rho$ 和 α 的规则性条件。请求解价值函数和最佳消费控制。

(C)对 $u(x)=\log(x)$，$x>0$ 和 $u(0)=-\infty$，请再次求解(A)和(B)两部分。效用函数 U 现在可以取值 $-\infty$。

4.10 把习题 3.9 中的(D)和(E)两部分的解扩展到无限时间的情形，可引入其他你认为必要的关于参数 $(\gamma,\alpha,\rho,A,B,\sigma^2)$ 的规则性条件。

4.11 演示可加型贴现效用函数梯度的利茨表述(4.17)式，提示：运用控制收敛定律。

4.12 证明定理 4.2。

4.13 证明(4.18)式，从而说明概率指数收敛于其稳定状态的对应项。

4.14 证明第 4.5 节中的强大数定律版本。提示：运用有限期望 *i. i. d.* 随机变量的强大数定律证明经验分布向量 p_T 几乎肯定收敛于 p。为了证明此点，给定任意 $l\in Z$，令 $\tau_n(l)$ 为 $X_t=l$ 成立的第 n 次时间 $t\geqslant 0$。注意，

$$Q_{nj}=\#\{t:X_t=j,\tau_n(l)\leqslant t<\tau_{n+1}\}$$

具有不依赖于 n 或者初始状态 i 的分布，且对任意 l 和 j，序列 $\{Q_{1j},Q_{2j},\cdots\}$ 和 $\{t_n\}$[满足 $t_n=\tau_{n+1}(l)-\tau_n(l)$]的分布均是不依赖于初始状态 i 的 *i. i. d.*。对 Z 中的任意 l 和 j，考虑下式的特性即可完成证明：

$$\frac{N^{-1}\sum_{n=1}^{N}Q_{nj}}{N^{-1}\sum_{n=1}^{N}t_n}$$

注 释

(第 4.1 节～第 4.2 节)弗里德曼(Freedman，1983)包含马尔可夫链理论。雷瓦兹(Revuz，1975)给

出一般状态空间下马尔可夫过程的处理。第 4.1 节和第 4.2 节是基于卢卡斯(Lucas,1978),尽管这里的细节有所不同。理罗伊(LeRoy,1973)是此类模型的前身。马尔可夫过程 X 所定义的概率空间在贝兹卡斯和施莱弗(Bertsekas and Shreve,1978)中可以找到构造。第 4.1 节中的固定点方法是基于布莱克威尔(Blackwell,1965)。引理 4.1,更一般地说,应被称为布莱克威尔定理,其内容很容易推广到更一般的紧致冲击测量空间 Z,例如,在卢卡斯(Lucas,1978),达菲(Duffie,1988c),或者斯托克伊和卢卡斯(Stokey and Lucas, 1989)中那样。动态规划的一般处理可以在贝兹卡斯和施莱弗(Bertsekas and Shreve,1978)与迪恩金和宇希科维奇(Dynkin and Yushkevich,1979)中找到。方针函数或价值函数的光滑性在本温尼斯特和施埃恩克曼(Benveniste and Scheinkman, 1979)中被论述。桑托斯(Santos,1991,1994)提供了光滑性的成果以及大量有关的资料。包括生产情况下本章部分成果的新版本可在布洛克(Brock,1979,1982)、达菲(Duffie,1988c)、斯托克伊和卢卡斯(Stokey and Lucas, 1989)中找到。此种情形下的递归模型由爱普斯坦恩和泰(Epstein and Zin, 1989)引进,也可参见贝克和布伊德(Becker and Boyd, 1993)、洪和爱普斯坦恩(Hong and Epstein, 1989)、凯恩(Kan, 1995)、马(Ma,1993b,1996)、司基尔伏特(Streufert,1991a, 1991b, 1996)。王(Wang,1993c, 1993d)展示了可以从证券价格数据中区分可加型和非可加型的递归效用。

(第 4.3 节~第 4.4 节)这两节显得稍微有些不传统,其目的是在第 2 章的有限维内容和本章的无限维情形之间搭配一座桥梁。为了保证横向条件,这里采纳了一些强假设。但是,查阅更弱一些的假设就足够了,可参见科切拉库塔(Kocherlakota,1990)。施卡切梅尔(Schachermayer,1994)、桑托斯和伍德福特(Santos and Woodford,1995)给出了此情形以及更一般情形下状态价格缩子存在的条件。格拉斯曼和金(Glasserman and Jin,1999)给出了比较候选等价鞅测度的新计量方法。余(Yu,1999)论述此情形下带磨擦的套利定价问题。

凯恩多利(Kandori,1988)给出了完备市场一般均衡模型的帕累托最优证明和代表性行为人。例子则由下述一些文献给出:阿贝尔(Abel,1988),坎贝尔(Campbell,1986a),多纳尔森、约翰逊和麦拉(Donaldson, Johnsen, and Mehra,1990),杜马斯和卢希安诺(Dumas and Luciano,1989)。均衡的更进一步特征概括则可在普莱斯克特和麦拉(Prescott and Mehra, 1980)与多纳尔森和麦拉(Donaldson and Mehra, 1984)中找到。

关于此情形下均衡和资产定价的一般成果,可参见下述参考资料:阿鲁约、莫泰罗和帕斯克(Araujo, Monteiro, and Páscoa, 1996),赫尔南德兹和桑托斯(Hernandez and Santos,1996),列文(Levine,1989),列文和查姆(Levine and Zame, 1996,1999),卢卡斯(Lucas,1995),麦吉尔和昆兹(Magill and Quinzii,1994,1996a),以及麦拉(Mehra,1988)。静态马尔可夫均衡带有非完备市场和有区别的行为人的存在条件则由达菲、加克浦欧斯、马斯科勒和麦克里南(Duffie, Geanakoplos, Mas-Colell, and McLennan, 1984)给出。

(第 4.5 节)本节给出哈恩森和辛格尔顿(Hansen and Singleton,1982,1983)中用过的估计技术的"雏形"。布朗和吉本斯(Brown and Gibbons, 1985)以另一种形式表述了该模型。哈恩森(Hansen,1982)应用比第 4.5 节更一般的情形阐述了矩的推广方法是一致的。我们已经用了(4.18)式的概率指数收敛来回避冲击过程 X 是静态的假设。在规则性条件下,这可推广到更一般的马尔可夫情形。均匀强大数定理的证明则基于波拉德(Pollard,1984)。矩法估计的一般处理可以在格莱恩特和怀特(Gallant and White,1988)中找到。达菲和辛格尔顿(Duffie and Singleton, 1993),李和英格兰姆(Lee and Ingram,1991),麦克法登(McFadden,1989)以及佩克和波拉德(Pakes and Pollard,1989)把 GMM 推广到

有模拟矩估计的情形。

额外话题 习题4.9基于萨缪尔森(Samuelson,1969)与拉夫哈瑞和施莱尼瓦森(Levhari and Srinivasan,1969),然后又被哈克安森(Hakansson,1970)、布隆姆、伊斯雷和欧哈拉(Blume, Easley, and O'Hara,1982)和其他一些人推广。有关收费栅(turnpike)定理,可参见哈克安森(Hakansson,1974);关于连续时间的成果,可参见第9章的附注。顺沿第4章的脉络,许多更进一步的成果总结在达菲(Duffie, 1988c)和斯托克伊和卢卡斯(Stokey and Lucas,1989)中。

负债约束在提升均衡存在方面的作用在下述参考资料中得到了重视和研究:弗罗瑞查诺和高德尔(Florenzano and Gourdel, 1993),凯霍和列文(Kehoe and Levine,1993),列文和查姆(Levine and Zame, 1996),以及麦吉尔和昆兹(Magill and Quinzii,1994,1996b)。

相关的投机泡沫问题在下述文献中讨论:基勒斯和理罗伊(Gilles and LeRoy,1992a,1992b,1998),麦吉尔和昆兹(Magill and Quinzii,1996a),以及桑托斯和伍德福特(Santos and Woodford,1995)。库茨(Kurz,1993,1997,1998),库茨和贝尔拉提(Kurz and Beltratti,1996),以及库茨和莫特里斯(Kurz and Motolese,1999)考察此情形下静态和理性的含义,并提出行为人概率评估仅受不与长期经验表现相冲突的约束影响的理性信念模型。夏农(Shannon,1996)给出确定条件。哈恩森和萨金特(Hansen and Sargent, 1990)给出了在此情形下二次效用函数和线性动态下的详细的均衡案例。

另有一大批文献资料探讨过含异类行为人的非完备市场的资产定价问题的其中一部分是由麦拉和普莱斯克特(Mehra and Prescott, 1985)指出的股票风险贴水之谜所引起的。这种风险贴水所代表的股票期望回报率与风险债券之间的差额远远超出人们可以从典型的代表性行为人模型中所能找到的差额。毕雷(Bewley,1982)和曼昆(Mankiw,1986)给出了受非完备市场影响的具有启发性的案例。更新的文献资料包括阿卡雅和麦当(Acharya and Madan,1993),亚加利和格特勒(Aiyagari and Gertler, 1991),卡尔威特(Calvet,1999),康斯坦丁尼德斯和达菲(Constantinides and Duffie, 1996),达菲(Duffie, 1992),哈安(Haan,1996),希顿和卢卡斯(Heaton and Lucas,1996),茱迪(Judd,1997),列文和查姆(Levine and Zame,1999),卢卡斯(Lucas,1994),马塞特和辛格尔顿(Marcet and Singleton, 1999),梅尔林(Mehrling,1990,1998),萨琼尼(Sandroni,1995),施埃恩克曼(Scheinkman, 1989),施埃恩克曼和韦斯(Scheinkman and Weiss,1986),史文森和沃纳(Svensson and Werner, 1993),特尔姆(Telmer,1993),以及维尔(Weil,1992)。其他人则试图通过更一般的效用函数,诸如习惯形成模型[参见康斯坦丁尼德斯(Constantinides, 1990)以及哈恩森和杰格那塞恩(Hansen and Jaganathan, 1990]或者递归模型[参见爱普斯坦恩和秦(Epstein and Zin, 1989, 1991)],来解释所谓的股票风险贴水之谜。关于一阶风险厌恶的影响或者莱特不确定性(Knightian uncertainty),可参见爱普斯坦恩和王(Epstein and Wang,1994)。茱迪、库博勒和施迈德斯(Judd, Kubler, and Schmedders,1997)以及桑托斯和维格(Santos and Vigo, 1998)处理此情形下均衡的计算问题。关于均衡计算问题的更多参考资料,请参见本书第1章、第2章和第12章的附注。

杜马斯和卢希安诺(Dumas and Luciano,1989)处理存在交易成本情形下的最佳证券组合选择问题。科弗尔和奥丹特里奇(Cover and Ordentlich,1996)则是最佳长期回报文献资料的一个最新例子。这类文献有时也被称为对数最佳增长率模型。

巴贝瑞斯、黄和桑托斯(Barberis, Huang, and Santos, 1999)提出了强调投资者对负资产回报率的厌恶影响的有限理性资产定价模型。

第二篇　连续时间模型

第二篇是第一篇的连续时间版本。其结果可以说比第一篇更加丰富和微妙，对数学技术的依赖性也更大。明智的做法是把注意力放在这些类似性上而不是技术细节上。理论背后的三大基础力量再次表现为套利、最优化以及均衡。

第5章引入连续交易模型，并导出衍生证券无套利价格的布莱克—斯科尔斯(B-S)偏微分方程(PDE)。哈瑞森—克莱普斯(Harrison-Kreps)模型的等价鞅测度和连续时间情形下的状态价格理论同时在第6章中论述。第7章论述利率期限结构模型，包括布莱克—德曼—托尔(Black-Derman-Toy)模型，瓦斯塞克(Vasicek)模型，考克斯—英格索—罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)模型和奚斯—杰罗—莫顿(Heath-Jarrow-Morton)模型，以及它们的各种推广。第8章也论述允许随机波动性的期权定价模型。由于其分析上的可行性，仿射状态过程的概念在第7章和第8章中被反复应用。第9章运用动态规则法和等价鞅测度或状态价格法对最佳连续时间证券组合选择进行总结。第10章是均衡情形下证券定价的总结，其中的著名模型包括布黎登(Breeden)的基于消费的资本资产定价模型和利率期限结构的一般均衡版考克斯—英格索—罗斯(C-I-R)模型。第11章论述公司证券(诸如债权和股权)的定价问题。该章中最初的模型是基于公司的资本结构，并根据资产充足性来定义违约，最后的模型则假设存在违约发生强度。第12章概述连续时间情形下计算衍生证券价格的三种数值方法：二项近似法，与证券价格离散时间近似的蒙特卡洛(Monte-Carrlo)模拟法，以及与资产价格相对应的PDE方程的有限差分解。

5.

布莱克—斯科尔斯模型

本章论述连续时间情形下有关套利定价最基本的布莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)模型,并推广到非参数多变量的马尔可夫情形。我们先引入不确定性布朗模型和连续证券交易,然后推导出衍生证券无套利价格的偏微分方程。经典的例子为布莱克—斯科尔斯(简称"B-S")期权定价公式。第6章将采用更普遍的技术把研究领域拓展到非马尔可夫情形。

5.1 布朗价格下的交易盈利

我们锁定概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$。所谓的过程即是从$\Omega\times[0,\infty)$到$\mathbb{R}$的可测函数。(请参见附录C,那里有针对该种积空间的可测度的定义。)过程X在时间t的价值为随机变量,并以不同的形式记为X_t、$X(t)$或$X(\cdot,t):\Omega\to\mathbb{R}$。标准布朗运动为具有下述特征的过程$B$:

(a)$B_0=0$几乎肯定成立。

(b)对任意时间t和$s>t$,B_s-B_t具有平均值为零,方差为$s-t$的正态分布。

(c)对任意时间$t_0,\cdots,t_n$,且$0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n<\infty$,随机变量$B(t_0),B(t_1)-B(t_0),\cdots,B(t_n)-B(t_{n-1})$具有独立分布。

(d)对Ω中的每个ω,样本路径$t\mapsto B(\omega,t)$是连续的。

其中很有意义的事实(其证明过程还有一段精彩的历史)是:可以构造概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$,从而使得存在标准布朗运动。1900年,路易斯·拜切利尔(Louis Bachelier)提议将布朗运动作为股票价格模型,这也许是涉及布朗运动的首次科学研究。我们先按他所指出的思路,假设给定布朗运动B为某个证券的价格过程,以后我们再考虑价格过程的更一般情况。

从直观的基础上看，由$\{B_s:0\leqslant s\leqslant t\}$所生成的族集$\mathscr{F}_t^B$应是在时间$t$交易该证券的合理的可用信息模型，因为$\mathscr{F}_t^B$包含直到那时基于该证券价格过程$B$的每一个事件。但就技术的原因而言，我们必须能够给$\Omega$的空集(零概率事件子集)赋值。因为这个原因，我们锁定B的标准价格过滤为$\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t:t\geqslant 0\}$，其中$\mathscr{F}_t$被定义为由$\mathscr{F}_t^B$和空集所生成的族集。概率测度$P$也因通过对任意空集$A$令$P(A)=0$而得到拓延。概率空间的全部内容将在附录C中得到详细的定义。

交易策略为某个描述在每一状态ω和时间t持有$\theta_t(\omega)$数量证券的适应过程θ。如果策略θ在时间t和时间$s>t$之间为常数，譬如说$\bar{\theta}$，那么，两个时间之间的总盈利就为$\bar{\theta}(B_s-B_t)$，即持有数量乘以价格变化。只要交易策略是逐段地为常数，我们就不会有太大的困难来定义两个时间之间的总盈利。为了建立交易盈利的通用模型，交易策略θ要求满足：对任意T，$\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t<\infty$几乎肯定成立。令$\mathscr{L}^2$表示满足该可能性限制的适应过程空间。对$\mathscr{L}^2$中的每一个$\theta$，存在具有连续样品路径的适应过程，记为$\int\theta\mathrm{d}B$，这被称为$\theta$对$B$的随机积分。$\int\theta\mathrm{d}B$的定义将在附录D中论述。过程$\int\theta\mathrm{d}B$在时间$T$的值记为$\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t$，它代表根据交易策略$\theta$交易具有价格过程$B$的证券直到时间$T$所产生的总盈利。

对$\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t$的一种解释可以从其离散时间情形下所对应的$\sum_{t=0}^T\theta_t\Delta^1B_t$中看出，这里$\Delta^1B_t\equiv B_{t+1}-B_t$，也就是说其对应项为下述乘积(在时间过程$t$中)：在时间$t$所持证券数量乘以从时间$t$到时间$t+1$之间的价格变化。更一般地，令$\Delta^nB_t=B_{(t+1)/n}-B_{t/n}$。尽管我们将不作精确表述，但当每单位时间的交易区间n趋于无限时，$\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t$可以被看成是$\sum_{t=0}^{Tn}\theta_{t/n}\Delta^nB_t$的极限。这一陈述从字面上来看是对的，例如，如果$\theta$有连续样品路径，那么，“极限”的意思就是概率上的极限。$\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t$作为离散时间对应项在概率上的极限这一定义可以拓展到更大的一组θ，但也并非足够大到可以包含以后各章节的某些应用。附录D中$\int\theta_t\mathrm{d}B$的定义则容许$\mathscr{L}^2$中的任意θ。

随机积分具有一些特征，这些特征与它是交易盈利模型有关。例如，假设交易策略θ是在$[0,T]$上逐段地为常数，也就是说，对某些停止时间$T_0,\cdots,T_N$，$0=T_0<T_1<\cdots T_N=T$，以及对任意n，我们有$\theta(t)=\theta(T_{n-1})$对所有的$t\in[T_{n-1},T_n)$都成立。那么：

$$\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t=\sum_{n=1}^N\theta(T_{n-1})[B(T_n)-B(T_{n-1})]$$

随机积分作为交易盈利模型的第二个自然特征是线性性质：对$\mathscr{L}^2$中的任意θ和φ，以及

系数 a 和 b，那么，过程 $a\theta+b\varphi$ 也在 $\mathscr{L}^2$ 中，且对任意时间 $T>0$，有：

$$\int_0^T (a\theta_t + b\varphi_t)\mathrm{d}B_t = a\int_0^T \theta_t \mathrm{d}B_t + b\int_0^T \varphi_t \mathrm{d}B_t$$

5.2 鞅交易盈利

标准布朗运动的特性意味着 B 是鞅。(这主要是根据其增量是独立的且具有期望值为零的特征。)如果存在固定常数 k 使得 $|\theta(\omega,t)|\leqslant k$ 对所有的 (ω,t) 都成立。那么，过程 θ 是有界的。对 $\mathscr{L}^2$ 中的任意有界 θ，期望迭代法则和 B 的鞅性表示，对任意的整数时间 t 和 $\tau>t$，有 $E_t(\sum_{s=t}^{\tau}\theta_s\,\Delta^1 B_s)=0$。这意味着，由 $X_0=0$ 和 $X_t=\sum_{s=0}^{t-1}\theta_s\,\Delta^1 B_s$ 定义的离散时间盈利过程 X 自身也是针对离散时间过滤 $\{\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_1,\cdots\}$ 的鞅(这是留给读者的作业)。对连续时间亦有同样的内容：对 $\mathscr{L}^2$ 中的任意界 θ，$\int\theta\mathrm{d}B$ 是一个鞅。这一点是很自然的，因为不可能通过交易期望值不变的证券来产生期望盈利。如果人们不对 θ 的界限或其他性质加以限制，那么，$\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t$ 的期望甚至可能不存在。即使对任意 T，$\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t$ 和它的期望存在，$\int\theta\mathrm{d}B$ 也不一定是鞅。事实上，正像第 6 章中的例子所指出的那样，若不适当地限制 θ，我们也许就找不到合理的交易盈利模型。下面的命题可以帮助我们决定 $\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t$ 的方差期望是否有限，以及 $\int\theta\mathrm{d}B$ 是不是鞅。

考虑下面两个空间：

$$\mathscr{H}^1=\left\{\theta\in\mathscr{L}^2:E\left[\left(\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\right]<\infty,T>0\right\}$$

$$\mathscr{H}^2=\left\{\theta\in\mathscr{L}^2:E\left(\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t\right)<\infty,T>0\right\}$$

显然，$\mathscr{H}^2$ 被包含在 $\mathscr{H}^1$ 中。

命题 5.1 如果 θ 是在 $\mathscr{H}^1$ 中，那么，$\int\theta\mathrm{d}B$ 是一个鞅。如果 $\int\theta\mathrm{d}B$ 是一个鞅，那么，

$$\mathrm{var}\left(\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t\right)=E\left(\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t\right) \tag{5.1}$$

该命题的证明将在注释中注明。

5.3 伊藤价格和盈利

作为证券价格过程模型，标准布朗运动对我们的许多目的来说还显得限制性过多。考虑下述形式的过程：

$$S_t = x + \int_0^t \mu_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}B_s, \qquad t \geqslant 0 \tag{5.2}$$

式中 x 为实数，σ 属于 $\mathscr{L}^2$，μ 属于 $\mathscr{L}^1$。μ 属于 $\mathscr{L}^1$，意味着 μ 是一个适应过程，且 $\int_0^t |\mu_s| \mathrm{d}s < \infty$ 对所有的 t 几乎肯定成立。我们把如同(5.2)式之类的过程称为伊藤(Ito)过程。通常我们把(5.2)式写成下述微分形式：

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t;\ S_0 = x$$

你也可以直观地把 $\mathrm{d}S_t$ 看成是 S 在时间 t 的增量，它由两部分组成："$\mathrm{d}t$"部分和"$\mathrm{d}B_t$"部分。为了进一步解释伊藤过程的这种微分表述，假设 σ 和 μ 具有连续样本路径，并且都属于 $\mathscr{H}^2$。对任意时间 t，在记法上我们有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} E_t(S_\tau)\big|_{\tau=t} = \mu_t \qquad \text{几乎肯定成立} \tag{5.3}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{var}_t(S_\tau)\big|_{\tau=t} = \sigma_t^2 \qquad \text{几乎肯定成立} \tag{5.4}$$

式中，等式的左边表示要取导数，且对任意有限方差的随机变量 X，$\mathrm{var}_t(X) \equiv E_t(X^2) - [E_t(X)]^2$ 是指 X 的 $\mathscr{F}_t$-条件下的方差。在(5.3)式和(5.4)式的意义下，我们可以在基于时间 t 现有信息的条件下，把 μ_t 解释成 S 的期望值的变化率；同样可以把 σ_t^2 解释成 S 的条件方差在时间 t 的变化率。有时候，人们也可能看到相关的不恰当记法"$E_t(\mathrm{d}S_t) = \mu_t \mathrm{d}t$"和"$\mathrm{var}_t(\mathrm{d}S_t) = \sigma_t^2 \mathrm{d}t$"。当然，$\mathrm{d}S_t$ 甚至不是随机变量，所以说，从严格的意义来讲并不正确，纯粹是为了直观上的方便。我们将分别把 μ 和 σ 称为 S 的漂流过程和扩散过程。许多作者在应用"扩散"这一术语时，就是指 σ_t^2 或者与之相关的量。

对具有形式(5.2)的伊藤过程 S，令 $\mathscr{L}(S)$ 表示具有下述特性的适应过程空间：$\{\theta_t \mu_t : t \geqslant 0\}$ 属于 $\mathscr{L}^1$，以及 $\{\theta_t \sigma_t : t \geqslant 0\}$ 属于 $\mathscr{L}^2$。

对 $\mathscr{L}(S)$ 中的 θ，我们定义随机积分为下述伊藤过程：

$$\int_0^T \theta_t \mathrm{d}S_t = \int_0^T \theta_t \mu_t \mathrm{d}t + \int_0^T \theta_t \sigma_t \mathrm{d}B_t, T \geqslant 0 \tag{5.5}$$

给定价格过程 S，我们也把 $\int \theta \mathrm{d}S$ 称为由 θ 产生的盈利过程。如果 $\theta \in \mathscr{L}(S)$，使得 $\{\theta_t \sigma_t :$

$t \geqslant 0$) 属于 $\mathscr{H}^2$，且 $E[(\int_0^T \theta_t \mu_t \mathrm{d}t)^2] < \infty$，那么，我们也说 θ 属于 $\mathscr{H}^2(S)$。根据命题 5.1，如果 θ 属于 $\mathscr{H}^2(S)$，那么，$\int \theta \mathrm{d}S$ 是有限方差过程。

有时候，我们会称适应过程 θ 和 φ 几乎处处相等，意思是说 $E\left(\int_0^\infty | \theta_t - \varphi_t | \mathrm{d}t\right) = 0$。实际上，只要 $\theta = \varphi$ 几乎处处相等，那么，我们就记“$\theta = \varphi$”。这是一个很自然的习惯，因为假设 X 和 Y 为伊藤过程，且 $X_0 = Y_0$ 和 $\mathrm{d}X_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t$，以及 $\mathrm{d}Y_t = a_t \mathrm{d}t + b_t \mathrm{d}B_t$。由于随机积分从我们的目的出发被定义为连续样本路径过程，因此，当且仅当 $\mu = a$ 和 $\sigma = b$ 几乎处处成立时，对所有的 t，$X_t = Y_t$ 几乎肯定成立。我们称此为伊藤过程的惟一分解特征。

5.4 伊藤公式

与其他任何成果相比，伊藤公式更是连续时间情形下资产定价问题明晰求解的基础。

伊藤公式 假设 X 为伊藤过程且 $\mathrm{d}X_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}B_t$。再假设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为两次连续可微。那么，由 $Y_t = f(X_t, t)$ 定义的过程 Y 也是伊藤过程，且

$$\mathrm{d}Y_t = \left[f_x(X_t,t)\mu_t + f_t(X_t,t) + \frac{1}{2} f_{xx}(X_t,t)\sigma_t^2\right]\mathrm{d}t + f_x(X_t,t)\sigma_t \mathrm{d}B_t \qquad (5.6)$$

对伊藤公式(5.6) 的一个推广将在本章的后面出现。

5.5 布莱克—斯科尔斯期权定价公式

考虑一个被称为“股票”的证券，其价格过程为：

$$S_t = x \exp(\alpha t + \sigma B_t), \qquad t \geqslant 0 \qquad (5.7)$$

其中 $x > 0$，α 和 σ 为常数。这个被称为几何布朗运动的过程也常被称为对数正态(log-normal)，因为对任意的 t，$\log(S_t) = \log(x) + \alpha t + \sigma B_t$ 为正态分布。而且，由于 $X_t = \alpha t + \sigma B_t = \int_0^t \alpha \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma \mathrm{d}B_s$ 定义具有常数漂流 α 和扩散 σ 的伊藤过程 X，因此，伊藤公式告诉我们 S 也是伊藤过程，且

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t, \qquad S_0 = x$$

其中 $\mu = \alpha + \sigma^2/2$。根据(5.3)式和(5.4)式，在任意时间 t，S_t 的条件均值的变化率为 μS_t，

条件方差的变化率为 $\sigma^2 S_t^2$，因此，对于在时间 t 投资于该证券上的每 1 美元来说，我们可以把 μ 看成是瞬时期望报酬率，把 σ 看成是回报率的瞬时标准差。这种类型的表述出现在很多文献资料中，人们还经常可以看到与此相关的一些不当记法，例如"$E(\mathrm{d}S_t/S_t)=\mu\mathrm{d}t$"和"$\mathrm{var}(\mathrm{d}S_t/S_t)=\sigma^2\mathrm{d}t$"。系数 σ 也被称为 S 的可变性(volatility)。无论如何，由于 μ 和 σ 的这种简单解释，几何布朗运动就是一个自然的证券价格过程的二参数模型。

考虑第二个被称为"债券"的证券，对某些常数 $\beta_0>0$ 和 r，债券的价格过程 β 被定义为：

$$\beta_t=\beta_0 e^{rt}, \qquad t\geqslant 0 \tag{5.8}$$

很明显，我们可以把 r 解释成连续复利率(continually compounding interest rate)，即无风险贮蓄积累增长的指数函数率。贯穿全书，我们也将 r 称为短期利率，因为 $\{rt: t>0\}$ 可以被看作伊藤过程，那么，β 也是伊藤过程，且

$$d\beta_t=r\beta_t\mathrm{d}t \tag{5.9}$$

我们也可以把(5.9)式看成普通的微分方程，其初始值为 β_0，解为(5.8)式。

我们允许股票的交易策略为 $\mathscr{H}^2(S)$ 中的任意 a，债券的交易策略为 $\mathscr{H}^2(\beta)$ 中的任意 b。交易策略 (a,b) 被说成是自融资(self-financing)的，如果它不产生券息，意即对所有的 t，有：

$$a_tS_t+b_t\beta_t=a_0S_0+b_0\beta_0+\int_0^t a_u\mathrm{d}S_u+\int_0^t b_u\mathrm{d}\beta_u \tag{5.10}$$

自融资条件(5.10)式仅仅是这样一种陈述：证券组合价值的当前值(等式左边)正好等于初始投资加上交易盈利，因此没有券息(获息或付息)产生。

现在考虑第三个被称为"期权"的证券。我们先看股票的欧洲看涨期权，它赋予持有人权利而非义务以一定的履约价格 K 在某一履约日期 T 购买该股票。该期权的价格过程 Y 现在还不知道，我们只知道会有这样一个事实，即 $Y_T=(S_T-K)^+\equiv\max(S_T-K,0)$。这是因为当且仅当 $S_T>K$ 时，该期权会被理性履约(离散时间下的类似情况参见习题 2.1)。

假设存在关于股票和债券的自融资交易策略 (a,b)，且 $a_TS_T+b_T\beta_T=Y_t$。如果 $a_0S_0+b_0\beta_0<Y_0$，那么，你可以以 Y_0 的价格卖出该期权，并在交易策略 (a,b) 中进行初始投资 $a_0S_0+b_0\beta_0$，然后在时间 T 对整个证券组合 $(-1,a_T,b_T)$(期权、股票和债券)进行清盘，则有 $-Y_T+a_TS_T+b_T\beta_T=0$。因此，初始利润 $Y_0-a_0S_0-b_0\beta_0>0$ 是无风险的，所以 $(-1,a,b)$ 是套利。同样，如果 $a_0S_0+b_0\beta_0>Y_0$，那么，策略 $(1,-a,-b)$ 也是套利。因此，如果没有套利，$Y_0=a_0S_0+b_0\beta_0$ 对任意时间 t 都成立，那么，$Y_t=a_tS_t+b_t\beta_t$。连续时间情形下套利的全面定义将在第 6 章给出，就目前我们这种不正规的水平，这样叙述还是相当准确的。我们的目标是说明下面的内容。

布莱克—斯科尔斯公式 如果没有套利，那么，对所有的时间 $t<T$，$Y_t=C(S_t,t)$，其

中，

$$C(x,t)=x\Phi(z)-e^{-r(T-t)}K\Phi(z-\sigma\sqrt{T-t}) \tag{5.11}$$

而

$$z=\frac{\log(x/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{5.12}$$

其中 Φ 为累积标准正态分布函数。

5.6 布莱克—斯科尔斯公式:第一次尝试

我们最终将看到很多不同的方法可以导出布莱克—斯科尔斯公式(5.11)。尽管不是最简短的，但本节下面的方法也许是最显然和有建设性的。我们先假设 $Y_t=C(S_t,t)$，$t<T$，在 $(0,\infty)\times[0,T)$ 上为两次连续可微(这样可以应用伊藤公式)，有关函数 C 的其他情况是未知的。这将导致我们推出(5.11)式，从而使得假设正当并能同时证明结果。

基于上述假设 $Y_t=C(S_t,t)$ 以及伊藤公式，有：

$$\mathrm{d}Y_t=\mu_Y(t)\mathrm{d}t+C_x(S_t,t)\sigma S_t\mathrm{d}B_t, \qquad t<T \tag{5.13}$$

其中

$$\mu_Y(t)=C_x(S_t,t)\mu S_t+C_t(S_t,t)+\frac{1}{2}C_{xx}(S_t,t)\sigma^2S_t^2$$

现在假定存在自融资交易策略 (a,b)，且

$$a_tS_t+b_t\beta_t=Y_t, \qquad t\in[0,T] \tag{5.14}$$

就像第 5.5 节中所阐述的那样。随后我们还会说明该假设的正当性。(5.10)式和(5.14)式以及随机积分线性性质告诉我们：

$$\mathrm{d}Y_t=a_t\mathrm{d}S_t+b_t\mathrm{d}\beta_t=(a_t\mu S_t+b_t\beta_t r)\mathrm{d}t+a_t\sigma S_t\mathrm{d}B_t \tag{5.15}$$

选择交易策略 (a,b) 的方法之一就是令(5.13)式和(5.15)式中 $\mathrm{d}B_t$ 和 $\mathrm{d}t$ 各自的系数一致。事实上，第 5.3 节中所解释的伊藤过程的惟一分解性质告诉我们，这也是惟一能保证(5.13)式和(5.15)式一致的方法。具体来说，我们选择 a_t 使得 $a_t\sigma S_t=C_x(S_t,t)\sigma S_t$。因此，我们令 $a_t=C_x(S_t,t)$。由(5.14)式和 $Y_t=C(S_t,t)$，我们得出 $C_x(S_t,t)S_t+b_t\beta_t=C(S_t,t)$，或

$$b_t=\frac{1}{\beta_t}[C(S_t,t)-C_x(S_t,t)S_t] \tag{5.16}$$

最后，令(5.13)式和(5.15)式中 $\mathrm{d}t$ 的系数一致，对 $t<T$，有：

$$-rC(S_t,t)+C_t(S_t,t)+rS_tC_x(S_t,t)+\frac{1}{2}\sigma^2S_t^2C_{xx}(S_t,t)=0 \tag{5.17}$$

为了使(5.17)式成立，只要当$(x,t)\in(0,\infty)\times[0,T)$时，$C$满足下述偏微分方程(PDE)即可：

$$-rC(x,t)+C_t(x,t)+rxC_x(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2C_{xx}(x,t)=0 \tag{5.18}$$

由事实$Y_T=C(S_T,T)=(S_T-K)^+$可提供下述边界条件：

$$C(x,T)=(x-K)^+,\ x\in(0,\infty) \tag{5.19}$$

通过直接计算导数，你可以说明(5.11)式是(5.18)式和(5.19)式的解(已留作习题)。所有这些事实都证实，由布莱克—斯科尔斯公式(5.11)给出的$C(S_0,0)$是该期权初始价格的可取定价。为了使这个观点有说服力，假设$Y_0>C(S_0,0)$，C由(5.11)式定义。考虑关于期权、股票和债券的策略$(-1,a,b)$，且$a_t=C_x(S_t,t)$，b_t(对$t<T$)由(5.16)式给出，我们可以任意选择a_T和b_T使得(5.14)式得以满足。这不影响自融资条件(5.10)式，因为交易策略在某一单独时间点的价值对随机积分没有影响(关于这点，请参见第5.3节末尾处等式"处处相等"的含义)。其结果是，(a,b)通过构造而成为自融资，并且$a_TS_T+b_T\beta_T=Y_T=(S_T-K)^+$。因此，这一结果有无风险的初始利润：

$$Y_0-a_0S_0-b_0\beta_0=Y_0-C(S_0,0)>0$$

这便定义了一个套利。同样，如果$Y_0<C(S_0,0)$，那么，交易策略$(+1,-a,-b)$为一个套利。所以，$Y_0=C(S_0,0)$确实是无套利的一个必要条件。充分性要复杂一些，我们将在第6章中看到，在温和的有关交易策略的条件下，期权价格的布莱克—斯科尔斯公式也是无套利的充分条件。最后一点要说明的是，"期权对冲应用(option-hedging)"策略(a,b)有如下属性，即a属于$\mathscr{H}^2(S)$，b属于$\mathscr{H}^2(\beta)$。对这点加以说明的要求也被留作课后习题。

交易费用对以上应用的这种推论具有极大的破坏作用。例如，如果交易费用为股票交易市场价值的正的固定分数，那么，上述所构造的股票交易策略a会使总的经纪费用无限大，因为股票交易的数量实际上是无限多的。这一事实以及此种情形下交易费用的文献，将在第6章和第9章的注释中讨论。

5.7 无套利价格随机微分方程

第5.5节中所述对数正态股票价格过程S的微分表达式$dS_t=\mu S_tdt+\sigma S_tdB_t$是下述随机微分方程(SDE)形式的一种特殊情况：

$$dS_t=\mu(S_t,t)dt+\sigma(S_t,t)dB_t,\qquad S_0=x \tag{5.20}$$

其中$\mu:\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$和$\sigma:\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$为给定函数。给定附录E中所讨论的有关$\mu$和$\sigma$的一些规则性条件，存在惟一的伊藤过程$S$，对$\mathbb{R}$中的每一个开始点$x$，$S$是(5.20)式的解。假设由这样的一个解$S$定义的股票价格过程，并考虑由下式定义的价格

过程 β：

$$\beta_t = \beta_0 \exp\left[\int_0^t r(S_u,u)\mathrm{d}u\right] \tag{5.21}$$

其中 $r:\mathbb{R}\times[0,\infty)\mathbb{R}$ 是对(5.21)式中积分的存在性来说表现足够好的函数[即(5.21)式的积分是存在的]。我们可以把 β_t 看成是不断以短期利率 $r(S_t,t)$ 重新投资的投资账户在时间 t 的市场价值。这与下述的伊藤公式的一个简单应用是一致的，即：

$$\mathrm{d}\beta_t = \beta_t r(S_t,t)\mathrm{d}t, \qquad \beta_0>0 \tag{5.22}$$

到目前为止，我们的注意力主要集中在收入为 $Y_T=(S_T-K)^+$ 的期权。现在考虑一种衍生证券，对某些连续函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，其在时间 T 的收入由 $Y_T=g(S_T)$ 定义。由类似于第 5.6 节中的论点，我们可以把该衍生证券的无套利价格过程 Y 表述成 $Y_t=C(S_t,t),t\in[0,T]$，其中 C 为下述偏微分方程的解：

$$-r(x,t)C(x,t)+C_t(x,t)+(x,t)xC_x(x,t)+\frac{1}{2}\sigma(x,t)^2C_{xx}(x,t)=0 \tag{5.23}$$

对 $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T)$，边界条件为：

$$C(x,T)=g(x), \qquad x\in\mathbb{R} \tag{5.24}$$

为了把事情联系起来，现在假设 C 是(5.23)式～(5.24)式的解。如果 $Y_0\neq C(S_0,0)$，那么，应用前述的论点，可得知必定存在套利（这已被留为习题）。即使 C 不是二次连续可微，而仅是 $C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T))$，上述论点也成立，意思是导数 C_x、C_t 和 C_{xx} 在 $\mathbb{R}\times(0,T)$ 上存在且连续，并且连续地延伸至 $\mathbb{R}\times[0,T)$（伊藤公式也可以运用到此类函数）。

如果有方便的方法求解(5.23)式～(5.24)式的偏微分方程，那么，衍生证券无套利价格的偏微分方程的特征概括是非常有用的。数字解技术将在第 12 章中讨论，其方法之一就是基于下节所述解的概率表述的基础之上。

5.8 费恩曼—凯科解

我们可以按下面的方法对偏微分方程(5.23)式～(5.24)式进行简化。对 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 中的任意 (x,t)，令 $Z^{x,t}$ 为由 $Z_s^{x,t}=x, s\leqslant t$ 和下述公式定义的伊藤过程：

$$\mathrm{d}Z_s^{x,t}=r(Z_s^{x,t},s)Z_s^{x,t}\mathrm{d}s+\sigma(Z_s^{x,t},s)\mathrm{d}B_s, s>t \tag{5.25}$$

也就是说，$Z^{x,t}$ 在时间 t 从 x 处开始，而后的变化遵循 SDE(5.25)式。

费恩曼—凯科(Feynman-Kac)条件 *函数 σ、r 和 g 满足附录 E 中所给出的能使费恩曼—凯科解存在的技术性充分条件之一。*

费恩曼—凯科条件确实是技术性的，它限制函数 σ、r 和 g 增长或变化的速度。根据附录 E，我们有下述对 PDE(5.23)式～(5.24)式的解。该解是这样得到的：将所谓的准

价格过程(pseudo-price process)$Z^{x,r}$(其期望回报率为无风险利率)代替原有价格过程 S，然后对衍生证券的贴现收入取期望。这种处理方法有时也称为风险中性估价。这并不是说行为人是风险中性的，而是说从衍生证券定价的角度看，风险中性的情形不失一般性。

费恩曼—凯科解 在费恩曼—凯科条件下，如果不存在套利，那么，在时间 T 具有收入 $g(S_T)$ 的衍生证券的价格过程 Y 为 $Y_t=C(S_t,t)$，其中 C 为(5.23)式～(5.24)式的解，且

$$C(x,t)\equiv E\Big(\exp[-\int_t^T r(Z_s^{x,t},s)\mathrm{d}s]g(Z_T^{x,t})\Big),\ (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T] \tag{5.26}$$

可以验证(作为习题)，(5.26)式可以得出布莱克—斯科尔斯期权定价公式(5.11)式，跟最初得出布莱克—斯科尔斯公式的方法相比，直接计算此期望值显然是更简单的求解 PDE (5.18)式～(5.19)式的方法。第 12 章探讨求解(5.23)式～(5.24)式的数值方法，方法之一就是 FK 解(5.26)式的蒙特卡罗模拟。这非常类似于第 2 章中的离散时间情形下的等价鞅测度无套利价格表述。在第 6 章中，我们将看到这不仅仅是个巧合。

5.9 多维情形

假设 $B^1,\cdots,B^d$ 为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的 d 个独立的标准布朗运动，那么，过程 $B=\{B^1,\cdots,B^d\}$ 被称为 $\mathbb{R}^d$ 中的标准布朗运动。B 的标准过滤$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t:t\geqslant 0\}$的定义类似于一维的情形。给定$\mathbb{F}$，适应过程空间中的子集 $\mathcal{L}^1$、$\mathcal{L}^2$，$\mathcal{H}^1$和 $\mathcal{H}^2$也像第 5.1 节和第 5.2 节中所定义的那样。

在本节的情形下，对$\mathbb{R}$中的某个 x，$\mathcal{L}^1$中的某个 μ 和 $\mathcal{L}^2$中的 $\theta^1,\cdots,\theta^d$，如果

$$X_t=x+\int_0^t\mu_s\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^d\int_0^t\theta_s^i\mathrm{d}B_s^i,\qquad t\geqslant 0 \tag{5.27}$$

那么，X 就是伊藤过程。

为方便起见，(5.27)式也被写成：

$$X_t=x+\int_0^t\mu_s\mathrm{d}s+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}B_s,\qquad t\geqslant 0 \tag{5.28}$$

或者被写成方便的随机微分形式：

$$\mathrm{d}X_t=\mu_t\mathrm{d}t+\theta_t\mathrm{d}B_t;\qquad X_0=x \tag{5.29}$$

如果 $X^1,\cdots,X^N$ 为伊藤过程，那么，我们称 $X=(X^1,\cdots,X^N)$为$\mathbb{R}^N$ 型的伊藤过程，并将其写成：

$$X_t=x+\int_0^t\mu_s\mathrm{d}s+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}B_s,\qquad t\geqslant 0 \tag{5.30}$$

或

$$dX_t=\mu_t dt+\theta_t dB_t;\qquad X_0=x\in\mathbb{R}^N \tag{5.31}$$

其中，μ 和 θ 的取值分别为 $\mathbb{R}^N$ 和 $\mathbb{R}^{N\times d}$ 型（$\mathbb{R}^{N\times d}$ 表示 N 行 d 列的实数矩阵空间）。伊藤公式可以推广如下：

伊藤公式 假设 X 是由(5.30)式给出的 $\mathbb{R}^N$ 型的伊藤过程，并且 f 是在 $C^{2,1}(\mathbb{R}^N\times[0,\infty))$ 内，那么，$\{f(X_t,t):t\geqslant 0\}$ 是伊藤过程，即对任意时间 t，有：

$$f(X,t)-f(X_0,0)+\int_0^t \mathscr{D}_X f(X_s,s)ds+\int_0^t f_x(X_s,s)\theta_s dB_s$$

其中

$$\mathscr{D}_X f(X_t,t)=f_x(X_t,t)\mu_t+f_t(X_t,t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\theta_t\theta_t^T f_{xx}(X_t,t)]$$

这里，f_x、f_t 和 f_{xx} 表示取值分别为 $\mathbb{R}^N$、$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^{N\times N}$ 型的 f 的相应偏导数，$\mathrm{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹（对角元素之和）。

如果 X 和 Y 为取实数的伊藤过程，且 $dX_t=\mu_X(t)dt+\sigma_X(t)dB_t$ 和 $dY_t=\mu_Y(t)+\sigma_Y(t)dB_t$，那么，伊藤公式（对 $N=2$）告诉我们，积 $Z=XY$ 也是伊藤过程，其漂流 μ_Z 由下式给出：

$$\mu_Z(t)=X_t\mu_Y(t)+Y_t\mu_X(t)+\sigma_X(t)\cdot\sigma_Y(t) \tag{5.32}$$

如果 μ_X、μ_Y、σ_X 和 σ_Y 均属 $\mathscr{H}^2$ 型，且具有连续样本路径，那么，应用福比尼定理（Fubini's Theorem）（附录 C），有：

$$\frac{d}{ds}\mathrm{cov}_t(X_s,Y_s)|_{s=t^+}=\sigma_X(t)\cdot\sigma_Y(t)\text{几乎肯定成立} \tag{5.33}$$

其中，$\mathrm{cov}_t(X_s,Y_s)=E_t(X_sY_s)-E_t(X_s)E_t(Y_s)$，等式右边的导数是基于(5.3)式和(5.4)式的直觉的延伸。

如果 X 是 $\mathbb{R}^N$ 型的伊藤过程，$dX_t=\mu_t dt+\sigma_t dB_t$ 以及 $\theta=(\theta^1,\cdots,\theta^N)$ 是使得 $\theta\cdot\mu$ 属于 $\mathscr{L}^1$ 的适应过程向量，以及对任意 i，$\theta\cdot\sigma^i$ 属于 $\mathscr{L}^2$，那么，我们就说 θ 属于 $\mathscr{L}(X)$，这意味着：

$$\int_0^T\theta_t dX_t\equiv\int_0^T\theta_t\cdot\mu_t dt+\int_0^T\theta_t^T\sigma_t dB_t,\ T\geqslant 0$$

被定义为伊藤过程。如果 $E[(\int_0^T\theta_t\cdot\mu_t dt)^2]<\infty$，以及对任意 i，$\theta\cdot\sigma^i$ 也属于 $\mathscr{H}^2$，那么，我们说 θ 属于 $\mathscr{H}^2(X)$，这就意味着 $\int\theta dX$ 为有限方差过程。

假设 $S=(S^1,\cdots,S^N)$ 为 $\mathbb{R}^N$ 型的描述 N 个给定证券价格的伊藤过程，且 S 满足下述随机微分方程：

$$dS_t=\mu(S_t,t)dt+\sigma(S_t,t)dB_t,\qquad S_0=x\in\mathbb{R}^N \tag{5.34}$$

其中，$\mu:\mathbb{R}^N\times[0,\infty)$ 和 $\sigma:\mathbb{R}^N\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^{N\times d}$ 满足足够的规则性（附录 E 中给定的条件）使得(5.34)式的解具有惟一性和存在性。令

$$\beta_t=\beta_0\exp\left[\int_0^t r(S_u,u)du\right],\qquad \beta_0>0 \tag{5.35}$$

定义债券的价格过程，其中 $r:\mathbb{R}^N\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 定义短期连续复利，其行为表现足够使(5.35)式为有定义的伊藤过程。运用伊藤公式，我们也可将上式写成：

$$d\beta_t=\beta_t r(S_t,t)dt,\qquad \beta_0>0 \tag{5.36}$$

最后，令某连续函数 $g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 定义在时间 T 某一衍生证券的收入 $g(S_T)$。(该衍生证券在时间零时的价格还有待我们确定。)

第 5.6 节中的论点又一次可以用来说明，在一定的技术规则性条件和套利的情形下，该衍生证券的价格过程 Y 为 $Y_t=C(S_t,t)$，其中 C 为如下 PDE 的解：

$$\mathscr{D}_Z C(x,t)-r(x,t)C(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T] \tag{5.37}$$

边界条件为：

$$C(x,T)=g(x),\qquad x\in\mathbb{R}^N \tag{5.38}$$

其中

$$\mathscr{D}_Z C(x,t)=C_x(x,t)r(x,t)x+C_t(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(x,t)\sigma(x,t)^{\mathrm{T}}C_{xx}(x,t)] \tag{5.39}$$

我们再次利用在附录 E 中讨论过的关于 PDE(5.37)式～(5.38)式解的概率表述存在性的 (r,σ,g) 的费恩曼—凯科，得出：

费恩曼—凯科解 在费恩曼—凯科条件下，如果不存在套利，那么，在时间 T 有收入 $g(S_T)$ 的衍生证券的价格过程 Y 为 $Y_t=C(S_t,t)$，其中 C 为 PDE(5.37)式～(5.38)式的解，且对每一 $(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]$，有

$$C(x,t)=E\left[\exp\left(-\int_t^T r(Z_s^{x,t},s)ds\right)g(Z_T^{x,t})\right] \tag{5.40}$$

其中 $Z^{x,t}$ 是由下述定义的伊藤过程：$Z_s^{x,t}=x, s\leqslant t$ 和

$$dZ_s^{x,t}=r(Z_s^{x,t},s)Z_s^{x,t}ds+\sigma(Z_s^{x,t},s)dB_s,\qquad s\geqslant t \tag{5.41}$$

下面的习题将提供这种衍生证券无套利定价方法的应用和进一步的推广，使得其能够容纳中期付息和基础马尔可夫状态过程。第 6 章运用更一般的方法把无套利定价方法进一步推广到非马尔可夫情形。第 7 章和第 8 章则提供进一步的应用，例如期货、远期协议、美式期权和利率的期限结构。

习 题

5.1 固定概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 和过滤 $\{\mathscr{F}_t:t\geqslant 0\}$，过程 X 是马尔科夫(Markov)过程，如果对任意时间 t 和对由 $\{X_t:s\geqslant t\}$ 所生的族集为可测度的任意可积随机变量 Y，我们有 $E(Y|\mathscr{F}_t)=E(Y|X_t)$ 几乎肯定成立。特别地，对任意可测度函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $f(X_t)$ 存在有限期望，则对 $s\geqslant t$，我们有 $E[f(X_t)|\mathscr{F}_t]=E[f(X_t)|X_t]$。我们无需证明的一个事实是：标准布朗运动 B 针对其标准过滤是马尔科夫过程。假设 θ 是有界的适应过程。证明：像第 1.2 节中所陈述的那样，由 $X_0=0$ 和 $X_t=\sum_{s=0}^{t-1}\theta_s\Delta^1 B_s, t\geqslant 1$ 所定义的离散时间过程 X 是针对 $\{\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_1,\cdots\}$ 的鞅。

5.2 假设 S 由(5.7)式所定义。运用伊藤公式说明(正如所声明的一样):$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dB_t$,其中 $\mu=\alpha+\sigma^2/2$。

5.3 证明:普通微分方程(5.9)(初始条件 β_0)的解由(5.8)式给出。

5.4 用直接计算导数的方法证明:PDE(5.18)式～(5.19)式的解由布莱克—斯科尔斯(Black-Scholes)公式(5.11)给出。

5.5 推导衍生证券的无套利价值的 PDE(5.23)式。提示:用类似于推导布莱克—斯科尔斯公式 PDE(5.18)式的论点和方法。

5.6 假设衍生证券的无套利价值的 PDE(5.37)式不被满足,譬如说,该证券的初始价格不等于 $C(S_0,0)$,这里 C 是(5.37)式～(5.38)式的解。请构造一个能产生 m 计价单位初始无风险净利润的套利方案,其中,m 是你所选择的任意数。

5.7 假设价格过程 S 由(5.20)式给出的股票,在任意时间 t 按利率 $\delta(S_t,t)$ 支付股息,其中连续函数 $\delta:\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 定义累积息过程 D:$D_t=\int_0^t\delta(S_u,u)du$。该证券的总盈利过程 G 被定义为 $G_t=S_t+D_t$,交易策略 $\theta\in\mathscr{L}(G)$ 所产生的盈利过程为 $\int\theta dG$,即资本盈利和券息盈利的总和。请推导对由 g 定义的衍生证券的无套利价值的能产生(5.23)式的新 PDE,并使其给出其对应的费恩曼—凯科(Feynman—Kac)解,从而进一步推广(5.25)式～(5.26)式的规则性条件。

5.8 假设 S 是由(5.20)式定义的股票价格过程,β 是由(5.21)式定义的债券价格过程。像在第 5.7 节中一样,衍生证券由在时间 T 的一次性总量支付 $g(S_T)$ 定义,也可由累积券息过程 H 定义。累积券息过程 H 的定义由下式给出:$H_t=\int_0^t h(S_\tau,\tau)d\tau$,对某连续函数 $h:\mathbb{R}\times[0,T)\to\mathbb{R}$。由定义可知,如果

$$a_tS_t+b_t\beta_t=a_0S_0+b_0\beta_0+\int_0^t a_u dS_u+\int_0^t b_u d\beta_u-H_t,\qquad t\leqslant T \tag{5.42}$$

和

$$a_TS_T+b_T\beta_T=g(S_T) \tag{5.43}$$

那么,交易策略 $(a,b)\in\mathscr{H}^2(S,\beta)$ 资助(finances)该衍生证券。(5.42)式的意思是,在任何时候,证券组合的当前价值是初始价值加上到目前为止的所有交易盈利,再减去到目前为止的所有衍生证券股息支付。如果 (a,b) 在这种意义上资助该衍生证券且衍生证券的初始价格 Y_0 不等于 $a_0S_0+b_0\beta_0$,那么,就会有套利。例如,如果 $Y_0>a_0S_0+b_0\beta_0$,那么,投资于衍生证券、股票和债券的策略 $(-1,a,b)$ 的累积息过程为 $-H+H=0$,最后的收入为 $-g(S_T)+g(S_T)=0$,但该策略产生了初始无风险利润 $Y_0-a_0S_0-b_0\beta_0>0$。请推导该衍生证券价格的 PDE,从而延展 PDE(5.23)式～(5.24)式,同时请推导其对应的类似于(5.25)式～(5.26)式的费恩曼—凯科解。

5.9 假设 X 是 $\mathbb{R}^K$ 中解下述 SDE 的伊藤(Ito)过程:

$$dX_t=\mu(X_t,t)dt+\sigma(X_t,t)dB_t;\qquad X_0=x$$

我们可以把 X 称为"冲击过程"(例如第 3 章的类似情形)。假设 N 个股票的价格过程 S 被定义为 $S_t=\mathscr{S}(X_t,t)$,其中 $\mathscr{S}$ 是 $C^{2,1}(\mathbb{R}^K\times[0,\infty))$ 的。假设债券价格过程 β 是按下述定义的伊藤过程:$d\beta_t=\beta_t r(X_t,t)dt,\beta_0>0$,其中 $r:\mathbb{R}^K\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是有界连续的。

(A)考虑附加证券,在时间 T 其收益为 $g(X_T)$,其中 $g:\mathbb{R}^K\to\mathbb{R}$,请给出你认为适当的规则性条

件，以便能推广出该证券价格的类似于(5.37)式～(5.38)式的 PDE。然后再给出类似于(5.40)式～(5.41)式的费恩曼—凯科解，包括建立在附录 E 基础之上的充分的技术条件。

(B)把(A)推广到股票支付累积息过程为 D 和附加证券在时间 T 有总量一次性支付 $g(X_T)$，以及累积息伊藤过程 H 的情形。这里，累积息过程 D 是 $\mathbb{R}^N$ 型的伊藤过程，由 $D_t=\int_0^t \delta(X_s,s)\mathrm{d}s$ 定义，其中 $\delta:\mathbb{R}^K\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^N$；累积息过程 H 由 $H_t=\int_0^t h(X_s,s)\mathrm{d}s$ 定义，其中 $h:\mathbb{R}^K\times[0,T]\to\mathbb{R}$。

5.10 假设短期利率过程 r 由有界连续函数 $r:[0,T]\to\mathbb{R}$ 给出。考虑价格过程 S 由下式定义的证券：

$$\mathrm{d}S_t=\mu(S_t)\mathrm{d}t+\sigma(S_t)\mathrm{d}B_t$$

其中 μ 和 σ 满足利普斯基茨(Lipschitz)条件，假设此证券的累积息过程为 D，它由下式定义：$D_t=\int_0^t \delta_u S_u\mathrm{d}u$，其中 $\delta:[0,T]\to\mathbb{R}$ 是连续函数(函数 δ 也常称为“券息收益率”)。

(A)(卖权—买权平价)假设存在以上述证券为标的证券且执行价格为 K，到期日为 T 的欧式买入期权和卖出期权的市场。令 C_0 和 P_0 表示买权和卖权在时间 0 时各自的价格。在没有套利和交易费用的情况下，请给出 P_0 依据 C_0 的明确表达式。

(B)假设对所有的 t，$r_t=0.10$，$\delta_t=0.08$，考虑到期时间 $T=0.25$ 年的欧式期权。假设 $K=50$ 和 $S_0=45$。如果该买权的卖价为 4.75，那么，卖权价是多少？请精确到小数点后两位小数，并列示计算过程。

(C)现在假设券息过程 D 被定义为 $D_t=\int_0^t \delta_\tau \log(S_\tau)\times S_\tau\mathrm{d}\tau$，假设对于某常数 $\epsilon>0$，有 $\sigma(x)=\epsilon x$。请重新求解(A)。然后再计算执行价格 $K=35$ 的欧式买权的价格，假定股票初始价格 $S_0=40$，且对所有的 t，$\delta_t=0.08$，$r_t=0.10$ 和 $\epsilon=35$，假设到期时间是 0.6 年，并说明你的答案的合理性。

5.11 假设杂碎八宝菜(即 Haggis，苏格兰一种极其难闻的食物)的价格(英镑/品脱)遵循由下式定义的过程 H：

$$\mathrm{d}H_t=H_t\mu_H\mathrm{d}t+H_t\sigma_H\mathrm{d}B_t,\qquad H_0>0$$

其中 μ_H 是常数，σ_H 是 $\mathbb{R}^2$ 型的常数向量，B 是 $\mathbb{R}^2$ 型的标准布朗运动。华尔街投资银行大袋金币公司的一位交易员决定，既然几乎所有东西都有期权，杂碎八宝菜也应该有期权。这样，自然就有了在美国出售(签发)以美元计价的期权问题。假设美元的价格，即每 1 美元的英镑数，遵循下述过程：

$$\mathrm{d}D_t=D_t\mu_D\mathrm{d}t+D_t\sigma_D\mathrm{d}B_t,\qquad D_0>0$$

其中 μ_D 是常数，σ_D 是 $\mathbb{R}^2$ 型的常数向量，美国资金市场的连续计复利的短期利率为常数 r_D。尽管在爱丁堡(Edinburgh)有杂碎八宝菜和美元的流动(liquid)市场，但没有活跃的杂碎八宝菜期权市场。因此，大袋金币公司决定签发 3 个月后到期的执行价格为每品脱 6.5 美元的杂碎八宝菜买入期权，同时又用其他交易手段以复制策略的方式覆盖其期权头寸，从而使大袋金币公司获得幅度相当于期权售价超过其复制策略初始投资成本的涨价幅度(所谓的 markup)的无风险利润。

(A)你推荐何种复制策略？

(B)如果期权以获得利润 10%的涨价幅度卖出，那么，请给出明确的大袋金币公司应该向其客户收受的期权价格公式。

(C)假设从美国资金市场上借入资金太笨拙，因为策略的其他两部分(美元和杂碎八宝菜交易)是在

大袋金币公司的爱丁堡办事处做的。如果英镑的短期借款利率 r_p 也是常数，那么，在一定的条件下，可以通过英镑的借贷(而不是美元的借贷)来回答问题(A)和问题(B)吗？如果可以，请给出条件。如果不可以，请证明为什么。如果你认为有用，那么，你可使用关于各系数($\mu_H, \mu_D, \sigma_H, \sigma_D, r_D, r_p$)的任何套利条件(如果确实有任何系数导致套利的话)。

5.12 证明：在第 5.5 节的情形下，根据(5.26)式可以推导出布莱克 斯科尔斯公式(5.11)。

5.13 证明：第 5.6 节中的布莱克—斯科尔斯期权套利交易策略(a,b)正像所假设的那样，有 $a\in\mathcal{H}^2(S)$和$b\in\mathcal{H}^2(\beta)$。

注 释

(第 5.1 节)布朗运动模型首先由拜切利尔(Bachelier, 1900)引入到期权定价的研究中来。

(第 5.2 节～第 5.4 节)卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve, 1988)是有关布朗运动随机微积分的标准参考资料。命题 5.1 可在诸如普罗特(Protter,1990)中找到。

(第 5.5 节～第 5.9 节)布莱克—斯科尔斯(Black and Scholes, 1973)公式被默顿(Merton, 1973b, 1977)进行了推广，并从此而导出成千上百种推广和应用。这里的表述思路是建立在格贝(Gabay, 1982)和达菲(Duffie, 1988a)基础之上的。安德里森、简森和帕尔森(Andreasen, Jensen and Poulsen, 1998)给出了推导布莱克—斯科尔斯公式的多种方法。运用连续时间自融资策略的基本方法作为套利论点的原创应归功于默顿(Merton, 1977)与哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)。通过调整标的股票价格过程，来实现风险中性定价的基本观点应归功于考克斯和罗斯(Cox and Ross, 1976)。这一观点被哈瑞森和克莱普斯(Harrison 和 Kreps, 1979)推广到第 6 章中可找到的等价鞅测度的概念。

额外话题 考克斯和鲁宾斯坦因(Cox and Rubinstein, 1985)是有关期权的标准参考资料，而哈尔(Hull,2000)有更进一步的应用和资料。布莱克—斯科尔斯期权定价公式中的两种不同意义上的波动性(风险)影响可在下述参考资料中找到：伊尔卡洛伊、杰安伯兰克和施莱弗(El Karouri, Jeanblanc, and Shreve,1998)，布瑞格曼、格洛恩迪和维纳(Bregman, Grundy, and Wiener, 1996a)，约翰逊和夏诺(Johnson and Shanno,1987)，以及雷兹曼(Reisman,1986)。关于"随机波动性"模型，可参见第 8.5 节和注释。

下列参考资料给出了随机微积分的其他方法：库特兰德、库博和威林格尔(Cutland, Kopp, and Willinger,1991,1993a,b)应用非标准分析；比克和威林格尔(Bick and Willinger,1994)与威林格尔和塔克库(Willinger and Tacqu,1989)运用弗莫(Föllmer,1981)创建的路径法积分；库尼特莫(Kunitomo, 1993)与库特兰德、库博和威林格尔(Cutland, Kopp, and Willinger,1991,1993a)运用分数布朗运动。此种情形下分数布朗运动的使用讨论，可参见罗杰斯(Rogers,1998)。雷库斯特(Lacoste, 1995)提出导数计算的维纳—混沌版本(Wiener-Chaos)。

习题 5.10 的(C)部分由布鲁斯·格洛恩迪(Bruce Grundy)提供。有关交易费用和其他市场缺陷的情形，可参见第 6 章中的注释。

6.

状态价格和等价鞅测度

本章总结第5章中引入的连续时间情形下的无套利证券定价理论。主要思想是无套利、状态价格的存在、等价鞅测度的存在以及三者之间的等价性。这类似于第2章离散状态下定价理论的成果。本章将进一步推广第5章马尔可夫模式下的一些成果(其建立在PDE方法的基础上)。对那些主要对应用感兴趣的人,可以在第一次阅读本书时跳过本章,因为第7章和第8章的前几节以"黑箱"的方式总结了本章的一些主要结论。

可以证明,状态价格缩子的存在意味着套利的不存在。这样就可推出期望回报的状态价格"贝塔"模型。论述等价鞅测度的条件时,我们以无套利情形下等价鞅测度的充分性为起点。基尔萨诺夫定理(Girsanov's Theorem)(附录D)给出了等价鞅测度存在的条件。此法可以给出布莱克—斯科尔斯公式证明的另一种方法。然后,再将状态价格与等价鞅测度联系起来。我们知道,这两个概念几乎是一样的。在第2章的有限状态模型中,它们的含义是等价的,在本章中,我们将看到它们的区别是纯技术上的。

6.1 套利

我们锁定$\mathbb{R}^d$型的定义于概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的标准布朗运动$B=(B^1,\cdots,B^d)$,限定时间区间为$[0,T]$。我们也锁定B的标准过滤$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t:t\in[0,T]\}$,其定义由第5.9节给出。为了简单起见,我们取$\mathcal{F}$为$\mathcal{F}_T$。假设$N$个给定证券的价格过程组成$\mathbb{R}^N$型的伊藤过程$X=(X^{(1)},\cdots,X^{(N)})$。我们假定每一证券价格过程都在空间$\mathcal{H}^2$中。空间$\mathcal{H}^2$包含满足下述条件的任意伊藤过程$Y$: $\mathrm{d}Y_t=a(t)\mathrm{d}t+b(t)\mathrm{d}B(t)$,且

$$E\left[\left(\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right)^2\right]<\infty \text{ 和 } E\left[\int_0^t b(s)\cdot b(s)\mathrm{d}s\right]<\infty$$

直到本章末为止,我们将一直假设这些证券在时期$[0,T)$内不支付股息,且X_T是时间T

时的含息证券价格向量。

就像第 5.9 节所定义的那样，交易策略 θ 是 $\mathscr{L}(X)$ 中取值为 $\mathbb{R}^N$ 型的过程。简单地说，就是定义交易盈利的随机积分 $\int \theta \mathrm{d}X$ 具有良好的定义。交易策略 θ 为自融资，如果

$$\theta_t \cdot X_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s, \qquad t \leqslant T \tag{6.1}$$

如果存在某过程 r，并且几乎肯定 $\int_0^T |r_t| \mathrm{d}t$ 有限，以及对于某证券，其价格过程 β 严格为正且

$$\beta_t = \beta_0 \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right), \qquad t \in [0, T] \tag{6.2}$$

那么，我们就称 r 为短期利率过程。在这种情况下，$\mathrm{d}\beta_t = r_t \beta_t \mathrm{d}t$，我们可以从瞬时的意义上把 r_t 看成短期的无风险的连续复利率，并且把 β_t 看成是投资账户的市场价值，该投资账户的股息不断地以短期利率 r 进行再投资。

如果 $\theta_0 \cdot X_0 < 0$ 且 $\theta_T \cdot X_T \geqslant 0$ 或者 $\theta_0 \cdot X_0 \leqslant 0$ 且 $\theta_T \cdot X_T > 0$，那么，自融资策略 θ 为套利。（记住，$\theta_T \cdot X_T > 0$ 的意思是 $\theta_T \cdot X_T$ 为非负，且为非零的概率为正。）我们在本章中的主要目标是概括不允许套利的价格过程 X 的特征。

6.2 计量标准的不变性

有时相对于特定的价格过程，经常为了方便而对证券价格进行重新规格化。本节要说明，这种重新规格化本质上没有经济影响。缩子是严格为正的伊藤过程。通过运用缩子 Y，我们可以缩小先前给定的证券价格过程 X，从而得到由 $X_t^Y = X_t Y_t$ 定义的新的价格过程 X^Y。

计量标准不变定律 假设 Y 为缩子，那么，当且仅当 θ 对 X^Y 而言是自融资时，交易策略 θ 对 X 而言是自融资。

证明：令 $W_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s$，$t \in [0, T]$，再令 W^Y 是由 $W_t^Y = W_t Y_t$ 定义的过程。因为 W 和 Y 均是伊藤过程，令 σ_X、σ_W 和 σ_Y 分别表示 X、W 和 Y 相应的扩散，那么，由伊藤公式可得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W_t^Y &= Y_t \mathrm{d}W_t + W_t \mathrm{d}Y_t + \sigma_W(t) \cdot \sigma_Y(t) \mathrm{d}t \\
&= Y_t \theta_t \mathrm{d}X_t + (\theta_t \cdot X_t) \mathrm{d}Y_t + [\theta_t^{\mathrm{T}} \sigma_X(t)] \sigma_Y(t) \mathrm{d}t \\
&= \theta_t \cdot [Y_t \mathrm{d}X_t + X_t \mathrm{d}Y_t + \sigma_X(t) \sigma_Y(t) \mathrm{d}t] \\
&= \theta_t \mathrm{d}X_t^Y
\end{aligned}$$

因此，当且仅当 $\theta_t \cdot X_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s$ 时，$\theta_t \cdot X_t^Y = \theta_0 \cdot X_0^Y + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s^Y$。 □

下面的推论可以立刻从上述计量标准不变性定律、Y 的严格正性以及套利的定义中得出。

推论 6.1 假设 Y 为缩子。当且仅当它针对缩小了的价格过程 X^Y 来说是套利时，交易策略针对 X 来说也是套利。

6.3 状态价格和加倍策略

类似第 2.3 节中的术语，状态价格缩子是具有如下特征的缩子 π：缩小价格过程 X^π 是鞅。在文献资料中，这一概念也经常有其他的术语，例如状态价格密度、边际替代率和定价核。在第 2 章中的离散状态离散时间情形下，我们发现，当且仅当不存在套利时，存在状态价格缩子。在本章中，我们将看到这一结果“几乎”是真实的，只是有一些技术上的区别。但是，我们必须先对交易策略设置一些温和的限制，正如下面的例子所示。

假设我们取 B 为单一布朗运动($d=1$)，对所有的 t，取价格过程 $X=(S,\beta)$，以及 $\mathrm{d}S_t = S_t \mathrm{d}B_t$，这里 $\beta_t = 1$ 且 $S_0 = 1$。尽管 X 是鞅，并且 S 为对数正态过程(就像布莱克—斯科尔斯期权定价模型中所常用的那样)，我们还是能构造一个不需要初始投入而又能在时间 T 产生任意令人满意的正常数收入 $\alpha > 0$ 的套利。为了说明这一点，考虑下面的停止时间问题：

$$\tau = \inf\left\{t : \int_0^t (T-s)^{-1/2} \mathrm{d}B_s = \alpha\right\}$$

附注中引用的资料证明了 $0 < \tau < T$ 几乎肯定成立。这一点也不奇怪，因为当 s 趋近于 T 时，$(T-s)^{-1/2}$“爆炸性”地增长。现在考虑由 $\theta_t = (a_t, b_t)$ 定义的交易策略 θ，其中

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{1}{S_t\sqrt{T-t}}, \qquad t \leqslant \tau \\ &= 0, \qquad\qquad t > \tau \end{aligned} \tag{6.3}$$

和

$$b_t = -a_t S_t + \int_0^t a_u \mathrm{d}S_u \tag{6.4}$$

实际上，当时间向 T 靠近时，a 在风险资产上所下的“赌注”越来越大，而 b 被选定以使得 $\theta = (a,b)$ 是自融资。同样也很明显，$\theta_0 \cdot X_0 = 0$ 且 $\theta_T \cdot X_T = \alpha$ 几乎肯定成立。因此，θ 确实是套利，尽管存在有关证券价格的自然假设。如果我们想要有不允许套利的合理定价模型，那么，我们必须加入一些关于交易策略的技术性限制。

直观地，你可以想像把上述例子与下面的情形相类比：在时间 1/2、3/4、7/8 等用序列

公平独立的硬币投掷下赌注。假设你的目标是在时间 1 到来之前赢取无风险利润 α，那么，这里 α 可以是任意大的数。在时间 1/2 时，进行第一次硬币投掷，你可以下赌注 α 来赌正面朝上，如果第一次投掷结果真的是正面朝上，那么，你就不要再玩了。否则，你就欠对方 α。在时间 3/4 时，进行第二次投掷，你下赌注 2α 来赌正面朝上。如果真的正面朝上，你就赢了，你的目标得以实现，你也不要再玩了。否则，你就欠了对方 3α。但你在第三次投掷时，下赌注 4α，并且如此继续下去。因为有无限多个投掷，你最终总能赢取无风险利润 α(几乎肯定)，因为对无数次的投掷，输的概率为 $(1/2)\cdot(1/2)\cdot(1/2)\cdots=0$。这是一个经典的“加倍策略”。“加倍策略”可以通过设置技术限制加以排除，例如限制投掷的总次数，或者限制允许欠的总数量的信用条款。

对连续时间的交易策略情形，我们有两种方法(任意一种即可)排除“加倍策略”的可能性。其中一种方法要求 θ 具有额外的可积性条件；另一种要求信用约束，从而限制证券组合市场价值 $\theta_t \cdot X_t$ 可以变负的程度。给定状态价格缩子 π，充分可能性条件为 $\theta\in\mathscr{H}^2(X^\pi)$，这正如第 5.9 节中所定义的那样。信用约束是该交易策略缩小后的市场价值 $\theta_t \cdot X_t^\pi$ 有下界，即存在某常数 k，使得对所有的 t，$\theta_t \cdot X_t^\pi \geqslant k$ 几乎肯定成立。我们令 $\underline{\Theta}(X^\pi)$ 表示受此信用约束的交易策略空间。在上述套利例子(6.3)式～(6.4)式中，$\pi\equiv 1$ 定义状态价格缩子，因为 X 自身是鞅。但是，由(6.3)式～(6.4)式定义的交易策略 θ 既不在 $\mathscr{H}^2(X)$ 中，也不在 $\underline{\Theta}(X)$ 中。

命题 6.1 对任意状态价格缩子 π，$\mathscr{H}^2(X^\pi)$ 或 $\underline{\Theta}(X^\pi)$ 中不存在套利。

证明：假设 π 为状态价格缩子。令 θ 为任意自融资交易策略。

先假设 θ 是在 $\mathscr{H}^2(X^\pi)$ 中。因为 X^π 是鞅，对某取值为 $\mathbb{R}^{N\times d}$ 型过程(根据附录 D 中的鞅表述定理)，我们有 $\mathrm{d}X_t^\pi = v_t \mathrm{d}B_t$。条件 $\theta\in\mathscr{H}^2(X^\pi)$ 意味着 $E\left(\int_0^T \| \theta_t v_t \|^2 \mathrm{d}t\right) < \infty$，由命题 5.1 有 $E\left(\int_0^T \theta_t \mathrm{d}X_t^\pi\right) = 0$。由计量标准不变性法则，$\theta$ 对 X^π 是自融资的，而且我们有：

$$\theta_0 \cdot X_0^\pi = E\left(\theta_T \cdot X_T^\pi - \int_0^T \theta_t \mathrm{d}X_t^\pi\right) = E(\theta_T \cdot X_T^\pi)$$

如果 $\theta_T \cdot X_T^\pi \geqslant 0$，那么 $\theta_0 \cdot X_0^\pi \geqslant 0$。同样，如果 $\theta_T \cdot X_T^\pi > 0$，那么 $\theta_0 \cdot X_0^\pi > 0$。因此，可以得出 θ 对 X^π 不可能是套利。推论 6.1 告诉我们，θ 对 X 不是套利。

现在假设 θ 属于 $\underline{\Theta}(X^\pi)$。因为 X^π 是鞅，$\int \theta \mathrm{d}X^\pi$ 是局部鞅(定义在附录 D 中给出)。由计量标准不变性定律可知，因为 θ 对 X 是自融资，θ 对 X^π 也必定是自融资。据此以及自融资条件(6.1)，我们明白由 $W_t = \theta_t \cdot X_t^\pi$ 定义的财富过程 W 是局部鞅。因为 $\theta\in\underline{\Theta}(X^\pi)$，我们知道 W 也有下界。因为有下界的局部鞅是上鞅(附录 D)，我们知道 $E(W_T) \leqslant W_0$。据此，如果 $\theta_T \cdot X_T > 0$，那么 $W_T > 0$，所以 $W_0 > 0$，并且 $\theta_0 \cdot X_0 > 0$。同样，如果 $\theta_T \cdot X_T \geqslant 0$，那么 $W_T \geqslant 0$，所以 $W_T \geqslant 0$，并且 $\theta_0 \cdot X_0 \geqslant 0$。这意味着 θ 不是套利。 □

6.4 期望回报率

假设 π 对 X 是状态价格缩子，考虑任意具有价格过程 S 的证券。因为对适当的 μ_π 和 σ_π，状态价格缩子是伊藤过程，我们可以写 $d\pi_t=\mu_\pi(t)dt+\sigma_\pi(t)dB_t$。因为 S 是伊藤过程，对某个 μ_S 和 σ_S，我们也可以写 $dS_t=\mu_S(t)dt+\sigma_S(t)dB_t$。$S^\pi$ 是鞅，其漂移为 0。由伊藤公式可知，几乎处处有：

$$0=\mu_\pi(t)S_t+\mu_S(t)\pi_t+\sigma_S(t)\cdot\sigma_\pi(t)$$

我们假设 S 是严格的正过程，重新安排上式得：

$$\frac{\mu_S(t)}{S_t}=\frac{-\mu_\pi(t)}{\pi_t}-\frac{\sigma_S(t)\cdot\sigma_\pi(t)}{\pi_t S_t} \tag{6.5}$$

该证券的累积回报过程是由下述定义的伊藤过程：$R_0=0$ 和

$$dR_t=\mu_R(t)dt+\sigma_R(t)dB_t\equiv\frac{\mu_S(t)}{S_t}dt+\frac{\sigma_S(t)}{S_t}dB_t$$

现在，我们可以写 $dS_t=S_t dR_t$。回过头来看(5.3)式和(5.4)式，μ_R 可以被看成是条件期望回报率，$\sigma_R(t)\cdot\sigma_R(t)$可以被看成是回报的条件方差的变化率。我们把(6.5)式重新表述为：

$$\mu_R(t)-\hat{r}_t=-\frac{1}{\pi_t}\sigma_R(t)\cdot\sigma_\pi(t) \tag{6.6}$$

其中 $\hat{r}_t=-\mu_\pi(t)/\pi_t$。在(5.33)式的意义下，$\sigma_R(t)\cdot\sigma_\pi(t)$的意思是 R 和 π 的增量的“瞬时协方差”。于是，(6.6)式让人回忆起第 1.6 节中的结果。如果 $\sigma_R(t)=0$，那么，$\mu_R(t)=\hat{r}_t$，因此，短期无风险利率过程如果存在的话，则必须是 $\hat{r}$。总之，(6.6)式的意思是：超额期望回报率与瞬时条件协方差(回报与状态价格之间的)成正比。正比例系数 $-1/\pi_t$ 不依赖于该证券。虽然这种表述有些松散，但(6.6)式自身是不含糊的。

在推导(6.6)式时，由于我们只取某种特别的证券，因此，这样的限制是不必要的。同样的公式原则上可以应用到任意自融资的交易策略 θ 的回报上。为了定义该回报，令 W^θ 表示由 $W_t^\theta=\theta_t\cdot X_t$ 定义的相应的市场价值过程。

如果 W^θ 严格为正，那么，θ 的累积回报过程 R^θ 由下式定义：

$$R_t^\theta=\int_0^t\frac{1}{W_s^\theta}dW_s^\theta,\qquad t\in[0,T]$$

可以验证(作为习题)，R^θ 的漂移 μ_θ 和扩散 σ_θ 满足下述由(6.6)式延伸出来的回报限制：

$$\mu_\theta(t)-\hat{r}_t=-\frac{1}{\pi_t}\sigma_\theta(t)\cdot\sigma_\pi(t) \tag{6.7}$$

我们现在会看到(6.7)式可以导出类似于第 2 章中的期望回报贝塔模型。我们总是

可以找到取值分别为$\mathbb{R}^N$和$\mathbb{R}^d$型的适应过程φ和ϵ，使得：

$$\sigma_\pi(t)=\sigma_X(t)^\top\varphi_t+\epsilon_t \text{ 和 } \sigma_X(t)\epsilon_t=0,\quad t\in[0,T]$$

其中，σ_X是价格过程X的取值为$\mathbb{R}^{N\times d}$型的扩散。对$\Omega\times[0,T]$中的任意(ω,t)，向量$\sigma_X(\omega,t)^\top\varphi(\omega,t)$是$\sigma_\pi(\omega,t)$在$\mathbb{R}^d$中向矩阵$\sigma_X(\omega,t)$的行的张量的正交投影。假设$\theta=(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(N)})$是自融资交易策略，且$\sigma_X^\top\theta=\sigma_X^\top\varphi$。（例如，对短期利率过程$r$，如果$X_t^{(1)}=\exp(\int_0^t r_s\mathrm{d}s)$，那么，我们可以通过令$\theta_t^{(j)}=\varphi_t^{(j)}$、$j>1$来构造$\theta$，并选择$\theta^{(1)}$使得自融资条件得到满足。）因为$\theta$是自融资的，所以，$\theta$的市场价格过程$W^\theta$是伊藤过程。我们假设初始证券组合$\theta_0$可以被选定使得$W^\theta$严格为正，那么，相应的回报过程$R^*\equiv R^\theta$可以被很好地定义。因为$W^\theta$的扩散为$\sigma_X^\top\varphi$，因此$R^*$的扩散为$\sigma^*\equiv\sigma_X^\top\varphi/W^\theta$。对任意伊藤回报过程$R$，运用$\sigma_R(\omega,t)$是（在每种状态$\omega$下）$\sigma_X(\omega,t)$的行的线性组合的事实，(6.6)式告诉我们：

$$\begin{aligned}\mu_R(t)-\hat{r}_t&=-\frac{1}{\pi_t}\sigma_R(t)\cdot\sigma_\pi(t)\\&=-\frac{1}{\pi_t}\sigma_R(t)\cdot[\sigma_X(t)^\top\varphi_t+\epsilon_t]\\&=-\frac{W_t^\theta}{\pi_t}\sigma_R(t)\cdot\sigma_t^*\end{aligned}$$

这意味着$\sigma_R(t)\cdot\epsilon_t=0$。特别地，对回报过程$R^*$，我们有：

$$\mu_t^*-\hat{r}_t=\frac{-W_t^\theta}{\pi_t}\sigma_t^*\cdot\sigma_t^*$$

其中，μ^*是R^*的漂移（期望回报率）。把W_t^θ/π_t的表达式代回(6.6)式，即可得到下述状态价格贝塔模型：

$$\mu_R(t)-\hat{r}_t=\beta_R(t)(\mu_t^*-\hat{r}_t)\tag{6.8}$$

其中

$$\beta_R(t)=\frac{\sigma_R(t)\cdot\sigma_t^*}{\sigma_t^*\cdot\sigma_t^*}$$

从“瞬时”的意义来说，$\sigma_t^*\cdot\sigma_t^*$表示$\mathrm{d}R_t^*$的条件方差，$\sigma_R(t)\cdot\sigma_t^*$表示$\mathrm{d}R_t$与$\mathrm{d}R_t^*$之间的条件协方差，我们可以把(6.8)式看成第1.6节和习题2.6(C)中的状态价格贝塔模型在连续时间情形下的对应。同样，我们可以松散地把R^*看成一个具有下述特征的回报过程：其增量与状态价格缩子π的增量之间的条件相关系数是最大的。本书第10章将开发一个特殊的情形——基于消费的资本资产定价模型。

6.5 等价鞅测度

$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度Q可以被说成是等价于给定的P，当且仅当$P(A)>0$时，对任

意事件 A，我们有 $Q(A)>0$。如果 X 是针对 Q 的鞅，并且拉顿—尼科代姆导数(Radon-Nikodym derivative)$\frac{dQ}{dp}$(在附录 C 中定义)存在有限方差，那么，等价概率测度 Q 是 N 个给定证券的价格过程的一个等价鞅测度。有限方差条件是一种技术上的方便，但注释中的参考资料在讨论等价鞅测度时并没有普遍采用这一条件。等价鞅测度有时也被称为"风险中性"测度。

在第 2 章中的有限状态情形下，可以证明状态价格缩子的存在相当于(缩小后的)等价鞅测度的存在。在本章的稍后部分，我们将看到在连续时间情形下支持这种等价性的技术条件。除了能给出资产定价和投资问题概念上的简化之外，等价鞅测度的运用还因为鞅的大量有用特征可以简化推理和计算。

首先，我们建立等价测度能充分确保不存在套利。稍后我们将说明，下述定律的无套利条件技术而意味着等价鞅测度的存在。除了技术性问题之外，此论点与第 2 章中用来证明这种等价性的论点是一样的。像第 6.3 节中一样，我们需要应用可积性条件或交易策略的信用约束。

定理 6.1 如果价格过程 X 允许等价鞅测度，那么，$\mathcal{H}^2(X)$或$\underline{\Theta}(X)$中不存在套利。

证明：此定理的证明非常类似于命题 1.1 的证明。令 Q 是一个等价鞅测度。令 θ 为任意自融资交易策略。

证明的思路基于 θ 是有界的情形(我们目前暂先假设这种有界性)。X 是 Q 下的鞅这一事实意味着 $E^Q(\int_0^t \theta_t dX_t)=0$。因此，自融资条件(6.1)意味着：

$$\theta_0 \cdot X_0 = E^Q(\theta_T \cdot X_T - \int_0^T \theta_t dX_t) = E^Q(\theta_T X_T)$$

因此，如果 $\theta_T \cdot X_T \geqslant 0$，那么，$\theta_0 \cdot X_0 \geqslant 0$。同样，如果 $\theta_T \cdot X_T > 0$，那么，$\theta_0 \cdot X_0 > 0$。因此，运用有界的交易策略是不可能构造出套利的。

对任意自融资交易策略 $\theta \in \mathcal{H}^2(x)$ 的情形，需要更多的技术细节来证明 $E^Q(\int_0^T \theta_t dX_t) = 0$。由于 X 是伊藤过程，对应适当的 μ 和 σ，我们可以写 $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$。根据扩散不变原理(参见附录 D)，$Q$ 下存在 $\mathbb{R}^d$ 维的标准布朗运动 B^Q，使得 $dX_t = \sigma_t dB_t^Q$。令 $Y = \int_0^T \| \theta_t \sigma_t \|^2 dt$。因为 θ 是在 $\mathcal{H}^2(X)$中，Y 在 P 下具有有限期望。两个具有有限方差的随机变量的积具有有限期望，所以$\frac{dQ}{dP}\sqrt{Y}$也在 P 下具有有限期望。因此，$E^Q(\sqrt{Y}) < \infty$。命题 5.1 意味着 $\int \theta dX$ 是一个 Q 鞅，所以，$E^Q(\int_0^T \theta_t dX_t) = 0$。此种情形证明的其余部分还包括 θ 为有界的论点。

对于 $\theta \in \underline{\Theta}(X)$ 的情形，命题 6.1 的证明中所用到的论点意味着由 $W_t = \theta_t \cdot X_t$ 定义的

财富过程 W 是 Q 下的一个上鞅，使得 $E^Q(\theta_T \cdot X_T) \leqslant \theta_0 \cdot X_0$，这意味着 θ 不可能是一个套利。 □

在绝大多数情形下，上述定理的应用是遵循下述引理的线索进行。该引理是第 6.2 节中的计量标准不变定律的引理的后果。

推论 6.2 如果存在缩子 Y 使得缩小后的价格过程 X^Y 允许等价鞅测度，那么，$\mathcal{H}^2(X^Y)$ 中或 $\underline{\Theta}(X^Y)$ 中不存在套利。

如果存在短期利率过程 r，那么，在应用中通常取由 $Y_t=\exp(-\int_0^t r_s \mathrm{d}s)$ 定义的缩子 Y。如果 r 有界，那么，我们有 $\mathcal{H}^2(X^Y)=\mathcal{H}^2(X)$ 和 $\underline{\Theta}(X^Y)=\underline{\Theta}(X)$，因此，前述成果可以也用更自然的形式表述。

6.6 状态价格和鞅测度

我们现在考虑等价鞅测度和状态价格缩子之间的关系。我们发现它们实际上是几乎相同的概念。我们继续采用第 6.1 节的构造，包括 N 个证券的价格过程 X。

对等价于 P 的概率测度 Q，其密度过程 ξ 为由下式定义的鞅：

$$\xi_t=E_t\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right), \qquad t\in[0,T] \tag{6.9}$$

其中，$\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$ 是 Q 对 P 的拉顿—尼科代姆导数。正像附录 C 所述，对任意时间 t 和 $s>t$，以及任意 $\mathcal{F}_s$ 可测的随机变量 W 且 $E^Q(|W|)<\infty$，有：

$$E_t^Q(W)=\frac{E_t(\xi_s W)}{\xi_t}, \qquad t\in[0,T] \tag{6.10}$$

命题 6.2 假设存在短期利率过程 r，令 Y 被定义为 $Y_t=\exp(-\int_0^t r_s \mathrm{d}s)$。假设 Y 被缩小后，存在等价鞅测度，其密度过程为 ξ。那么，状态价格缩子 π 由 $\pi_t=\xi_t Y_t$ 定义，给定对所有的 t，$\mathrm{var}(\pi_t)<\infty$。反过来，假设 π 是状态价格缩子，令 ξ 由下式定义：

$$\xi_t=\exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right)\frac{\pi_t}{\pi_0}, \qquad t\in[0,T] \tag{6.11}$$

那么，给定 $\mathrm{var}(\xi_T)$ 有限，ξ 是等价鞅测度的密度过程。

证明：假设在被 Y 缩小后，存在等价鞅测度 Q，其密度过程为 ξ。令 $\pi=\xi Y$，那么，对任意时间 t 和 $s>t$，运用(6.10)，有：

$$E_t(\pi_s X_s)=E_t(\xi_s X_s^Y)=\xi_t E_t^Q(X_s^Y)=\xi_t X_t^Y=\pi_t X_t \tag{6.12}$$

(这些期望值存在，因为 X_s 和 π_s 均有有限方差。)这表明 X^* 是鞅，所以 π 确实是状态价格缩子。

反过来，假设 π 是状态价格缩子，并令 ξ 由(6.11)式定义。把状态价格缩子的定义应用到价格过程 $\beta=1/Y$ 上，我们看到 ξ 是严格为正的鞅，且

$$E(\xi_T)=\frac{1}{\pi_0}E(\beta_T\pi_T)=\beta_0=1$$

所以，ξ 确实是某等价鞅概率测度 Q 的密度。在命题的陈述中已经给出 $\xi_T=\frac{dQ}{dP}$ 存在有限方差，我们只需说明，X^Y 是 Q 鞅。但这一点通过应用(6.12)式可立即得到。 □

状态价格缩子与等价鞅测度之间的一般等价性在第 2 章中不借助于复杂的技术而在比较简单的情形下进行了阐述。本章情形下的一个习题将进一步探讨这种等价性。

6.7 基尔萨诺夫和风险市场价格

我们现在寻找支持等价鞅测度存在的有关 X 的便利条件。我们也将探讨如何计算这种测度，以及这种测度惟一性的条件。

假设 Q 为等价于 P 的任意给定概率测度，其密度过程为 ξ。鞅表述定理(附录 D)告诉我们，可以把 ξ 表述成以下形式的随机积分：

$$d\xi_t=\gamma_t dB_t$$

对某一适应过程 $\gamma=(\gamma^{(1)},\cdots,\gamma^{(d)})$，且 $\int_0^T\gamma_t\cdot\gamma_t dt<\infty$ 几乎肯定成立。基尔萨诺夫定理(Girsanov's Theorem)(附录 D)告诉我们，$\mathbb{R}^d$ 中 Q 下的标准布朗运动 B^Q 由下述定义：$B_0^Q=0$ 和 $dB_t^Q=dB_t+\eta_t dt$，其中 $\eta_t=-\gamma_t/\xi_t$。因为 X 是伊藤过程，我们可以写 $dX_t=\mu_t dt+\sigma_t dB_t$，所以：

$$dX_t=(\mu_t-\sigma_t\eta_t)dt+\sigma_t dB_t^Q$$

因为 X 是在 $\mathcal{H}^2$ 中，所以存在充分必要条件使得 X 为 Q 鞅，其漂移为零，这意味着几乎处处有：

$$\sigma(\omega,t)\eta(\omega,t)=\mu(\omega,t),\qquad(\omega,t)\in\Omega\times[0,T] \tag{6.13}$$

因此，线性方程系统(6.13)的解 η 的存在(几乎处处)是 X 的等价鞅测度存在的必要条件。再辅之以其他的技术条件，我们将发现这也是充分条件。

我们也可以把(6.13)式的解 η 看成在如下两者之间提供一种比例关系：价格变化率的平均值(μ)和由 d 维布朗运动产生价格变化的“风险”量(σ)。由于这个原因，任意这种解 η 被称为 X 的风险市场价格过程(market-price-of-risk process)。意思是，$\eta_i(t)$ 是在时间 t 承担 $B^{(i)}$ 的增量(风险)以价格漂移计价的“单位价格”。

计量标准缩子为某一证券的价格过程的导数。通常，我们先选择某计量标准缩子 Y，然后计算缩小的价格过程 X^Y 的风险市场价格。从技术上看，这比较方便，因为其中一个

证券，即所谓的计量标准证券，其价格在缩小后总是等于 1。如果存在短期利率过程 r，那么，典型的计量标准缩子则由 Y 给定，这里 $Y_t=-\exp(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s)$。

如果不存在风险市场价格，那么，你可以猜测有些事情肯定“有问题”，就像下面的内容所证实的那样。

引理 6.1 假设对某计量标准缩子 Y，不存在 X^Y 的风险市场价格过程，那么，$\underline{\Theta}(X^Y)$ 和 $\mathscr{H}^2(X^Y)$ 中存在套利，并且不存在 X^Y 的等价鞅测度。

证明：假设 X^Y 有漂移过程 μ^Y 和扩散 σ^Y，且 $\sigma^Y\eta=\mu^Y$ 的解 η 不存在。那么，通过线性代数运算，存在取值为 $\mathbb{R}^N$ 型的行向量适应过程 θ 使得 $\theta\sigma^Y\equiv 0$ 和 $\theta\mu^Y\neq 0$。对任意 (ω,t)，如果 $\theta(\omega,t)\mu^Y(\omega,t)<0$，将 (ω,t) 置为零，那么，我们可以得出 $\theta\mu^Y>0$。（只要得出的 θ 过程不恒等于零，此法就可行；如果是这样，那么，这一方法也可用于 $-\theta$ 的情形。）θ 的这些特征在被任意严格为正的适应过程相乘后保持不变，所以不失一般性，我们假设 θ 是在 $\mathscr{H}^2(X^Y)$ 中。最后，因为与该缩子对应的计量标准证券的价格在缩小后总是恒等于 1，所以，我们也可以选择对该计量标准证券的交易策略，除了上述特殊之处，θ 为自融资。也就是说，不失一般性，假设计量标准证券是最后一个证券，我们可以采用(6.4)式中所述的相同观点，令：

$$\theta_t^{(N)}=\sum_{i=1}^{N-1}-\theta_t^{(i)}X_t^{Y,(i)}+\int_0^t\theta_s^{(i)}\mathrm{d}X_s^{Y,(i)}$$

因此，θ 是 $\mathscr{H}^2(X^Y)$ 中的自融资交易策略，且 $\theta_0\cdot X_0^Y=0$，由 $W_t=\theta_t\cdot X_t^Y$ 定义的交易策略的财富过程 W 是递增的且不为常数。特别地，θ 是在 $\underline{\Theta}(X^Y)$ 中。因此，θ 对 X^Y 是套利，根据计量标准不变性法则，θ 对 X 也是套利。

最后，导致(6.13)式的推理意味着如果不存在风险市场价格过程，那么，X^Y 就没有等价鞅测度。 □

如果 $\sigma(\omega,t)$ 的秩小于 d，那么，(6.13)式可能有多个解 $\eta(\omega,t)$。因此，可能存在一个以上的风险市场价格过程。如果存在至少一个风险市场价格，那么，我们总是可以方便地找出“最小模”的风险市场价格，记为 η^X。具体来说，我们可以按如下方法构造 η^X，令 $\hat{\sigma}$ 和 $\hat{\mu}$ 分别按下述方法得到：尽可能地消除 $\sigma(\omega,t)$ 中的线性相关行，并尽可能地消除 $\mu(\omega,t)$ 中的相应元素。不管这一点是怎么做的，如果 X 有风险市场价格，那么，下式惟一地定义了独特的风险市场价格 η^X：

$$\eta_t^X=\hat{\sigma}_t^{\mathrm{T}}(\hat{\sigma}\hat{\sigma}_t^{\mathrm{T}})^{-1}\hat{\mu}_t$$

对任意取值为 $\mathbb{R}^d$ 型的适应过程 η，我们令：

$$v(\eta)_t=\frac{1}{2}\int_0^t\eta_s\cdot\eta_s\mathrm{d}s$$

如果几乎肯定 $v(\eta)_T$ 有限，我们令：

$$\mathscr{E}(-\eta)_t = \exp\left[-\int_0^t \eta_s \mathrm{d}B_s - v(\eta)_t\right], \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

过程 $\mathscr{E}(-\eta)$被称为$-\eta$的随机指数函数，令 ξ 由 $\xi_t = \mathscr{E}(-\eta)_t$ 定义，由伊藤公式得出：

$$\mathrm{d}\xi_t = -\xi_t \eta_t \mathrm{d}B_t$$

所以，ξ 是一个局部鞅，能使 ξ 足够成为鞅的诺维可夫条件(Novikov's Condition)(附录D)所要求的 $\exp[v(\eta)_T]$期望值有限。如果诺维可夫条件满足，且 $\mathscr{E}(-\eta)_T$ 存在有限方差，那么，我们说 η 是 L^2 归纳的。例如，如果 η 有界，那么，它就是 L^2 可归纳的。可以证明(作为习题)，如果 η 是 L^2 可归纳的，那么，η^X 也是可归纳的，所以检验 η^X 的这一特征就够了。

所有这些使得 L^2 可归纳性是等价鞅测度存在的方便条件。

定理 6.2 如果 X 有 L^2 可归纳的风险市场价格过程(X 的风险市场价格为有界即可保证此条件满足)，那么，就存在 X 的某一等价鞅测度，且在 $\mathscr{H}^2(X)$和$\underline{\Theta}(X)$中不存在套利。

证明：如果 X 有 L^2 可归纳的风险市场价格，我们令 $\xi = \mathscr{E}(-\eta^X)$。由诺维可夫条件可知，$\xi$ 是正鞅。我们有 $\xi_0 = \mathscr{E}(-\eta)_0 = e^0 = 1$，所以 ξ 确实是由 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P = \xi_T$ 定义的等价概率测度的密度过程。由 L^2 可归纳性的定义，$\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$ 的方差是有限的。剩下来就是再证明 X 是 Q 鞅。

由基尔萨诺夫定理，$\mathbb{R}^d$ 中 Q 测度下标准布朗运动 B^Q 被定义为：$\mathrm{d}B_t^Q = \mathrm{d}B_t + \eta_t \mathrm{d}t$。因此，$\mathrm{d}X_t = \sigma_t \mathrm{d}B_t^Q$。因为 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$ 存在有限方差，且每一证券价格过程 $X^{(i)}$ 在 H^2 中，再次运用定理 6.1 的证明所用的论点，我们有：

$$E^Q\left[\left(\int_0^T \sigma^{(i)}(t) \cdot \sigma^{(i)}(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2}\right] < \infty$$

因此，由命题 5.1 可知 $X^{(i)}$ 是 Q 鞅，并且 Q 是等价鞅测度。$\mathscr{H}^2(X)$或$\underline{\Theta}(X)$中不存在套利从定理 6.1 中即可得出。 □

将此结果与前述定理结合起来，我们看到，风险市场价格的存在是必要的，再辅之以技术性的可积条件，就是无"常规"套利和等价鞅测度存在的充分条件。

为了得到惟一等价鞅测度，我们可以应用以下事实：对任意此种测度 Q，基尔萨诺夫定理告诉我们对某些风险市场价格 η，肯定有 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P = \mathscr{E}(-\eta)_T$，如果 $\sigma(\omega,t)$的最大秩为 d，那么，(6.13)式最多只能有一个解 $\eta(\omega,t)$。最大秩条件相当于 $\sigma(\omega,t)$的行的张量属于 $\mathbb{R}^d$ 的条件，这非常类似于第 2 章发现的等价鞅测度惟一性条件。

命题 6.3 如果几乎处处有秩 $\mathrm{rank}(\sigma) = d$，那么，最多存在一个风险市场价格和一个等价鞅测度。如果存在惟一的风险市场价格过程，那么，几乎处处有秩 $\mathrm{rank}(\sigma) = d$。

6.8 布莱克—斯科尔斯模型的再次尝试

假设给定证券价格过程为 $X=(S^{(1)},\cdots,S^{(N-1)},\beta)$，其中，对 $S=(S^{(1)},\cdots,S^{(N-1)})$，有

$$dS_t=\mu_t dt+\sigma_t dB_t$$

和

$$d\beta_t=r_t\beta_t dt,\qquad \beta_0>0$$

其中 μ、σ 和 r 是取值分别为 $\mathbb{R}^{N-1}$、$\mathbb{R}^{(N-1)\times d}$ 和 $\mathbb{R}$ 型的适应过程。为了方便起见，我们再假设短期利率过程 r 是有界的。那么，$Y=\beta^{-1}$ 是方便的计量标准缩子，并且我们令 $Z=SY$。由伊藤公式，

$$dZ_t=\left(-r_tZ_t+\frac{\mu_t}{\beta_t}\right)dt+\frac{\sigma_t}{\beta_t}dB_t$$

为了能够把定理 6.2 运用到缩小的价格过程 $\hat{X}=(Z,1)$，只需知道 Z 有 L^2 可归纳风险市场价格。若给定这一点，就存在等价鞅测度 Q，且 $\mathcal{H}^2(X)$ 和 $\underline{\Theta}(X)$ 中无套利。现在假设这种情况存在。由附录 D 的扩散不变结果，$\mathbb{R}^d$ 中 Q 下存在标准布朗运动 B^Q，使得：

$$dZ_t=\frac{\sigma_t}{\beta_t}dB_t^Q$$

因为 $S=\beta Z$，再应用伊藤公式，有：

$$dS_t=r_tS_tdt+\sigma_tdB_t^Q \tag{6.14}$$

(6.14)式对无套利资产定价是非常重要的中间成果，它明确地表述了在概率测度 Q 下，“贴现”价格过程 S/β 为鞅时证券的价格变化规律。例如，它可以让我们很容易同下面一样再次得出布莱克—斯科尔斯公式。

假设在具有价格过程 $S^{(1)},\cdots,S^{(N-1)}$ 的证券中，其中一个是关于另一个的看涨期权。为方便起见，我们用 U 表示看涨期权的价格过程，用 V 表示基础证券的价格过程，因此，对给定到期时间 T 和履约价格 K，有 $U_T=(V_T-K)^+$。因为 UY 根据假设为 Q 下的鞅，我们有：

$$U_t=\beta_tE_t^Q\left(\frac{U_T}{\beta_T}\right)=E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_sds\right)(V_T-K)^+\right] \tag{6.15}$$

作为习题，要求读者验证这就是下述情形中的布莱克—斯科尔斯公式：$d=1$，$N=3$，$V_0>0$，且 $\bar{r}$ 为常数和 $\bar{\sigma}$ 为非零，使得对所有的 t，$r_t=\bar{r}$ 和 $dV_t=V_t\mu_V(t)dt+V_t\bar{\sigma}dB_t$，其中 μ_V 为有界的适应过程。在此情形中，Z 确实有 L^2 可归纳的风险市场价格过程(作为习题)，所以等价鞅测度的假设是合理的。再精确一点，由(6.15)式给定的期权价格过程足够使得

套利不存在(充分条件)。第 6.10 节将正式地探讨布莱克—斯科尔斯公式是不是 $\mathscr{H}^2(X)$ 或 $\underline{\Theta}(X)$ 中无套利的必要条件。但我们已经可以看到,定义布莱克—斯科尔斯公式的(6.15)式的期望不依赖于被选择等价鞅测度,所以你应该期望布莱克—斯科尔斯公式也是无套利的必要条件。例如,如果(6.15)式不满足,S/β 不可能有等价鞅测度。不幸的是,由于纯粹的技术原因,这不足以直接说明(6.15)式就是无"常规"套利的必要条件,因为我们没有无套利与等价鞅测度存在之间精确等价性。第 6.10 节阐述了其他方法可以用来论述必要性。

在布莱克—斯科尔斯模式下,我们有最多一个等价鞅测度,因为 $\bar{\sigma}$ 非零意味着 σ 几乎处处具有最大秩 $d=1$。因此,由命题 6.3 可知,正好存在一个等价鞅测度。

基尔萨诺夫定理的详细计算并没有在"风险中性行为"的无套利证券价格的实际解(6.14)中出现,后者可以通过仅检查术语 σ 和 r 给出。这一结果可以拓展到如第 6.14 节中所讨论的无限期间情形。

6.9 完备市场

我们说随机变量 W 可以被自融资交易策略 θ 复制,如果它作为终值可由 $W=\theta_T\cdot X_T$ 得到。本节的最基本目的就是要给出价格过程 X 的扩散 σ 的简单张量条件,使得在此条件下,再辅之以可积技术条件,任意随机变量均可被复制出来(不需要借助于"加倍策略")。

命题 6.4 假设 Y 是计量标准缩子,Q 是已缩小的价格过程 X^Y 的等价鞅测度。假设 X^Y 的扩散 σ^Y 的秩几乎处处是 d。另外,W 为任意满足 $E^Q(|WY|)<\infty$ 的随机变量,那么,就存在自融资交易策略 θ 可复制 W,且其市场价值过程 $\{\theta_t\cdot X_t^Y:0\leqslant t\leqslant T\}$ 是 Q 鞅。

证明:不失一般性,我们假设计量标准证券是 N 个证券中的最后一个,并记 $X^Y=(Z,1)$。令 B^Q 为 Q 下 $\mathbb{R}^d$ 中由基尔萨诺夫定理得到的标准布朗运动。因为 B^Q 在 Q 下有鞅表述特征,因此存在某个 φ,使得:

$$E_t^Q(WY_T)=E^Q(WY_T)+\int_0^t\varphi_s\mathrm{d}B_s^Q,\qquad t\in[0,T] \tag{6.16}$$

根据关于 σ^Y 的秩的假设和事实 $\sigma_N^Y=0$,存在适应过程 $\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(N-1)}$ 可以解

$$\sum_{j=1}^{N-1}\theta_t^{(j)}\sigma_{jl}^Y=\varphi_t^{\mathrm{T}},\qquad t\in[0,T] \tag{6.17}$$

令 $\theta^{(N)}$ 由下式定义:

$$\theta_t^{(N)}=E^Q(WY_T)+\sum_{j=1}^{N-1}\left(\int_0^t\theta_s^{(j)}\mathrm{d}Z_s^{(j)}-\theta_t^{(j)}Z_t^{(j)}\right) \tag{6.18}$$

那么，$\theta=(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(N)})$是自融资的，且$\theta_T\cdot X_T^Y=WY_T$。由计量标准不变性定理，$\theta$针对$X$也是自融资的，且$\theta_T\cdot X_T=W$。由于$\int\varphi\mathrm{d}B^Q$按构造是$Q$鞅，(6.16)式～(6.18)式意味着$\{\theta_t\cdot X_t^Y:0\leqslant t\leqslant T\}$也是$Q$鞅。 □

为了进一步探讨价格过程X的动态张量特征，我们令$\Theta(X)$表示$\mathscr{H}^2(X)$中的自融资交易策略空间，那么，X的市场空间(marketed space)为：

$$M(X)=\{\theta_T\cdot X_T:\theta\in\Theta(X)\}$$

因为Θ是$\mathscr{H}^2(X)$的子集，我们知道$M(X)$是$L^2(P)$的子集。$L^2(P)$为所有具有有限方差(因而也具有有限期望)的随机变量空间。如果市场空间$M(X)$实际上等于空间$L^2(P)$，那么，我们就说市场是完备的。我们现在的目标是要发展命题6.4，找到完备市场的充分必要条件。

$M(X)$是闭的就意味着如果$W_1,W_2,\cdots$是$M(X)$中的序列，且W是满足$E[(W-W_n)^2]\to0$的随机变量，那么，W也在$M(X)$中(这意味着W也可以被Θ中的某个交易策略复制)。出于技术性的原因，这一封闭性特征非常有用。下面的结果来自附注中所引用的资料。

引理 6.2 假设Y是计量标准缩子，且存在X^Y的有界风险市场价格过程，那么，$M(X^Y)$是闭的。

我们现在可以利用上述定理获得完全市场的一个简单条件。

定理 6.3 对有界短期利率r，令$Y_t=\exp(\int_0^t-r_s\mathrm{d}s)$。对$\mathrm{d}X_t=\mu_t\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}B_t$，假设对$X^Y$存在有界风险市场价格过程，当且仅当几乎处处有秩$\mathrm{rank}(\sigma)=d$时，市场就是完备的。

证明：令η为X^Y的有界风险市场价格过程，Q为其对应的等价鞅测度。对取值为$\mathbb{R}^{N-1}$型的伊藤过程Z，我们取$X^Y=(Z,1)$。令B^Q为$\mathbb{R}_d$中Q下由$\mathrm{d}B_t^Q=\mathrm{d}B_t+\eta_t\mathrm{d}t$定义的标准布朗运动。令$W$为有界随机变量。

由伊藤公式，对任意(ω,t)，$X^Y=XY$的扩散σ^Y具有与σ相同的张量，因而其秩几乎处处为d。由命题6.4，存在自融资交易策略θ使得$\theta_T\cdot X_T=W$，且其缩小的市场价值过程V是Q鞅。因为W是有界的，且$\mathrm{d}V_t=\varphi_t\mathrm{d}B_t^Q$，其中$\varphi$由(6.16)式给出，命题5.1告诉我们，$\theta\sigma=\varphi$本质上也是有界的。(也就是说，存在常数$k$，使得$E(\int_0^T\delta_t\mathrm{d}t)=0$，其中只要$\|\varphi_t\|\geqslant k$，那么$\delta_t=1$，否则$\delta_t=0$。)由风险市场价值过程的定义，有$\theta\mu=\theta\sigma\eta$。由假设可知，$\eta$是有界的，所以$\theta\mu$本质上也是有界的，因此$\theta$是在$\mathscr{H}^2(X)$中。这就证明了任意有界的$W$可以被$\Theta(X)$中的某个$\theta$复制的论点。

现在假设W是在$L^2(P)$中。对每一正整数n，我们用有界随机变量W_n来近似W，只要$|W(\omega)|\leqslant n$，W_n就被定义为$W_n(\omega)=W(\omega)$，否则$W_n(\omega)=0$。由于对所有的n来说，

W_n 均在市场空间之中，又因为 $E[(W-W_n)^2]\to 0$，根据前述定理，我们可知 W 在 $M(X)$ 中。因此 $M(X)=L^2(P)$。

反之，假设秩 $\text{rank}(\sigma)=d$ 几乎处处不成立。我们将说明，市场是不完备的。由 σ 的秩的假设，以及 X^1 的扩散 σ^1 和 X 的扩散 σ 对所有的 (ω,t) 均有相同张量的事实，我们知道存在某有界适应过程 φ，使得对(6.17)式找不到解 $\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(N-1)}$，那么，$\mathcal{H}^2(X)$ 中针对 $(Z,1)$ 不存在自融资交易策略 θ 使得 $\theta_T\cdot(Z_T,1)=\int_0^T\varphi_t dB_t^Q$。由计量标准不变性定律，$\Theta(X)$ 中不存在 θ 使得 $\theta_T\cdot X_T=W$，其中 $W=\exp(\int_0^T r_t dt)\int_0^T\varphi_t dB_t^Q$。因为 φ、r 和 η 均有界，所以 W 是在 $L^2(P)$ 中。

6.10 富余证券定价

我们现在回到第 6.8 节中的布莱克—斯科尔斯例子。让我们回忆一下，在那里，基础布朗运动 B 是一维的，有两个原始证券，其价格过程分别为 V 和 β，其中 V 是几何布朗运动；对常数利率 $\bar{r}$，$\beta_t=e^{rt}$。对仅有这两个证券的市场，存在风险市场价格过程，结果是市场是完备的，证券价格被 β 缩小后，存在等价鞅测度 Q，且 $\Theta(X)$ 中无套利。

现在考虑履约价格为 K 的某个期权，其在时间 T 支付利息 $(V_T-K)^+$。我们的结论是可以应用布莱克—斯科尔斯公式，即该期权的价格过程 U 由下式给出：

$$U_t=E_t^Q[e^{-r(T-t)}(V_T-K)^+]$$

在第 6.8 节中，我们阐明这一定价公式是 (β,V,U) 不存在“常规”套利的充分条件。现在我们要说明，这一公式是具有该种特征的期权的惟一无套利价格过程。（实际上，这已经在第 5 章中说明，但下面的论点使我们得出更一般的定律。）

做法如下：由于 V_T 存在有限方差，因此期权收入 $(V_T-K)^+$ 也存在有限方差。为了建立悖论，假设实际的期权价格过程方程 $\hat{U}$ 不是 U。对任意常数 $\epsilon>0$，令 A_ϵ^+ 表示对某 $t\in[0,T]$，事件 $\hat{U}_t-U_t\geqslant\epsilon$。令 A_ϵ^- 表示对某 $t\in[0,T]$，事件 $U_t-\hat{U}_t\geqslant\epsilon$，因为 U 和 $\hat{U}$ 被假定成不同的过程，故存在 $\epsilon>0$ 使得其中至少一个事件 A_ϵ^+ 或 A_ϵ^- 有严格正概率。不失一般性，假设 $P(A_\epsilon^-)>0$，且令 $\tau=\inf\{t:\hat{U}_t-U_t\geqslant\epsilon\}$，即 τ 为在 $[0,T]$ 中取值的具有严格正概率的停止时间。

由命题 6.4 可知，$\mathcal{H}^2(\beta,V)$ 中存在自融资交易策略 $\theta=(\theta^{(0)},\theta^{(1)})$ 可复制 $(V_T-K)^+$，由 θ 是自融资的事实、计量标准不变性法则以及 Q 为 $(1,V/\beta)$ 的等价鞅测度的事实，我们有：

$$\theta_t^{(0)}\beta_t+\theta_t^{(1)}V_t=E_t^{Q}(e^{-r(T-t)}(V_T-K)^+)=U_t$$

令 φ 是取值为 $\mathbb{R}^3$ 型的交易策略，它定义投资以短期利率证券为计价单位，在基础证券及期权上，它被定义为 $\varphi_t=0, t<\tau$ 和

$$\varphi_t=(\theta_t^{(0)}+e^{r(t-\tau)}\epsilon,\theta_t^{(1)},-1), \qquad t\geqslant\tau$$

其中 $(\theta^{(0)},\theta^{(1)})$ 是上面所描述的期权复制策略。可以验证，φ 是自融资的，且 $\varphi_T\cdot(\beta_T,V_T,\hat{U}_T)>0$，这意味着 φ 是 $\mathcal{H}^2(\beta,V,U)$ 中的一个套利。

更广泛地，给定 N 个原始证券的一般价格过程 X，如果它的最终价值 U_T 可以被 $\Theta(X)$ 中的交易策略 θ 复制，那么，我们就说具有价格过程 U 的证券是富余的。证券完备市场意味着任何这种证券(存在有限方差价格过程)都是富余的。

定理 6.4 假设 X 允许等价鞅测度 Q。给定 X，考虑 H^2 中具有价格过程 U 的富余证券，当且仅当 U 是 Q 鞅时，$(X,U)\equiv(X^{(1)},\cdots,X^{(N)},U)$ 不允许 $H^2(X,U)$ 中含套利。

证明：如果 U 是 Q 鞅，那么，Q 是 (X,U) 的等价鞅测度，由定理 6.1 可知，$\mathcal{H}^2(X,U)$ 中无套利。反之，假设 U 不是 Q 鞅，那么，前述布莱克—斯科尔斯的例子中所用的论点可以推广到此情形，因而就意味着 $\mathcal{H}^2(X,U)$ 中存在套利。 □

上述结果通常在紧缩以后应用。在富余证券定义中，你也可以容易地在定理的陈述中，用有关 U 的类似条件取代 $\mathcal{H}^2(X,U)$ 的交易策略的信用约束类 $\underline{\Theta}(X,U)$。

6.11 无套利中的鞅测度

到目前为止，我们已经充分地考虑和利用了等价鞅测度的存在是无常规套利存在的充分条件。现在我们来面对与之相反的问题：无常规套利意味着等价鞅测度存在吗？在第 2 章有限维的模式下，我们知道答案总是："改变计量标准后，的确如此。"类似的无限维情形，原则上也有这种等价性，但技术处理有差别。因为这是一个技术性问题，所以第一次阅读本书时可以跳过本节。

给定 N 个证券的价格过程 X，假设 Θ 中不存在套利，那么，对 $M(X)$ 中的每一个 W [即对 $\Theta(X)$ 中的某个 θ，任意 $W=\theta_T\cdot X_T$]，令 $\psi(W)=\theta_0\cdot X_0$ 表示获得收入 W 所需的惟一初始投资。我们知道函数 $\psi: M(X)\to\mathbb{R}$ 被惟一很好地定义，因为，如果 $\Theta(X)$ 中有两个交易策略 θ 和 φ，满足 $\theta_T\cdot X_T=\varphi_T\cdot X_T$，且 $\theta_0\cdot X_0>\varphi_0\cdot X_0$，那么，$\varphi-\theta$ 是套利。函数是线性的，因为随机积分是线性的。最后，由于不存在套利，ψ 是严格递增的，意即当 $W>W'$ 时，$\psi(W)>\psi(W')$。市场空间 $M(X)$ 是 $L^2(P)$ 的线性子空间，因为当 $Z=\theta_T\cdot X_T$ 和 $W=\varphi_T\cdot X_T$ 在 $M(X)$ 中时，对任意的常数 a 和 b，$aZ+bW$ 也是在 M 中。(应用随机积分的线性性质，可知 $a\theta+b\varphi$ 是自融资策略，由此点即可得出上述内容。)

因为技术性问题，等价鞅测度的存在不能单独地从 $\mathscr{H}^2(X)$ 中无套利这一点得出。注释中所引用的一些参考资料也确实提供了一些反例。因此，我们必须有更强的条件。近似套利是 $M(X)$ 中满足 $\psi(Z_n)\leqslant 0$（对所有 n）的序列 $\{Z_n\}$，使得 $L^2(P)$ 中存在某序列 $\{Z'_n\}$ 满足对所有的 n，$Z'_n\leqslant Z_n$ 以及对 $Z'>0$，有 $E[(Z'_n-Z')^2]\to 0$。意思是没有任何 Z_n 具有正的市场价值，同时 Z_n 大于 Z'_n，Z'_n 又收敛于正的非零随机变量。例如，假设 θ 是 $\Theta(X)$ 中的套利并满足 $\theta_T\cdot X_T>0$，那么，由 $Z_n=\theta_T\cdot X_T$ 对所有 n 定义的序列 $\{Z_n\}$ 为近似套利（只需取 $Z'_n=\theta_T\cdot X_T$ 对所有的 n 都成立）。给定存在有界短期利率过程，或者在其他弱假设下，$\Theta(X)$ 中无近似套利的存在确实是比无套利存在更强的假设，且其差别也只是在无限维模式下由于技术性的原因而显得重要。如果我们把 $\mathscr{H}^2(X)$ 中无套利的假设强化为无近似套利，那么，我们可以得出等价鞅测度的存在。下面的内容来自附注中引用的资料，但有稍许改变。

命题 6.5 假设 $X^{(1)}\equiv 1$，当且仅当对 X 存在等价鞅测度时，对 X 不存在近似套利。

证明：假设不存在近似套利，那么，就不存在套利，并且定价函数 $\psi: M(X)\to\mathbb{R}$ 对 X 是被很好定义的、线性的和严格递增的。由注释中所引用的技术成果可知，哈恩—巴拿赫定理（Hahn-Banach Theorem）的一种变形有时也被称为克瑞普斯—严定理（Kreps-Yan Theorem），ψ 可以被“拓展”成严格递增的线性函数 $\bar{\Psi}: L^2(P)\to\mathbb{R}$。所谓“拓展”，我们的意思是，对 $M(X)$ 中的任意 W，$\Psi(W)=\psi(W)$。因为 Ψ 是递增和线性的，$L^2(P)$ 的利茨表述（Riesz Representation）定理意味着 $L^2(P)$ 中存在惟一的 π，使得：

$$\Psi(W)=E(\pi W),\quad W\in L^2(P)$$

因为 $X^{(1)}\equiv 1$，我们有 $E(\pi X_T^{(1)})=X_0^{(1)}=1$，所以 $E(\pi)=1$。令 Q 是由 $dQ/dP=\pi$ 定义的概率测度。因为 Ψ 是严格递增的，$\pi\gg 0$，所以 Q 等价于 P。

显然，$X^{(1)}$ 是鞅。为了说明 $X^{(i)}$ 对任意 $i>1$ 是 Q 鞅，令 τ 为取值于 $[0,T]$ 的任意停止时间，再令 θ 为下述所定义的交易策略：

(a)对 $t\neq i$ 和 $j\neq 1$，$\theta_t^j=0$。

(b)对 $t\leqslant\tau$，$\theta_t^i=1$；对 $t>\tau$，$\theta_t^i=0$。

(c)对 $t\leqslant\tau$，$\theta_t^1=0$；对 $t>\tau$，$\theta_t^1=X_\tau^i$。

这意味着 θ 为下述交易策略：在时间 0，买入第 i 个证券，在时间 τ 卖出该证券，再把出售该证券所得的收入投入计量标准证券。容易看出，θ 是在 $\Theta(X)$ 中，而且 $\theta_T\cdot X_T=X_0^{(i)}$，初始投资为 $X_0^{(i)}=\psi(X_\tau^{(i)})=E(\pi X_\tau^{(i)})=E^Q(X_\tau^{(i)})$。由杜博（Doob）的选择抽样定理（附录 C）可以看出，上述特征说明 $X^{(i)}$ 是 Q 鞅。由于 dQ/dP 为有限方差，因此，Q 是 X 的等价鞅测度。

反之，如果存在等价鞅测度 Q，那么，由定理 6.1 可知，$\mathscr{H}^2(X)$ 中不存在套利，且由 $\Psi(W)=E^Q(W)$ 定义的线性函数 $\Psi: L^2(P)\to\mathbb{R}$ 是定价函数 ψ 的拓展。为了设置一个悖

论，假设$\{W_n\}$是近似套利，那么，$L^2(P)$中存在某序列$\{W'_n\}$使得$E^Q(W'_n)\leqslant E^Q(W_n)\leqslant 0$，而且$E^Q(W'_n)$收敛于严格为正的数。因为这是不可能的，因此，不存在近似套利。 □

推论 6.3 假设存在有界短期利率过程r，那么，当且仅当对紧缩的价格过程X^Y存在等价鞅测度时，对X不存在近似套利，其中$Y_t=\exp(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s)$。

证明：当Y紧缩后，其中有一个证券的价格恒等于1。因为r是有界的，当且仅当交易策略θ对X^Y是近似套利时，它对X也是近似套利。然后，该定理即可运用。 □

6.12 有息情形下的套利定价

本节和下一节把基本套利定价方法推广到在期间$[0,T]$支付券息的证券。考虑作为伊藤过程的某个证券的累积券息过程。这表示直到时间t由该证券支付的累积总额为D_t。例如，如果$D_t=\int_0^t \delta_s\mathrm{d}s$，那么，$\delta$就表示券息率过程，就像习题5.7、习题5.8和习题5.9所处理的那样，给定某累积券息过程D和相应的证券价格过程X，获利过程$G=X+D$测量因持有该证券而产生的总(资本加券息)获利。一个交易策略现被定义为$\mathscr{L}(G)$中的一个过程θ，因而允许我们定义随机积分$\int\theta\mathrm{d}G$表示由θ产生的总获利。根据随机积分的线性属性，如果$\int\theta\mathrm{d}X$和$\int\theta\mathrm{d}D$被良好地定义，那么$\int\theta\mathrm{d}G=\int\theta\mathrm{d}X+\int\theta\mathrm{d}D$，即资本获利和券息获利之和。

假设我们给定N个证券，这N个证券由其价格过程$X=(X^{(1)},\cdots,X^{(N)})$和累积券息过程$D=(D^{(1)},\cdots,D^{(N)})$定义，而其相应的获利过程为$G=X+D$。就现在而言，我们假设，对每个$j$，$X^{(j)}$和$D^{(j)}$为$H^2$中的伊藤过程。推广我们早些时候的定义可知，如果

$$\theta_t\cdot X_t=\theta_0\cdot X_0+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}G_s,\qquad t\in[0,T]$$

那么，交易策略θ是自融资的。像以前一样，一个套利即是一个自融资交易策略θ，那么，它满足$\theta_0\cdot X_0\leqslant 0$和$\theta_T\cdot X_T>0$，或者$\theta_0\cdot X_0<0$和$\theta_T\cdot\theta_T\geqslant 0$。

我们可以推广我们早些时候在不存在满足某种可能性或信用约束的套利情形下概括证券价格特征的成果。券息—价格偶(D,X)的一种等价鞅测度被定义为是一种等价概率测度Q(在其下，$G=X+D$是鞅)使得$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$存在有限方差。等价鞅测度的存在性告诉我们，运用定理6.1中用过的相同论点，在$\mathscr{H}^2(G)$或$\Theta(X)$中不存在套利。

给定一个交易策略θ，如果存在一个伊藤过程D^θ使得：

$$D_t^\theta=\theta_0\cdot X_0+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}G_s-\theta_t\cdot X_t,\qquad t\in[0,T]$$

那么，我们就说 D^θ 是由 θ 产生的累积券息过程。假设存在 (D,X) 的等价鞅测度 Q，再考虑另一个由累积券息过程 H 和价格过程 V 定义的证券。假设 H 和 V 均在 H^2 中。假设这一额外的证券是冗余的，即存在某交易策略 $\theta\in\mathcal{H}^2(G)$ 使得 $D^\theta=H$ 和 $\theta_T\cdot X_T=V_T$。$\mathcal{H}^2((G,H))$ 中不存在套利意味着对所有的 t，我们几乎肯定有 $V_t=\theta_t\cdot X_t$。由此，该冗余证券的获利过程 $V+H$ 也是 Q 下的一个鞅，其证明是定理 6.4 的证明的简单推广。

在 (D,X) 的某个等价鞅测度 Q 下，我们对任意时间 $t\in[0,T]$ 有：

$$X_t+D_t=G_t=E_t^Q(G_T)=E_t^Q(X_T+D_T)$$

因此，$X_t=E_t^Q(X_T+D_T-D_t)$。例如，如果 D 是由 $D_t=\int_0^t\delta_s\mathrm{d}s$ 定义，那么，

$$X_t=E_t^Q(X_T+\int_t^T\delta_s\mathrm{d}s)\tag{6.19}$$

给定息价偶 (D,X)，原则上不应因为缩小 Y 使得计价标准改变而产生任何经济意义的影响。我们可以写对适当的 μ_Y 和 σ_Y，有 $\mathrm{d}Y_t=\mu_Y(t)\mathrm{d}t+\sigma_Y(t)\mathrm{d}B_t$；以及对适当的 μ_D 和 σ_D，有 $\mathrm{d}D_t=\mu_D(t)\mathrm{d}t+\sigma_D(t)\mathrm{d}B_t$。缩小后的累积券息过程 D^Y 被定义为 $\mathrm{d}D_t^Y=Y_t\mathrm{d}D_t+\sigma_D(t)\cdot\sigma_Y(t)\mathrm{d}t$。缩小后的获利过程 G^Y 被定义为 $G_t^Y=D_t^Y+X_tY_t$。这就导出更通用版本的计价标准不变性定理，其证明则被留作习题。

引理 6.3(计价标准不变性) *假设 θ 是一个针对 (D,X) 的交易策略，其产生伊藤券息过程 D^θ。如果 Y 是一个缩子，那么，缩小后的券息过程 $(D^\theta)^Y$ 是 θ 针对 (D^Y,X^Y) 产生的券息过程。*

$\mathrm{d}D_t^Y$ 的定义中的项 $\sigma_D(t)\cdot\sigma_Y(t)\mathrm{d}t$ 也许初看上去使人不解。此项事实上是由标准不变性给出的。但在本书出现的所有应用中，我们要么有 $\sigma_D=0$，要么有 $\sigma_Y=0$，因而有更明显的定义 $\mathrm{d}D_t^Y=Y_t\mathrm{d}D_t$，这可直观地处理成由 Y_t 缩小后的券息增量 $\mathrm{d}D_t$。

假设 $X=(S,\beta)$，且 $S=(S^{(1)},\cdots,S^{(N-1)})$ 和

$$\beta_t=\beta_0\exp(\int_0^t r_s\mathrm{d}s),\beta_0>0$$

其中 r 为有界短期利率过程。考虑由 $Y_t=\beta_t^{-1}$ 定义的缩子 Y。在经 Y 缩小后，如果存在一个等价鞅测度 Q，那么，(6.19)式便意味着下述方便的定价公式：

$$S_t=E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^T-r_u\mathrm{d}u\right)S_T+\int_t^T\exp\left(\int_t^s-r_u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}D_s\right]\tag{6.20}$$

命题 6.4 和定理 6.4 显然是此种情形的推广。

6.13 一次性总量券息和期限结构

我们可以把(6.20)式推广到具有形式 $D=Z+V-W$ 的有限方差累积息过程，其中 Z 为

一个伊藤过程，V 和 W 是具有左极限、右连续的递增适应过程。所谓递增，意思是只要 $s\geqslant t$，则有 $V_s\geqslant V_t$；所谓右连续，我们的意思是，对任意 t，$\lim_{s\downarrow t}V_s=V_t$。$V$ 在时间 t 的跳跃 ΔV_t，就像图 6.1 中所描述的，被定义为 $\Delta V_t=V_t-V_{t-}$，其中 $V_{t-}\equiv\lim_{s\uparrow t}V_s$ 表示左极限。根据习惯，$V_{0-}=V_0=0$。总券息过程 D 的跳跃 $\Delta D_t=D_t-D_{t-}$ 表示在时间 t 支付的一次性总息。

前面谈到的无套利对证券价格的每一种影响均可以很自然地推广到这种“一次性总量”息的情形。特别地，如果(6.20)式成立，那么，当其中三个积分都有良好定义时，$\int\theta dD$ 被定义为 $\int\theta dZ+\int\theta dV-\int\theta dW$。第一个积分是一个随机积分，后两个是斯蒂尔基斯(Stieltjes)积分。读者如果不熟悉斯蒂尔基斯积分，可查阅附注中的相关资料。令人高兴的是，当随机积分和斯蒂尔基斯积分均有良好定义时，二者刚好吻合一致。在本书中，我们只是考虑涉及下述两种斯蒂尔基斯积分 $\int\theta dV$ 的例子：

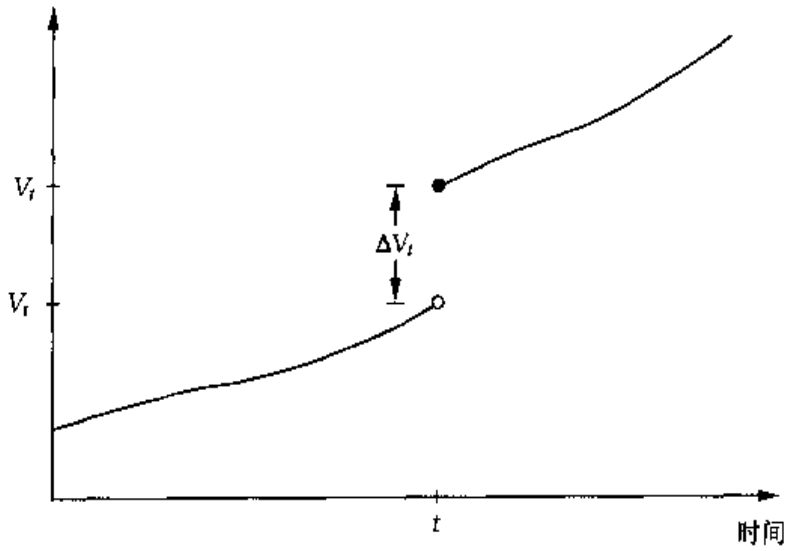


图 6.1 右连续、左极限递增样本路径

(a)对第一种斯蒂尔基斯积分的例子，我们令 $V=\int\delta_t dt$ 对 $\mathscr{L}^1$ 中的某些 δ，在此种情形下 $\int_0^t\theta_s dV_s=\int_0^t\theta_s\delta_s ds$。

(b)第二种情形，对某停止时间 τ，我们有 $V_t=0, t<\tau$ 和 $V_t=v, t\geqslant\tau$，其中 $v=\Delta V_\tau$ 是 V 在时间 τ 的跳跃。对第二种情形，我们有 $\int_0^t\theta_s dV_s=0, t<\tau$ 和 $\int_0^t\theta_s dV_s=\theta_\tau\Delta V_\tau, t\geqslant\tau$。就我们的目的而言，这是很自然的。

如果 $X+D$ 是一个伊藤过程，我们继续把 (D,X) 当成券息—价格偶。因为券息有跳跃的可能性，因此，现在有必要明确地指出，证券价格的测量是息前还是含息。我们采用

前者的习惯，因此，对券息—价格偶(D,X)，如果

$$\theta_t\cdot(X_t+\Delta D_t)=\theta_0\cdot X_0+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}G_s,\qquad t\in[0,T]$$

那么，交易策略θ是自融资的，其中$G=X+D$。据此，一个套利被定义为自融资交易策略θ，其满足$\theta_0\cdot X_0\leqslant 0$和$\theta_T\cdot(X_T+\Delta D_T)>0$，或者$\theta_0\cdot X_0<0$和$\theta_T\cdot(X_T+\Delta D_T)\geqslant 0$。

把早先的定义推广到允许一次性总量券息，我们可以说，某交易策略资助某券息方程D^θ，如果D^θ是一个右连续过程，且该过程的左极限D^θ_{t-}对任意时间t存在，并满足：

$$\theta_t\cdot(X_t+\Delta D_t)=\theta_0\cdot X_0+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}G_s-D^\theta_{t-},\qquad t\in[0,T]$$

其中$\Delta D^\theta_T=\theta_T\cdot(X_T+\Delta D_T)$。

有了这些新的定义，期限结构问题就可根据(6.20)式概括如下：给定某有界短期利率过程r，假设Q是一个由Y缩小后的等价鞅测度，其中$Y_t=\exp(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s)$。一个在时间$\tau$到期的单位零息无风险债券由满足$H_s=0,s<\tau$和$H_s=1,s\geqslant\tau$的累积券息过程$H$所定义。因为对$s\neq\tau,\mathrm{d}H_s=0$以及$\Delta H_\tau=1$，我们从斯蒂尔基斯积分的情形(b)可知：

$$\int_t^T\exp\left(\int_t^s-r_u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}H_s=\exp\left(\int_t^\tau-r_u\mathrm{d}u\right)$$

因此，(6.20)式告诉我们，在时间$\tau>t$到期的单位零息无风险在时间t的价格由下式给出：

$$\Lambda_{t,\tau}=E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^\tau-r_u\mathrm{d}u\right)\right]\tag{6.21}$$

由(6.21)式给出的期限结构的解基于这样一个隐含的假设，即到期日以后债券的价格为零。这与我们早些时候期权价格的分析是一致的，那里我们隐性地将期权的期终含息价格与期终付息款额等同起来。例如，对价格过程为S、执行价格为K、到期时间为T的期权，我们将期终期权价格定为其到期价值$(S_T-K)^+$。这似乎是无可指责的。但如果我们事实上允许期终含息期权价格可以是除$(S_T-K)^+$之外的其他东西，那么，我们就会需要一个更复杂的模型和进一步的分析才能从无套利中得出结论，$(S_T-K)^+$的确是期权的含息到期价值。期终证券价格的这一问题在附注的某些参考文献中得到了进一步的探讨。

6.14 鞅测度和无限期

实际中我们需要用到无限时间视野情形下的基尔萨诺夫(Girsanov)定理。这时我们必须小心。例如，在某一给定概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上，令$\{\mathcal{F}:t\geqslant 0\}$为标准布朗运动$B$的标准过滤，并假设存在常数的短期利率$r$。惟一的其他证券具有由下式给出的几何布朗价

格过程 S：

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dB_t$$

对常数 μ 和 σ，该证券在时间 t 以股息率 δS_t 支付券息，其中 δ 为常数。这种构造完全是标准的。

我们很自然要定义：

$$B_t^Q=B_t+\eta t$$

其中 $\eta=(\mu+\delta-r)/\sigma$，而 S 又可按下式重新表述为：

$$dS_t=S_t(r-\delta)dt+\sigma S_t dB_t^Q$$

尽管可能存在概率测度 Q，就像“风险中性定价”所需求的那样，B^Q 是 Q 下的标准布朗运动，这样的一种测度 Q 不可能与 P 等价。

但我们可以依靠注释中的参考文献所指出的事实，即存在 R^d 维标准布朗运动 B 的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，可以被构造成具有下述特征：

对任意适应过程 $\eta\in\mathbb{R}^d$，使得 $\int_0^t \eta_s\cdot\eta_s ds<\infty$ 并使得对所有的 t，由下式定义的局域鞅 ξ：

$$\xi_t=\exp\left(\int_0^t -\eta_s dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t \eta_s\cdot\eta_s ds\right)$$

满足对所有 t，$E(\xi_t)=1$，且 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上存在概率测度 Q 以使得：

- 对任意时间 T、P 和 Q 给 F_t 中相同的事件置以零概率。也就是说，这两种概率测度受 F_t 的限制是等价的。
- 限制在 $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ 上，我们有 $\frac{dQ}{dP}=\xi_t$。
- $(\Omega,\mathcal{F},Q)$ 和 $\{\mathcal{F}_t:t\geqslant 0\}$ 的一个标准布朗运动 $B^Q\in\mathbb{R}^d$ 被定义为：

$$B_t^Q=B_t+\int_0^t \eta_s ds$$

- 在 Q 下，B^Q 具有鞅表述特征。也就是说，对 Q 下为局域鞅的任意过程 M，存在取值为 $\mathbb{R}^d$ 型的某个适应过程 θ，使得 $\int_0^t \theta_s\cdot\theta_s ds<\infty$ 几乎肯定成立，以及 $M_t=M_0+\int_0^t \theta_s dB_s^Q$，$t\geqslant 0$。

关于这一问题的更多内容，包括 Q 被惟一定义的情景，可以在附注中给出的部分参考文献中找到。

习 题

6.1 给出引理 6.1 的证明中所略去的细节。

6.2 验证关系(6.14)式。

6.3 在本节的模式下，假设 $d=1$，并且存在有界的短期利率过程 r。再假设基础证券(资产)的价格过程为 V，且

$$dV_t=V_t\mu_t dt+V_t\sigma_t dB_t$$

其中 μ 和 σ 是有界的，且 σ 有下界为零。

(A)令 Y 是由 $Y_t=\exp(-\int_0^t r_s ds)$ 定义的标准缩子。证明$(V^Y,1)$存在等价鞅测度 Q。计算$\frac{dQ}{dp}$，并给出 Q 下 V 的漂移(期望值)。

(B)考虑关于基础(标的)资产的欧式买入期权，其执行价格为 K，到期时间为 T。请给出 $\mathcal{H}^2(V,1/Y,U)$中无套利情况下该期权的价格过程 U 的表达式。提示：如果你提出的价格过程不等于实际的价格过程 U，那么，就构造一个成立的套利。

(C)对你在(B)中找到的价格过程 U，证明：

$$U_0=c_1Q_1(A)-c_2KQ_2(A)$$

其中 A 是该期权在价内的事件，Q_1 和 Q_2 为等价于 P 的概率测度，c_1 和 c_2 为常数。c_1、c_2、Q_1 和 Q_2 均不依赖于执行价格 K。对任意 i，请给出$\frac{dQ_i}{dQ}$和常数 c_i，并请说明如何不需计算就能从市场数据中获得 c_i。

(D)证明(C)中对应于 r 和 σ 为常数项的布莱克—斯科尔斯期权定价公式的期权价格解 U_0。提示：对任意 i，运用 Q_i 下 $\log V_T$ 的分布的基尔萨诺夫公式。

(E)给出(C)中的期权价格在 r 和 σ 为确定型(但不一定是常数)情况下的明晰解 U_0，并用带调整的利率参数和风险(浮动)参数的布莱克—斯科尔斯模型来表述此解。

6.4 证明定理 6.4。

6.5 假设自融资交易策略 θ 的回报过程 R^θ 如第 6.4 节末尾部分那样被良好地定义为伊藤(Ito)过程。请说明，R^θ 像在课文中所声明的那样满足状态价格限制(6.6)式。

6.6 把第 6.5 节中的论点推广到如下述有中期券息的情形。首先，考虑券息率过程为 $\delta\in\mathcal{H}^2$ 的特别证券。该证券的累积过程因而由 $H=\int_0^t\delta_s ds, t\in[0,T]$ 定义。假设证券价格过程 V 满足 $V_T=0$。假设 Q 是密度为 ξ 的等价鞅测度。令 π 由 $\pi_0=1$ 和(6.11)式定义。H^Y+V^Y 是 Q 鞅的事实相当于：

$$V_t=\frac{1}{Y_t}E_t^Q\left(\int_t^T Y_s\delta_s ds\right),\ t\in[0,T]$$

(A)从 ξ 的定义、福比尼(Fubini)定理、重复期望定律和 ξ 是鞅的事实，说明下面的等式：

$$\begin{aligned}V_t&=\frac{1}{\xi_tY_t}E_t\left(\xi_T\int_t^T Y_s\delta_s ds\right)\\&=\frac{1}{\xi_tY_t}E_t\left(\int_t^T\xi_TY_s\delta_s ds\right)\\&=\frac{1}{\xi_tY_t}\int_t^T E_t(\xi_TY_s\delta_s)ds\\&=\frac{1}{\xi_tY_t}\int_t^T E_t[E_s(\xi_TY_s\delta_s)]ds\\&=\frac{1}{\xi_tY_t}\int_t^T E_t(\xi_sY_s\delta_s)ds\\&=\frac{1}{\xi_tY_t}E_t\left(\int_t^T\xi_sY_s\delta_s ds\right)\\&=\frac{1}{\pi_t}E_t\left(\int_t^T\pi_s\delta_s ds\right)\end{aligned}$$

这一计算说明 $H^{\pi}+V^{\pi}$ 是鞅，从而与 π 作为一个状态价格缩子的定义相一致。把计算过程倒过来，说明：如果 π 是状态价格缩子且 $\mathrm{var}(\pi_T)<\infty$，那么，$H^{Y}+V^{Y}$ 是 Q 鞅，其中 Q 是由密度过程 ξ[来自(6.11)式]定义的概率测度。

(B)把情况推广到 V_T 并不一定要取 0 的情形，也就是说，假设 Q 是其密度过程 ξ 为有限方差的等价概率测度。证明，$H^{Y}+V^{Y}$ 是 Q 鞅，当且仅当 $H^{\pi}+V^{\pi}$ 是 P 鞅。

(C)把情况推广到累积券息过程 H 为有界的伊藤过程的情形。(尽管这里超越了我们的领域，但若是应用到并不一定是伊藤过程的一般券息过程，那么，伊藤公式的推广将说明，你也许不需要假设 H 是一个过程。)

6.7 (状态价格贝塔模型)。你应该记得，由交易策略 θ 产生的累积券息过程 D^{θ} 由下述关系给出定义：$\Delta D_T^{\theta}=W_T^{\theta}$ 和 $W_t^{\theta}=W_0^{\theta}+\int_0^t \theta_t \mathrm{d}G_t - D_t^{\theta}$，其中 $W_t^{\theta}=\theta_t\cdot(X_t+\Delta D_t)$，以及 G 是约定的盈利过程。令 G^{θ} 是由 θ 产生的盈利过程，其定义为 $G_t^{\theta}=W_t^{\theta}+D_{t-}^{\theta}$。假设 θ 的伊藤回报过程 R^{θ} 被良好地定义为 $\mathrm{d}R_t^{\theta}=(W_t^{\theta})^{-1}\mathrm{d}G_t^{\theta}$，请证明 R^{θ} 满足回报限制(6.6)式。

6.8 延展命题 6.5 的证明使其适合一般券息过程，必要时请引入适当的技术条件。

6.9 在第 6.1 节的情形中，如果 X 是 Q 下的局部鞅，那么，等价于 P 的概率测度 Q 被称为 X 的局部鞅测度。证明：如果缩小后的价格过程 X^{Y}(对某缩子 Y)有局部鞅测度，那么，市场价值过程$\{\theta_t\cdot X_t: t\geqslant 0\}$是非负的[其信用约束比$\underline{\Theta}(X)$的更强一点]，$X$ 不能含有套利的 θ。

6.10 假设对某标准缩子 Y，X^{Y} 有风险市场价格过程 η 使得 $\int_0^T \eta_t\cdot\eta_t \mathrm{d}t<\infty$。证明：对非负的市场价值过程 X，不存在套利。不要加任何规则性条件。

6.11 证明引理 6.3 中券息的标准不变性。

注 释

本章的基本方法来自哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)、哈瑞森和普利斯卡(Harrison and Pliska, 1981)。他们提炼出了本章的大部分术语，发展了本章的绝大部分技术和基本成果。黄(Huang, 1985b,c)把基本理论推广到了一般情形。这里的发展只是一些小的细节不同。本章绝大部分成果可推广到抽象过滤，并不一定是由布朗运动产生的过滤。

(第 6.1 节～第 6.2 节)自融资交易策略的概念来自哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)。关于计价标准不变性更一般的情形，参见黄(Huang, 1985b)和普罗特(Protter, 1999)。关于(计价)标准的作用，参见基曼、伊尔卡洛伊和罗切特(Geman, El Karoui, and Rochet, 1995)。

(第 6.3 节)正如这里依据硬币抛掷所描述的，加倍策略的观点出现于哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)。实际的连续时间加倍策略(6.3)式～(6.4)式，以及对应的停止时间 τ 取值于$(0,T)$的证明来自卡拉特查斯(Karatzas, 1993)，也可以看做是引理 6.1 的一种版本。信用受约束的交易策略类$\underline{\Theta}(X)$的相关性以及诸如命题 6.1 之类的相关成果源自于迪比威格和黄(Dybvig and Huang, 1988)。辛迪(Hindy, 1995)进一步考察了非负财富约束的影响。

(第 6.4 节)状态定价的贝塔版成果可能是原创性的。

(第 6.5 节)哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)发展了等价鞅测度，以及无套利和等价鞅测度存在之间的等价性(当然还依赖于一些技术性问题)。本节只是给出这一成果的一个方向。

(第 6.6 节)价格和等价鞅测度之间的关系是标准的。

(第 6.7 节～第 6.8 节)基尔萨诺夫(Girsanov)定理在这一应用中的使用首见于哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)。黄和佩吉(Huang and Pagès, 1992)将其推广到无限时间视野的情形。丘奥里、克洛兹克和司基克(Choulli, Krawczyk, and Stricker, 1998)探讨了金融应用中随机指数型(诸如密度过程)鞅的作用。罗文斯坦因和维拉德(Loewenstein and Willard, 1998, 1999)讨论了"密度过程"局域鞅版的影响,以及鞅凭借什么可以定义等价鞅测度。

(第 6.9 节～第 6.10 节)完备市场和等价鞅测度的惟一性之间的关系始见于哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)、哈瑞森和普利斯卡 (Harrison and Pliska, 1981)。更多的有关这方面的参考资料有阿兹那和奚斯(Artzner and Heath, 1990, 1995),加罗和麦当(Jarrow and Madan, 1991),莫雷(Müller, 1985),普罗特(Protter, 1999)和司基克(Stricker, 1984)。德尔伯恩、莫纳特、施卡切梅尔、施维茨和司基克(Delbaen, Monat, Schachermayer, Schweizer, and Stricker, 1994)以及莫纳特和司基克(Monat and Stricker, 1994, 1995)给出了或有认领权交易空间的 L^2 封闭性条件。或有认领权交易空间的 L^2 封闭性特征在上一节以及命题 6.4 的证明中用到。瑞贝格(Rydberg, 1997)讨论了马尔可夫情形的惟一性。关于在抽象过滤的测度变化下如何保全市场完备性,可参见达菲(Duffie, 1985)。

(第 6.11 节)第 6.11 节中运用的有关正线性函数的推广问题是受克莱普斯(Kreps, 1981)的影响,并可在克拉克(Clark, 1993)中找到。近似套利的概念是克莱普斯(Kreps, 1981)引入的免费午餐概念的变异。用来导出等价鞅测度存在性技术条件的成果是基于哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps, 1979)以及哈瑞森和普利斯卡(Harrison and Pliska, 1981)上的。例如戴龙、莫顿和威林格尔(Dalang, Morton and Willinger, 1990)所示,该成果在不需要满足技术条件下,也可应用于离散时间的情形。简单证明可参见卡巴诺夫和司基克(Kabanov and Stricker, 2000)。德尔伯恩和施卡切梅尔(Delbaen and Schachermayer, 1999)在"风险不断消失的免费午餐"概念的基础上,提供连续时间情形的确定成果。"风险不断消失的免费午餐"与近似套利的概念密切相关。他们证明了无免费午餐(风险不断消失的)与局域鞅测度的存在之间的一致性(通过计价标准缩子缩小后)。有关以前的和相关的成果,参见安瑟尔和司基克(Ansel and Stricker, 1992, 1994b) 、拜克和普利斯卡(Back and Pliska, 1987)、卡斯塞斯(Cassese, 1996)、德尔伯恩(Delbaen, 1992)、德尔伯恩和施卡切梅尔(Delbaen and Schachermayer, 1994a, b, 1995a, b, c, 1996a, b, 1998)、达菲和黄(Duffie and Huang, 1986)、伊尔卡洛伊和昆奈兹(El Karoui and Quenez, 1995)、弗瑞特里和雷科纳(Frittelli and Lakner, 1995)、杰科德和肖叶弗(Jacod and Shiryaev, 1998)、卡巴诺夫(Kabanov, 1996)、卡巴诺夫和克兰姆克夫(Kabanov and Kramkov, 1994, 1995)、库舒卡(Kusuoka, 1992a)、雷科纳(Lakner, 1993a, b)、拉维特和斯科罗何德(Levental and Skorohod, 1995)、罗杰斯(Rogers, 1994)、施卡切梅尔(Schachermayer, 1992, 1994, 1998)、施维茨(Schweizer, 1992)和司基克(Stricker, 1990)。

有关无套利条件下等价鞅测度的存在性的各种反例概念,可参见司基克(Stricker, 1990)、拜克和普利斯卡(Back and Pliska, 1991)、德尔伯恩和施卡切梅尔(Delbaen and Schachermayer, 1994b)、施卡切梅尔(Schachermayer, 1993) 以及拉维特和斯科罗何德(Levental and Skorohod, 1995)。

(第 6.12 节～第 6.13 节)处理券息和跳跃的方法是常规的方法。第 6.13 节中所提到的斯蒂尔基斯(Stieljes)积分可以在诸如罗尔登(Royden, 1968)的分析课本中找到。要弄清为什么无套利意味着期终除息价格为零,可参见大桥(Ōhashi, 1991),这一点在非布朗运动的信息情形下尤其显得微妙,因为事件 $X_T \neq 0$(其信息含义不在这里具体讨论)可以在时间 T 突然被提示,因而不可能利用同时交易来获得,

有关更进一步的期终套利问题，可参见大桥(Ohashi，1991)。

(第6.14节)这里的动机来自于黄和佩吉(Huang and Pagès，1992)。有关基尔萨诺夫(Girsanov)定理的推广内容是基于雷瓦兹和约尔(Revuz and Yor，1991)中的节Ⅷ1。

额外话题 班兹和米勒(Banz and Miller，1978)以及布黎登和林特博格(Breeden and Litzenberger，1978)从衍生证券的定价中推导出状态价格。

阿蒙丁格(Amendinger，1999)探讨了扩大后的过滤的鞅表述问题。伊姆凯勒、彭迪尔和维茨(Imkeller，Pontier，and Weisz，1999)讨论了过滤扩大到包含某些"高级"信息后的套利存在问题。

德瑞希尔和普罗特(Dritschel and Protter，1998)把鞅表述应用于涉及阿泽玛鞅(Azema)的金融情形。

拜布斯和赛尔拜(Babbs and Selby，1996)，布尔曼、德尔伯恩、爱姆伯瑞和肖叶弗(Bühlmann，Delbaen，Embrechts，and Shiryaev，1998)，弗莫和施维茨(Föllmer and Schweizer，1990)给非完备市场下等价鞅测度的选择提出了一些参数标准。特别地，阿兹那(Artzner，1995)，巴乔克斯－贝斯莱罗和波泰特(Bajeux-Besnainou and Portait，1997)，迪克斯特拉(Dijkstra，1996)，约翰逊(Johnson，1994)和朗恩(Long，1990)讨论了计量标准组合(也称为最值增长组合)为选择状态价格缩子的工具问题。

卡尔和杰罗(Carr and Jarrow，1990)说明了当地时间和布莱克－斯科尔斯模型之间的联系，也可参见比克(Bick，1995)。

类似本章或第5章中关于诸如组合约束或交易费用之类的市场缺陷情形的研究，可在下列文献中找到：亚恩、达亚尔、格瑞南和史温德(Ahn，Dayal，Grannan，and Swindle，1995)，阿维兰尼达和帕拉斯(Avellaneda and Paras，1994a)，贝尔格曼(Bergman，1995)，布伊尔和福斯特(Boyle and Vorst，1992)，卡拉斯厄斯和乔尼(Carassus and Jouini，1998)，陈(Chen，1994)，克鲁罗和霍德格斯(Clewlow and Hodges，1996)，康斯坦丁尼德斯(Constantinides，1993)，康斯坦丁尼德斯和查利弗普洛(Constantinides and Zariphopoulou，1999)，科威坦尼克和卡拉特查斯(Cvitanic and Karatzas，1993)，戴维斯和克拉科(Davis and Clark，1993)，戴维斯和潘纳斯(Davis and Panas，1991)，戴维斯、潘纳斯和查利弗普洛(Davis，Panas，and Zariphopoulou，1993)，伊迪瑞希、奈克和尤泼尔(Edirisinghe，Naik，and Uppal，1993)，格瑞南和史温德(Grannan and Swindle，1996)，海洛特(Henrotte，1991)，乔尼和卡拉(Jouini and Kallal，1993a，1995)，卡拉特查斯和寇(Karatzas and Kou，1998)，康恩(Korn，1995)，库舒卡(Kusuoka，1992b，1993)，理兰德(Leland，1985)，拉维特和斯科罗何德(Levental and Skorohod，1997)，路特莫(Luttmer，1996)，芒克(Munk，1997)，索纳、施莱弗和科威坦尼克(Soner，Shreve，and Cvitanić，1994)，塔莱博(Taleb，1997)，以及维尔利和威尔姆特(Whallely and Wilmott，1997)。这些成果中的很多是较为极端的，它们建立在理兰德(Leland，1985)的基础上，适用于(小的)比例交易费用。交易费用和组合约束对最优证券组合和消费选择的更进一步的影响将在第9章的注释中证明。

德尔伯恩和施拉卡瓦(Delbaen and Shirakawa，1996)给出了对国际市场的一个应用。

本章覆盖的一些问题的一般处理可在下列文献中找到：拜布斯和赛尔拜(Babbs and Selbly，1996)，拜克和普利斯卡(Back and Pliska，1991)，科瑞斯坦生(Christensen，1987，1991)，孔茨和维斯瓦纳莎(Conze and Viswanathan，1991b)，多斯安(Dothan，1990)，伊尔卡洛伊和昆奈兹(El Karoui and Quenez，1991)，伊尔卡洛伊和昆奈兹(El Karoui and Quenez，1995)，加罗和麦当(Jarrow and Madan，1999)，乔尼和卡拉(Jouini and Kallal，1995)，卡拉特查斯(Karatzas，1993)，莫雷(Müller，1985)，普罗特(Protter，1999)以及雷迪(Rady，1993)。

7.

期限结构模型

本章回顾了用于固定收益证券定价和对冲的利率的期限结构，而且此类固定收益证券的未来回报在未来的利率上是偶然发生的。期限结构模型是将财务理论运用到日常商务问题的最灵活和专业的范畴之一，它覆盖了债券组合风险管理至担保抵押负债的设计和定价的所有领域。

本章包含了一些标准的范例，例如默顿(Merton)，何—李(Ho-Lee)，多斯安(Dothan)，布莱南—施瓦茨(Brennan-Schwartz)，瓦斯塞克(Vasicek)，布莱克—德曼—托尔(Black-Derman-Toy)，布莱克—卡拉辛司基(Black-Karasinski)和考克斯—英格索—罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)模型，以及在这些“单因素”期限结构模型上的变化。之所以称其为“单因素”期限结构模型，是因为这些模型将任意时刻利率的整个期限结构处理成了单一状态变量——短期利率的函数。我们也将回顾多因素模型，包括多因素仿射模型，从而拓展了考克斯—英格索—罗斯和瓦斯塞克模型。

在奚斯—加罗—莫顿(Heath-Jarrow-Morton)期限结构的框架内，所有这些称为单因素和多因素的模型可以借助于边际远期利率(而不是直接用利率)来观察。在技术性条件下，奚斯—加罗—莫顿框架允许远期利率的任何初始期限结构和对于条件的变动，以及这些远期利率的相互作用的任何过程。

对实际应用而言，计量的易处理性是必需的。模型参数的“校准”和期限结构衍生证券的定价可典型地由一些计量方法完成，例如“二项树”(第3章)、傅立叶转换方法(第8章)、蒙特卡罗模拟(第12章)以及偏微分方程的有限差分解(第12章)。

本章很少直接地使用本书第6章发展的超越等价鞅测度基本观点的定价理论。(其中，等价鞅测度可因此被处理成“黑箱”。)你必须记住若存在由等价鞅测度分配的概率，任意债券的期望回报率就是短期利率。由于等价鞅测度的存在(除了纯技术性条件)等同于无套利，因此，我们发现从给定等价鞅测度下的结果开展工作是安全和方便的。等价鞅测度的充分性条件在第6章中回顾。均衡例子将在第10章中给出。在经验应用中，在等价

鞅测度下以及在反映实际数据生成的概率测度下，指明期限结构模型的概率属性通常是方便的。

7.1 期限结构

我们固定$\mathbb{R}^d$中的标准布朗运动$B=(B^1,\cdots,B^d)$(对某维数$d\geqslant 1$)，并限制其在时间区间$[0,T]$和概率$(\Omega,\mathscr{F},P)$空间上。我们也固定B的标准过滤，$\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t:0\leqslant t\leqslant T\}$，其定义与第5.9节中一样。

我们假定短期利率适应过程r，其满足$\int_0^T|r_t|\,\mathrm{d}t<\infty$。从概率上讲，$r_t$是无风险证券在时间$t$的连续复利率。这可以通过下述假设而正式化：对任意时间t，我们可以投资一个计量单位，并在未来某一时间s取得市场价值$\exp(\int_t^s r_u\mathrm{d}u)$。这可看成是以短期利率$r$连续不断投资的成果。

考虑在未来某一时间$s>t$到期的零息债券。由定义可知，该债券在时间s之前不支付任何债息，只是在时间s时提供固定的一次性总量支付，不失一般性，该一次性总量支付可被假设为1个计价单位。贯穿全章，我们假设对任意到期时间s，总是存在这样一个零息债券证券，尽管这样做并不总是需要的。本章中我们的主要目的之一是概括时间s到期的债券在时间t时的价格$\Lambda_{t,s}$，以及此价格在时间过程中的行为表现。

在无套利的情况下，第6章中所讨论的纯技术条件是等价鞅测度的存在所必须的。此种概率测度Q的特点是：凡券息是在时间s总量一次性支付Z的证券，其在时间$t<s$的价格为：

$$E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^s -r_u du\right)Z\right] \tag{7.1}$$

其中E_t^Q代表在Q下的$\mathscr{F}_t$条件期望。这里，Z应是$\mathscr{F}_s$可测的且应使(7.1)式有良好定义。重新审视定理2.2就可看到(7.1)式在时间为离散且有限时的正确性。特别是当令(7.1)式中的$Z=1$时，到期时间为s的零息债券在时间t的价格是：

$$\Lambda_{t,s}\equiv E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^s -r_u\mathrm{d}u\right)\right] \tag{7.2}$$

这一带有双重下标的过程Λ有时也被称为贴现函数，或者更松散地被称为利率的期限结构。期限结构也常以收益曲线来表述。时间$t+\tau$到期的零息债券的连续复利计息收益$y_{t,\tau}$被定义为：

$$y_{t,\tau}=-\frac{\log(\Lambda_{t,t+\tau})}{\tau}$$

期限结构也可以按远期利率表述，就像第 7.10 节中解释的那样。

我们利用本章的绝大部分篇幅探讨在固定等价鞅测度 Q 下短期利率行为的传统模型。每一模型中，r 均根据 Q 下 $\mathbb{R}^d$ 型标准布朗运动 B^Q 来建模，而 Q 是由基尔萨诺夫定理(参见附录 D)从 B 得到的。本章的注释说明了一些更一般的模型。本章的任务是概括期限结构的特征，以及给出期限结构衍生证券(收益依赖于期限结构的证券)的定价特征。

7.2 单因素期限结构模型

我们先来看单因素期限结构模型，所谓单因素期限结构模型是指短期利率由下述形式的 SDE 所给出的模型：

$$dr_t=\mu(r_t,t)dt+\sigma(r_t,t)dB_t^Q \tag{7.3}$$

其中 $\mu:\mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 和 $\sigma:\mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}^d$ 满足能够保证(7.3)式有解且对所有的 t 和 $s\geqslant t$，时间 s 到期的零息债券的价格 $\Lambda_{t,s}$ 为有限并依据(7.2)式有定义的技术条件。为了简单起见，我们可以取 $d=1$。

单因素模型之所以被称为单因素，是因为(7.3)式的解 r(在 Q 下)的马尔可夫特性意味着：依据(7.2)式，短期利率是当前收益曲线所依赖的惟一状态变量或“因素”。也就是说，对所有的 t 和 $s\geqslant t$，我们可以记 $\Lambda_{t,s}=F(t,s,r_t)$，对某个固定函数 $F:[0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。

表 7.1　　常见单因素模型参数

模　型	K_0	K_1	K_2	H_0	H_1	v
考克斯－英格索－罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)	●	●			●	0.5
皮尔森－孙(Pearson-Sun)	●	●		●	●	0.5
多斯安(Dothan)					●	1.0
布莱南－施瓦茨(Brennan-Schwartz)	●	●			●	1.0
默顿(何－李)[Merton(Ho-Lee)]	●			●		1.0
瓦斯塞克(Vasicek)	●	●		●		1.0
布莱克－卡拉辛司基(Black-Karasinski)		●	●		●	1.0
康斯坦丁尼德斯－英格索(Constantinides-Ingersoll)					●	1.5

表 7.1 给出了文献资料中常出现的单因素模型的例子，左边是它们的传统称法，右边

是各自模型的参数选用。这些单因素模型均是下述 SDE 的特例：

$$dr_t=[K_0(t)+K_1(t)r_t+K_2(t)r_t\log(r_t)]dt+[H_0(t)+H_1(t)r_t]^v dB_t^Q$$

其中 K_0、K_1、K_2、H_0 和 H_1 均为从$[0,T]$到$\mathbb{R}$的连续函数以及指数 $v\in[0.5,1.5]$。为了保证解的存在和惟一性，必须对系数和短期利率的可能取值进行限制。对每一模型，表 7.1 列示了其对应指数 v，并用符号"●"表示以非零形式出现的那些系数。我们可以把负的系数 K_1，看成是转向均值参数，因为更高的短期利率会导致更低的漂流，反之亦然。从经验上看，转向均值被广泛地认为是应该包括在单因素短期利率模型中的有用特征。

原始版本的这些模型在绝大多数场合下均有常数系数，但后来出于实践的原因被推广到可以允许 $K_i(t)$和 $H_i(t)$因时间 t 而变化，例如让模型像第 12、13 节所描述的那样，标准到适应一批债券和期权价格的数据。例如，默顿(Merton)模型的系数可因时间而变化，这时的默顿模型则常被称为何和李(Ho-Lee)模型。布莱克—卡拉辛司基(Black-Karasinski)模型的流行的特例是习题 7.1 中定义的布莱克—德曼—托尔(Black-Derman-Toy)模型。这些文献的参考资料可以在注释中找到。

每一个此类单因素模型均有其自身可取的特征，其中有些特征将在下面进行探讨。至于实际中应该用哪一个模型(如果要用的话)，则取决于具体的实际问题。注释中列出了这些单因素模型的经验证据，有些场合的经验证据着重指出应向多因素推广。这将在本章的后部分探讨。

基本上可以这么说，对任何单因素模型，期限结构均可利用附录 E 给出的 PDE 和 SDE 之间的费恩曼—凯科关系计算出来(如果不能显式地给出，则数值地给出)。为了方便起见，若固定到期时间 s，由(7.2)式可知，费恩曼—凯科方法意味着，在关于 μ 和 σ 一定的技术条件下，以及对所有的 t，有：

$$\Lambda_{t,s}=f(r_t,t) \tag{7.4}$$

其中 $f\in C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$可以解 PDE：

$$\mathscr{D}f(x,t)-xf(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,s) \tag{7.5}$$

其边界条件是：

$$f(x,s)=1,\qquad x\in\mathbb{R} \tag{7.6}$$

其中

$$\mathscr{D}f(x,t)=f_t(x,t)+f_x(x,t)\mu(x,t)+\frac{1}{2}f_{xx}(x,t)\sigma(x,t)^2$$

根据附录 E 中的结果，为了使(7.4)式～(7.6)式一致，只需 r 是非负，μ 和 σ 在 x 上满足利普斯基茨(Lipschitz)条件以及导数 μ_x、σ_x、μ_{xx}、σ_{xx}连续并在 x 上满足增长条件。但这些条件并不是必要条件，因此可以再进一步弱化。我们注意到表 7.1 中所列的好几个例子就违反了利普斯基茨条件，譬如考克斯—英格索—罗斯模型，其处理必须建立在个别案例基础之上。

运用第12章中描述的数值运算法可以很快解出PDE(7.5)式～(7.6)式。如果μ和σ不依赖于时间t，那么，对任意日历时间t和到期还剩下的时间$u<s$，我们也可以把(7.5)式～(7.6)式的解f看成是决定$t+u$到期的零息债券在时间t的价格$f(r_t,s-u)=\Lambda_{t,t+u}$，以至于可以说，单一的函数$f$在任何时候都描述了整个期限结构。

7.3 高斯单一因素模型

表7.1中所列示的具有性质$K_2=H_1=0$的一组模型被称为高斯型的，因为任意有限集的时间$\{t_1,\cdots,t_k\}$所对应的短期利率$\{r(t_1),\cdots,r(t_k)\}$在Q下有联合正态分布。这可以从附录E中所讨论过的模型中得到。特例包括默顿(也常被称为何和李)模型和瓦斯塞克(Vasicek)模型。

对高斯模型来说，我们可以证明债券价格过程(在Q下)是对数正态的。证明此点只需定义满足$dy_t=-r_t dt$的新过程y，并注意(r,y)是附录E意义下的二维线性随机微分方程的解。因而，对任意t和$s\geqslant t$，随机变量$y_s-y_t=-\int_t^s r_u du$是正态分布的。在Q下，$-\int_t^s r_u du$在$\mathcal{F}_t$条件下的均值$m(t,s)$和方差$v(t,s)$很容易根据r_t、K_0、K_1和H_0计算出来。据附录E中线性SDE的结果可知，条件方差$v(t,s)$是确定型的，条件均值$m(t,s)$则具有形式$\alpha(t,s)+\beta(t,s)r_t$，这里对系数$\alpha(t,s)$和$\beta(t,s)$的计算就留作习题。因此有：

$$\begin{aligned}\Lambda_{t,s}&=E_t^Q[\exp(-\int_t^s r_u du)]\\&=\exp\left(m(t,s)+\frac{v(t,s)}{2}\right)\\&=e^{\alpha(t,s)+\beta(t,s)r(t)}\end{aligned}\tag{7.7}$$

其中$\alpha(t,s)=a(t,s)+v(t,s)/2$。因为$r_t$在$Q$下是正态分布，这就意味着任何零息债券的价格在$Q$下是对数正态分布。另有一个习题要求应用这一特性沿着最初布莱克—斯科尔斯公式的思路直接计算债券期权在此种情形下的价格。高斯模型除了简单明了之外，这种直接计算的能力是实际应用时的主要优点之一。

高斯模型的一个不令人满意的特征是它意味着(对H_0处处非零)在任意未来时刻短期利率和债券(任意到期时间)的收益率为负的概率大于零。尽管当以"真实"(消费标准)标准表述时，负利率有时是可能的，但实际中通常的习惯是按名义标准(相对于货币的价格)来描述期限结构。从名义标准来看，负的债券率意味着某种套利的存在。为了描述这种套利，我们可以正式地把货币看成无息的、价格过程总是恒等于1的一种证券。如果特别零息债券具有负的收益率，那么，考虑做空债权(即借入)和做多同等数量的货币，并且两头均持有债券至到期为止。

对收益率为负的债券，其初始价格大于1，这意味着这种组合策略是套利。当然，如

果假设利率处处为正，再加上货币的存在，那么，就意味着相反交易组合策略是套利(如果货币可以被做空的话)。人们通常假设货币是一种不能被做空的特殊证券。(事实上，货币尽管有息但其有严格为正的价格的事实说明，货币本身就是一种套利。)要恰当地说明货币在支持非负利率方面的作用，需要涉足相当深的货币理论和货币市场的制度特征。就我们的目的来说，我们只需指出，货币包含某种特殊的便利，例如立即进行某种交易的能力，或者可以减少交易成本，这意味着在均衡下做空货币会带来费用。我们先暂时放一放这个问题，现在只要知道允许利率取负值并不一定是"错了"，而只是不很令人满意。不管怎么说，高斯型的短期利率模型是非常有用且被经常使用的，因为它们相对容易处理，并且在较短的时间内和合理选择系数函数的情况下，利率取负值的可能性比较小。

7.4 考克斯—英格索—罗斯模型

最著名的单因素期限结构模型之一是表 7.1 中列示的考克斯—英格索—罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)模型。对常数系数函数 K_0、K_1 和 H_1，以及常数 κ、$\bar{x}$ 和 C，考克斯—英格索—罗斯模型的漂流和扩散函数 μ 和 σ 可以写成下述形式：

$$\mu(x,t)=\kappa(\bar{x}-x);\quad \sigma(x,t)=C\sqrt{x},\quad x\geqslant 0 \tag{7.8}$$

给定 κ 和 $\bar{x}$ 为正，由注释中的资料可知，SDE(7.3)式有非负解(显然，非负性是重要的，因为扩散有平方根的事实)。当然，我们假设 $r_0\geqslant 0$，并把(7.5)式～(7.6)式处理成只适于 $[0,\infty)$ 中的短期利率 x。给定 r_0，在 Q 下，r_t 具有参数已知的非中央的 χ^2 分布。漂流 $\kappa(\bar{x}-r_t)$ 表示 r_t 的转向是以速率 κ 按下述方程向着静止的风险中性均值 $\bar{x}$ 运动：

$$E^Q(r_t)=\bar{x}+e^{-\kappa t}(r_0-\bar{x})$$

当 t 趋向于 $+\infty$ 时，该式趋向于 $\bar{x}$。这一模型的其他特征在本章稍后的部分以及第 10.9 节中探讨，在第 10.9 节中，系数 κ、$\bar{x}$ 和 C 在一般均衡框架下根据代表性行为人的效用函数和资源禀赋进行计算。对考克斯—英格索—罗斯模型，可通过导数的直接计算来验证由下式给出的期限结构 PDE(7.5)式～(7.6)式的解：

$$f(x,t)=e^{a(t,s)+\beta(t,s)x} \tag{7.9}$$

其中，对 $\gamma=(\kappa^2+2C^2)^{1/2}$，

$$a(t,s)=\frac{2\kappa\,\bar{x}}{C^2}[\log(2\gamma e^{(\gamma+\kappa)(s-t)/2})-\log((\gamma+\kappa)(e^{\gamma(s-t)}-1)+2\gamma)] \tag{7.10}$$

$$\beta(t,s)=\frac{2(1-e^{\gamma(s-t)})}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(s-t)}-1)+2\gamma} \tag{7.11}$$

稍后我们将考虑 CIR 模型的多因素版本。

7.5 仿射单因素模型

高斯型和考克斯—英格索—罗斯模型是另一类单因素模型的特例。此类单因素模型的特点是，期限结构 PDE(7.5)式～(7.6)式的解 f 对于在 s 上连续可微的系数 $\alpha(t,s)$ 和 $\beta(t,s)$，具有(7.9)式的指数形式。因此，我们称这类模型为仿射(Affine)期限结构模型。(函数 $g:\mathbb{R}^K\to\mathbb{R}$，对某些 k 为仿射，如果 $\mathbb{R}^k$ 中存在常数 a 和 b，使得对所有的 x，有 $g(x)=a+b\cdot x$。)

我们可以用 PDE(7.5)式来概括任意仿射模型的漂流和扩散函数 μ 和 σ。特别地，把(7.9)式代入(7.5)式并简化，对任意 $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,s)$，有：

$$\beta(t,s)\mu(x,t)=[1-\beta_t(t,s)]x-\alpha_t(t,s)-\frac{1}{2}\beta^2(t,s)\sigma^2(x,t) \tag{7.12}$$

其中的下标表示偏导数。我们将用(7.12)式来推导 $\mu(x,t)$ 和 $\sigma(x,t)$ 对 x 的依赖关系。为了简单起见，我们先假设 $\mu(x,t)$ 和 $\sigma(x,t)$ 不依赖于 t。把(7.12)式应用于两个不同的到期日，例如 s_1 和 s_2，我们便得到有两个未知数 $\mu(x)$ 和 $\sigma^2(x)$ 的两个线性方程：

$$A(s_1,s_2)\begin{pmatrix}\mu(x)\\ \sigma^2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_t(t,s_1)+[1-\beta_t(t,s_1)]x\\ -\alpha_t(t,s_2)+[1-\beta_t(t,s_2)]x\end{pmatrix} \tag{7.13}$$

其中

$$A(s_1,s_2)=\begin{pmatrix}\beta(t,s_1) & \beta^2(t,s_1)/2\\ \beta(t,s_2) & \beta^2(t,s_2)/2\end{pmatrix}$$

除非到期日 s_1 和 s_2 的选择会使得 $A(s_1,s_2)$ 为奇异，否则我们可从(7.13)式得出结论，即 $\mu(x)$ 和 $\sigma^2(x)$ 两个函数本身在 x 上也是仿射型的。

换一种方法，假设 μ 和 σ^2 在 x 上是仿射型的，即

$$\mu(x,t)=K_0(t)+K_1(t)x;\qquad \sigma^2(x,t)=H_0(t)+H_1(t)x$$

那么，我们可以通过证明(7.5)式～(7.6)式的解属于仿射的(7.9)式，从而重新推导出仿射型期限结构模型。如果存在 (α,β) 可以解(7.12)式，那么，就可应用这样的解。(7.12)式中 x 的系数项之和必须等于零，否则我们可以变化 x 从而使(7.12)式不能成立。这给我们提供了一个关于 β 的普通微分方程(ODE)：

$$\beta_t(t,s)=1-K_1(t)\beta(t,s)-\frac{1}{2}H_1(t)\beta^2(t,s);\qquad \beta(s,s)=0 \tag{7.14}$$

其边界条件 $\beta(s,s)=0$ 是由(7.6)式和(7.9)式得出。ODE(7.14)式具有被称为瑞加蒂(Riccati)方程的形式，只要给出关于 K_1 和 H_1 的技术条件，其解就是有限的。

同样，(7.12)式中的截距项(不依赖于 x 的项)也必须等于零。从(7.14)式中解出 β

后，我们便有：

$$\alpha_t(t,s)=-K_0(t)\beta(t,s)-\frac{1}{2}H_0(t)\beta^2(t,s)$$

其边界条件 $\alpha(s,s)=0$ 仍然是来自(7.6)式和(7.9)式。因此，将 $\alpha_u(u,s)$ 对 u 积分，我们便有：

$$\alpha(t,s)=\int_t^s\left[K_0(u)\beta(u,s)+\frac{1}{2}H_0(u)\beta^2(u,s)\right]\mathrm{d}u \tag{7.15}$$

因此，如果先不管技术细节，我们知道，当且仅当期限结构在 x 上本身是仿射时，μ 和 σ^2 在 x 上也是仿射。注释中所引的参考资料进一步说明了这一点。ODE(7.14)式是很容易用数值方法解出的，例如用朗基—库塔(Runge-Kutta)离散法。因此，(7.15)式可以用数值积分解出。高斯模型和 CIR 模型两种特例的 α 和 β 解则有显式表达。

我们基本已经说明，仿射期限结构模型容易归纳和求解。这一观点在本章稍后的多因素模型以及注释中的部分参考资料中得到了进一步的探讨。

根据以上的概括，我们知道，期限结构模型中的“仿射类”包括表 7.1 中所列示的 $K_2=0$和 $v=0.5$ 的所有模型，包括：

(a)瓦斯塞克(Vasicek)模型，其有 $H_1=0$。

(b)考克斯—英格索—罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)模型，其有 $H_0=0$。

(c)默顿(何—李)[Merton(Ho-Lee)]模型，其有 $K_1=H_1=0$

(d)皮尔森—孙(Pearson-Sun)模型。

对 $H_1\neq0$ 的仿射模型，SDE(7.3)式解的存在要求系数(H,K)满足：

$$K_0(t)-K_1(t)\frac{H_0(t)}{H_1(t)}\geqslant0,\ t\in[0,T] \tag{7.16}$$

这一条件能够保证 SDE(7.3)式解 r 的存在，并且对所有的 t，$r(t)\geqslant-H_0(t)/H_1(t)$。

7.6 期限结构衍生证券

我们回到一般的单因素模型(7.3)式并考虑其最重要的应用之一——衍生证券的定价问题。假设衍生证券在给定时间 s 的收益由 $g(r_s)$定义。根据等价鞅测度的定义，这样一种证券在时间 t 的价格应为：

$$F(r_t,t)\equiv E_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^s r_u\mathrm{d}u\right)g(r_s)\right]$$

附录 E 中的费恩曼—凯科 PDE 成果给出了关于 μ、σ 和 g 的技术条件。在这些技术条件下，F 可以解下述 PDE：对$(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,s)$，

$$F_t(x,t)+F_x(x,t)\mu(x,t)+\frac{1}{2}F_{xx}(x,t)\sigma(x,t)^2-xF(x,t)=0 \tag{7.17}$$

边界条件为：

$$F(x,s)=g(x),\quad x\in\mathbb{R} \tag{7.18}$$

下面举出的一些例子是从多种制度性细节中抽象出来的。

(a)关于零息债券的欧式期权。期权的作废时间是 s，执行价格是 p，债券的到期时间是 u，且 $u>s$。期权在时间 s 的收益权为 $(\Lambda_{s,u}-p)^+$。在单因素模式下期权的定价由(7.17)式～(7.18)式的解 F 给出，并有 $g(x)=[f(x,s)-p]^+$，其中 $f(x,s)$ 是 u 到期的零息债券在时间 s 的价格。

(b)远期利率协议(forward-rate agreement，FRA)要求固定利率支付人在时间 s 支付净额 $c^*-c(s)$，其中 c^* 为固定支付额，$c(s)$ 是到期时间 δ(按余下时间计)的浮动利率支付额，意即 $c(s)=\Lambda_{s-\delta,s}^{-1}-1$ 是在时间 $s-\delta$ 时用于时间 s 到期的债权的简单利率。在实际中，到期时间 δ 通常是一个季度或半年。在最初签发的时候，固定利率支付额 c^* 通常被置为使得 FRA 处于市场水平的数额，意即令 FRA 的市场价值为零。

(c)利率互换协议。它实质上是一系列在给定递增的息票日序列 $t(1),t(2),\cdots,t(n)$ 到期的 FRA 的组合。息票间跨期 $t(i)-t(i-1)$ 通常是 3 个月或 6 个月。日期 $t(i)$ 所对应的 FRA 要求固定利率支付人支付净额 $c^*-c(t(i))$，其中收到的浮动利率支付额 $c(t(i))=\Lambda_{t(i-1),t(i)}^{-1}-1$，固定利率支付额 c^* 对所有的息票日均一样。最初签发时被置于市场水平，意即固定利率的 c^* 被选定使得互换协议的市场价值是零。如果忽略违约风险和市场缺陷，就像本章末的一道习题所说明的那样，这将意味着固定利率息票 c^* 为票面息票率。也就是说，在互换协议签发日 t，市场水平互换率 c^* 被设置以使得下式成立：

$$1=c^*(\Lambda_{t,t(1)}+\cdots+\Lambda_{t,t(n)})+\Lambda_{t,t(n)}$$

意即 c^* 是按面值发行的债券的息票率。所谓按面值发行即债券的面值等于最初的市场价(发行价)。

(d)上限协议(Cap)。上限可以看成是对应支付日序列 $t(1),t(2),\cdots,t(n)$ 的一篮子小额上限现金流(caplet payments)$(c(t(i))-c^*)^+$，其中浮动利率 $c(t(i))$ 的定义与利率互换协议中一样。固定利率 c^* 则与上限协议的条款有关，习题 7.13 将探讨上限的定价问题。

(e)底限协议(floor)。底限的定义与上限对称，只需将 $(c(t(i))-c^*)^+$ 换成 $(c^*-c(t(i)))^-$ 即可。

(f)互换期权协议(swaption)。互换期权是互换(swap)的期权，其有给定的执行利率 c^* 和给定执行时间。如果未来执行时间是固定的，那么，互换就是欧式的。另一重要变种是百慕大互换期权(Bermudan swaption)，它允许在一组给定的息票日期中的任意一次执行期权。

依路径而定的衍生证券，诸如抵押物支撑的证券，有时要求更多的状态变量。某些利率衍生证券是基于债券的收益率，而债券的收益又受制于违约风险。在这种情况下，处理

方法必须考虑违约风险并据此进行修改，这将在第 11 章中探讨。

PDE(7.17)式～(7.18)式所描述的问题中很少有实际令人感兴趣的问题能够以显示解的形式求出。第 8 章和第 12 章将探讨数值解法技术。

7.7 基本解

基于附录 E 中的结果，在一定的技术条件下，我们也可以把衍生期限结构证券价值的 PDE(7.17)式～(7.18)式的解 F 表述成下述形式：

$$F(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,t,y,s)g(y)\mathrm{d}y \tag{7.19}$$

其中 G 是 PDE(7.17)式的基本解。有人也把 G 称为(7.17)式的格林(Green)函数，尽管这一称谓严格来说证据不足。根据(7.19)式，对任意时间 $s>t$，以及任意区间$[y(1),y(2)]$，

$$\int_{y(1)}^{y(2)}G(r_t,t,y,s)\mathrm{d}y$$

上式是在时间 s，事件 r_t 发生在区间$[y(1),y(2)]$中所应允支付一个计价单位的证券在时间 t 的价格。举例来说，在时间 s 到期的零息债券的当前价格 $\Lambda_{t,s}$ 应是$\int_{-\infty}^{+\infty}G(r_t,t,y,s)\mathrm{d}y$。

通过求解(7.5)式～(7.6)式的下述意义的对偶("dual")PDE，我们可以计算出基本解 G。正如附录E所解释的那样，在一定的技术条件下，对任意$(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]$，函数$\psi\in C^{2,1}(\mathbb{R}\times(0,T])$被定义为 $\psi(y,s)=G(x,t,y,s)$，它是下述向前柯尔莫哥洛夫方程(Kolmogorov)[也称为福克—普朗克(Fokker-Planck)方程]的解：

$$\mathscr{D}^*\psi(y,s)-y\psi(y,s)=0 \tag{7.20}$$

其中

$$\mathscr{D}^*\psi(y,s)=-\psi_s(y,s)-\frac{\partial}{\partial y}[\psi(y,s)\mu(y,s)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\psi(y,s)\sigma(y,s)^2]$$

(7.20)式的"直觉"边界条件可以从 G 在证券定价中的作用中得出。想像时间 t 时的当前短期利率为 x，并考虑当且仅当当前短期利率为某数 y 时，应允立即支付一个计价单位的证券。不言而喻，如果 $x=y$，那么，这个或有声明权应定价为 1 个计价单位，否则就为零。根据在 s 上的连续性，我们可以把 $\psi(\cdot,s)$看成是$\mathbb{R}$上的一个测度在时间 s 时的密度。当 $s\downarrow t$ 时，该测度收敛于概率测度 v，并且 $v(\{x\})=1$。这一测度有时被称为 x 处的迪拉克(Dirac)测度。虽然关于 ψ 的这一初始边界条件可以做得更精确一些，但我们还是把它留给了附录 E 中的参考文献。第 12 章将给出(7.20)式的数值解的边界条件的一种实现。第 3 章中可以找到其离散时间版本的类似情形。同时，第 3 章还给出了计算布莱克—德

曼—托尔以及何和李模型基本解的算法。

给定基本解 G，与用数值法直接解决 PDE(7.17)式～(7.18)式相比，衍生资产价格函数 F 可以通过数值积分方法(7.19)式而更容易地算出。因此，只需计算价格的衍生证券的数量足够多，就可能值得花代价来计算 G。第 12 章给出了一些计算 F 和 G 的数值方法。

注释中引用的一篇参考资料以很长的篇幅证明考克斯—英格索—罗斯模型(7.8)式的基本解可根据参数 κ、$\bar{x}$ 和 C 显示地给出：

$$G(x,0,y,t)=\frac{\varphi(t)I_q(\varphi(t)\sqrt{xye^{-\gamma t}})}{\exp[\varphi(t)(y+xe^{-\gamma t})-\eta(x+\kappa\bar{x}t-y)]}\left(\frac{e^{\gamma t}y}{x}\right)^{q/2}$$

其中 $\gamma=(\kappa^2+2C^2)^{1/2}$，$\eta=(\kappa-\gamma)/C^2$

$$\varphi(t)=\frac{2\gamma}{C^2(1-e^{-\gamma t})},\quad q=\frac{2\kappa\bar{x}}{C^2}-1$$

以及 $I_q(\cdot)$是具有第一类阶(order)q 的修正的贝塞耳(Bessel)函数。同篇资料中还给出其他模型的基本解的显示表达式。对不依赖于时间的 μ 和 σ，就像在 CIR 模型中那样，我们有：对所有的 s 和 $s>t$，$G(x,t,y,s)=G(x,0,y,s-t)$。

7.8 多因素模型

短期利率的单因素模型(7.3)式有不少局限性。即使偶然地浏览一下期限结构的经验特征(其中有些可以在注释中引用的论文中找到)，也会发现由于应用多因素期限结构模型而具有明显的对数据适应方面的潜在改进。尽管不同地方、不同人使用的术语可能不一样，但"多因素"模型在我们这里的意思是：其短期利率有形式 $r_t=R(X_t,t)$，$t\geqslant 0$，其中 X 是 $\mathbb{R}^k$ 的某个子集，并且能够解下述形式随机微分方程的伊藤过程：

$$\mathrm{d}X_t=\mu(X_t,t)\mathrm{d}t+\sigma(X_t,t)\mathrm{d}B_t^Q \tag{7.21}$$

其中给定函数 R、μ 和从 $D\times[0,\infty)$分别到 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}^k$ 和 $\mathbb{R}^{k\times d}$ 上的映射 σ，它们各自满足充分的技术规则性条件以保证(7.21)式有惟一解，从而使期限结构(7.2)有良好的定义(充分条件在附录 E 中给出)。在经验应用中，人们还常假设状态过程 X 为满足概率测度 P 的随机微分方程，其目的是在估计模型时能充分利用观测到的价格和影响价格的变量的时间序列行为表现。注释中给出了一些这样的例子。

如何诠释"状态变量"(的角色)？让我们以后来讨论这个问题。例如，在第 10 章中探讨的均衡模型里，状态向量 X_t 的某些元素有时是隐身的，也就是说，建模者不可观察到它们，但它们可以从依赖于 X 的价格中被推测出来。这种隐身变量法在许多期限结构建模的实证文献中很流行。另一种方法就是以部分或全部状态变量为直接可观测的变量，

例如经济周期和通货膨胀的宏观经济变量。它们被认为对决定期限结构有作用。这种方法在实证文献中也得到了广泛的探讨。在很多的例子中，组件过程 $X^{(1)},\cdots,X^{(k)}$ 中的一个被选出来作为短期利率过程 r，其漂流和扩散被允许依赖于其他组件过程的水平。

在本节的情形下，衍生证券通常可以用定义于 $\mathbb{R}^k$ 上的某些实数的期终支付函数 g（到期日为 $s\leqslant T$）来表述。根据等价鞅测度的定义，相应的衍生证券价格可从(7.1)式推出，如下所述：

$$F(X_t,t)=E_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^s R(X_u,u)\mathrm{d}u\right)g(X_s)\right]$$

在附录 E 中给出的技术条件下，对(7.17)式～(7.18)式进行拓展，我们有下述 PDE：

$$\mathcal{D}F(x,t)-R(x,t)F(x,t)=0,\quad (x,t)\in D\times[0,s) \tag{7.22}$$

边界条件为：

$$F(x,s)=g(x),\quad x\in D \tag{7.23}$$

其中

$$\mathcal{D}F(x,t)=F_t(x,t)+F_x(x,t)\mu(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma(x,t)\sigma(x,t)^{\mathrm{T}}F_{xx}(x,t)\right]$$

对于零息债券，我们有 $g(x)\equiv 1$。在一定的技术条件下，我们也可以像(7.19)式一样，用 PDE(7.22)式的基本解 G 来表述 F（附录 E 探讨了这一问题）。

7.9 仿射期限结构模型

更为丰富和容易处理的多因素模型的子类是仿射型期限结构模型，其状态过程 X 是仿射型扩散。该模型的定义为：对 $K_0\in\mathbb{R}^k$ 和 $K_1\in\mathbb{R}^{k\times k}$，令(7.21)式中的 $\mu(x,t)$ 满足

$$\mu(x,t)=K_0+K_1x \tag{7.24}$$

以及令(7.21)式中的 $\sigma(x,t)$，对 $\{1,\cdots,k\}$ 中的任意 i 和 j，以及 $H_{0ij}\in\mathbb{R}$ 和 $H_{1ij}\in\mathbb{R}^k$，满足

$$(\sigma(x,t)\sigma(x,t)^{\mathrm{T}})_{ij}=H_{0ij}+H_{1ij}\cdot x \tag{7.25}$$

我们也可以让系数函数 $H=(H_0,H_1)$ 和 $K=(K_0,K_1)$ 依赖于 t，但为了简单起见，我们忽略此点。

给定系数 (H,K)，此类仿射模型很自然的状态空间 $D\subset\mathbb{R}^k$ 被设置为满足下列要求：即 D 中的所有 x，$(\sigma(x,t)\sigma(x,t)^{\mathrm{T}})_{ii}\geqslant 0$。因此，给定 H，我们选定状态空间为：

$$D=\{x\in\mathbb{R}^k:H_{0ii}+H_{1ii}\cdot x\geqslant 0,\ i\in\{1,\cdots,k\}\} \tag{7.26}$$

注释中注明的关于系数 (H,K) 的条件会确保(7.21)式有取值于 D 中的惟一解 X 的存在。

例子之一就是由下式定义的"多因素 CIR"模型：

$$dX_{it}=\kappa_i(\bar{x}_i-X_{it})dt+C_i\sqrt{X_{it}}\,dB_i^{Q,(i)},\quad X_{i0}>0 \tag{7.27}$$

其中 κ_i、$\bar{x}_i$ 和 C_i 为正常数，其作用类似于其各自在单因素 CIR 模型(7.8)中的作用。给定 Q 下 $B^{Q,(1)},\cdots,B^{Q,(k)}$ 的独立性，如果我们令 $R(x,t)=x_1+\cdots+x_k$，那么，多因素 CIR 模型会按下式给出到期日为 s 的零息债券的价格 $f(x,t)$：

$$f(x,t)=\exp[\alpha(t,s)+\beta_1(t,s)x_1+\cdots+\beta_k(t,s)x_k] \tag{7.28}$$

其中 $\alpha(t,s)=\alpha_1(t,s)+\cdots+\alpha_k(t,s)$，并且这里 $\alpha_i(t,s)$ 和 $\beta_i(t,s)$ 为单变量 CIR 模型[具有系数$(\kappa_i,\bar{x}_i,C_i)$]的解的系数。

更一般地，我们假设对系数 $\rho_0\in\mathbb{R}$ 和 $\rho_1\in\mathbb{R}^k$，有：

$$R(x,t)=\rho_0+\rho_1\cdot x \tag{7.29}$$

对固定的到期日 S，以及确定型 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$，我们期望零息债券在时间 T 的价格解 $f(X_t,t)$ 具有下述指数仿射型关系形式：

$$f(x,t)=e^{\alpha(t)+\beta(t)\cdot x} \tag{7.30}$$

为了记法简便起见，我们省去 α 和 β 的记法中的到期日 S，并令 $\beta(t)^{\top}H_1(t)\beta(t)$ 表示 $\mathbb{R}^k$ 型的向量，其第 n 个元素为 $\sum_{i,j}\beta_i(t)H_{1,ijn}\beta_j(t)$。然后，将备选解(7.30)式代入 PDE (7.22)式，我们推测 β 满足下述类似(7.14)式的 k 维普通微分方程：

$$\beta'(t)=\rho_1-K_1^{\top}\beta(t)-\frac{1}{2}\beta(t)^{\top}H_1\beta(t) \tag{7.31}$$

其边界条件 $\beta(s)=0$ 是由(7.30)式以及要求 $f(x,s)=1$ 决定。我们已经反复用过分离变量法：如果对 $\mathbb{R}^k$ 中某开子集中的所有 x，有 $a+b\cdot x=0$，那么 a 和 b 必然等于零。

与单因素仿射模型一样，ODE(7.31)式是瑞加蒂(Riccati)方程。给定关于 K_1 和 H_1 的技术条件，其解是有限的。在某些情况下，显示解也是可能的。另外，我们也可应用数值 ODE 求解方法，例如朗基—库塔(Runge-Kutta)法。

类似地，我们找到：

$$\alpha'(t)=\rho_0-K_0\cdot\beta(t)-\frac{1}{2}\beta(t)^{\top}H_0\beta(t) \tag{7.32}$$

其边界条件 $\alpha(s)=0$。我们对(7.32)式进行积分，得到：

$$\alpha(t)=\int_t^s\left[-\rho_0+K_0\cdot\beta(u)+\frac{1}{2}\beta(u)^{\top}H_0\beta(u)\right]du \tag{7.33}$$

当没有显示解时，数值积分就是简便快速处理(7.33)式的方法。

期限结构模型的此种仿射可以推广到允许依赖于时间的系数(K,H,ρ)以及状态过程 X 带跳跃的情形(参见注释中引用的参考资料)。就像我们在第 8 章中将看到的那样，你也可以用分析法解出仿射状态变量过程的过渡期分布，还可以运用傅立叶(Fourier)变换法解出零息债券的期权和其他证券的相应价格。此外，仿射模型还被广泛用于分析有

关违约时间的可违约债券的定价问题，正如第 11 章所解释的那样。

7.10 远期利率的 HJM 模型

在对期限结构建模时，我们迄今最原始的做法是让短期利率过程取形式 $r_t=R(X_t,t)$，其中（在某等价鞅测度下）X 可以解某个给定的随机微分方程。（在单因素情形下，通常令 $r_t=X_t$。）这种方法的优势是存在有限维的状态空间。例如，运用这种状态空间法，我们可以通过解 PDE 来计算某些衍生证券的价格，这种方法亦可修改用于从时间序列数据估计系数的标准计量经济学方法，就像注释中所指出的那样。

另一种方法是直接对利率的整个期限结构的随机行为建模。这就是奚斯—加罗—莫顿模型的实质点。本节的余下部分就是 HJM 模型的基本内容的总结。随后的一节和习题，以及注释中的部分参考资料给出了更多的推广和细节。

到期日为 $s\geqslant\tau$，且在时间 $\tau\geqslant t$ 被交付的零息债券的远期合约，在时间 t 的价格（在无套利情况下）应由 $\Lambda_{t,s}/\Lambda_{t,\tau}$ 给出，即到期日和交付日的零息债券价格之比。此点的证明留作习题。相应的远期利率被定义为：

$$\Phi_{t,\tau,s}\equiv\frac{\log(\Lambda_{t,\tau})-\log(\Lambda_{t,s})}{s-\tau} \tag{7.34}$$

它可以被看成是以向前的方式购买债券的连续复利收益率。如果瞬时远期利率存在的话，那么，对任意时间 t 和远期交付日 $\tau\geqslant t$，瞬时远期利率可由下式定义：

$$f(t,\tau)=\lim_{s\downarrow\tau}\Phi_{t,\tau,s} \tag{7.35}$$

因此，当且仅当对所有的 t，贴现率 $\Lambda_{t,s}$ 对 s 可微时，瞬时远期利率过程 f 存在（并且是一个适应过程）。

由(7.34)式和(7.35)式，我们得出下述普通微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Lambda_{t,s}=-\Lambda_{t,s}f(t,s)$$

其边界条件为 $\Lambda(t,t)=1$，其解为：

$$\Lambda_{t,s}=\exp\left(-\int_t^s f(t,u)\mathrm{d}u\right) \tag{7.36}$$

期限结构因而可以从即时远期利率重新导出，反之亦然。

给定远期利率的随机模型 f，我们将假设短期利率过程 r 由 $r_t=f(t,t)$ 定义，即当成熟期趋于零时债券的极限。在注释中引用的技术条件下，这一假设的正确性是有保证的。

我们首先固定到期日 s，并且来模拟一维远期利率过程 $f(\cdot,s)=\{f(t,s):0\leqslant t\leqslant s\}$。我们假设 $f(\cdot,s)$ 是伊藤过程，意即：

$$f(t,s)=f(0,s)+\int_0^t\mu(u,s)\mathrm{d}u+\int_0^t\sigma(u,s)\mathrm{d}B_u^Q,\quad 0\leqslant t\leqslant s \tag{7.37}$$

其中$\mu(\cdot,s)=\{\mu(t,s):0\leqslant t\leqslant s\}$和$\sigma(\cdot,s)=\{\sigma(t,s):0\leqslant t\leqslant s\}$分别是取值为$\mathbb{R}$型和$\mathbb{R}^d$型的适应过程，使得几乎肯定地有$\int_0^s|\mu(t,s)|\mathrm{d}t<\infty$和$\int_0^s\sigma(t,s)\cdot\sigma(t,s)\mathrm{d}t<\infty$。

μ和σ之间存在重要的一致性关系。在纯技术条件下，必然有下述关系：

$$\mu(t,s)=\sigma(t,s)\cdot\int_t^s\sigma(t,u)\mathrm{d}u \tag{7.38}$$

在本节的结尾部分，我们将证明这一远期利率的风险中性漂流限制。就目前而言，只要我们具备初始远期利率$\{f(0,s):0\leqslant s\leqslant T\}$和远期利率风险过程$\sigma$的知识，就足够决定所有债券和利率衍生证券的价格过程。也就是说，给定(7.38)式，我们可以用短期利率的定义$r_t=f(t,t)$得到：

$$r_t=f(0,t)+\int_0^t\sigma(v,t)\cdot\int_v^t\sigma(v,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\int_0^t\sigma(v,t)\mathrm{d}B_v^Q \tag{7.39}$$

假定此过程存在并且是适应过程。我们知道如果σ处处为零，那么，当前(现货)利率和远期利率必然一样，即对所有的t，$r(t)=f(0,t)$，这正像我们在没有套利的确定型的债券市场所预期的那样。根据(7.39)式，我们可以运用基本公式(7.1)对任何期限结构相关的证券进行定价。除了习题7.6研究的高斯型特例和其他一些特别受限制的情形外，HJM模式下的绝大多数定价工作均是用数值方法做的。先不管这些特例，由于HJM模型不存在有限维状态变量，因此不能用基于PDE的计算方法。第12章中解释的蒙特卡洛模拟是一种普通的解决方法。另外，我们也可以构建离散时间、有限状态数量的类似模型，并从一些基本的原则出发来计算价格。对离散模型类似于(7.1)式的期望是通过构造(7.39)式的离散式的r的所有样本路径和计算(Q下)每一路径的概率得到的。注释中的参考资料将提供这方面的详细内容。

接下来还需证实远期利率的漂流和扩散之间的重要关系(7.38)式。考虑由下式定义的Q鞅M：

$$\begin{aligned}M_t&=E_t^Q\left[\exp\left(-\int_0^s r_u\mathrm{d}u\right)\right]\\&=\exp\left(-\int_0^t r_u\mathrm{d}u\right)\Lambda_{t,s}\\&=\exp(X_t+Y_t)\end{aligned} \tag{7.40}$$

其中[运用(7.36)式]，

$$X_t=-\int_0^t r_u\mathrm{d}u;\qquad Y_t=-\int_t^s f(t,u)\mathrm{d}u \tag{7.41}$$

为了继续下去，我们要证明Y是从t到s所有到期日所对应的远期利率的伊藤过程的无限和，而且其本身也是伊藤过程。根据随机积分的福比尼(Fubini)定理(附录D)，在

关于 μ 和 σ 的技术条件下，上述观点是正确的。例如，除了我们以前的假设，如果再假设 $\mu(t,u,\omega)$ 和 $\sigma(t,u,\omega)$ 为均匀分布有界，而且对任意 ω 在 (t,u) 上连续，那么，福比尼定理有充分条件，在这些或更弱的条件下，我们可以计算 $\mathrm{d}Y_t=\mu_Y(t)\mathrm{d}t+\sigma_Y(t)\mathrm{d}B_t^Q$，其中

$$\mu_Y(t) = f(t,t) - \int_t^s \mu(t,u)\mathrm{d}u \tag{7.42}$$

和

$$\sigma_Y(t) = -\int_t^s \sigma(t,u)\mathrm{d}u \tag{7.43}$$

给定第 5 章中解释过的随机积分的线性关系，上述结果非常自然。给定福比尼定理确实能用来给出(7.42)式～(7.43)式，我们可按通常方法把公式应用到 $M_t = e^{X(t)+Y(t)}$，并得到 Q 下 M 的漂流为：

$$\mu_M(t) = M_t\left(\mu_Y(t) + \frac{1}{2}\sigma_Y(t)\cdot\sigma_Y(t) - r_t\right) \tag{7.44}$$

因为 M 是 Q 鞅，我们必然有 $\mu_M = 0$，因此，把(7.42)式代入(7.44)式，得到：

$$\int_t^s \mu(t,u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\int_t^s \sigma(t,u)\mathrm{d}u\right)\cdot\left(\int_t^s \sigma(t,u)\mathrm{d}u\right) \tag{7.45}$$

(7.45)式两边对 s 求导数，即可得到风险中性漂流限制(7.38)。

7.11 马尔可夫收益率曲线和随机偏微分方程

我们可以把远期利率曲线看成：

$$g(t,u)=\{f(t,t+u) : 0\leqslant u\leqslant\infty\} \tag{7.46}$$

其中 u 表示到期(所需的)时间，而不是到期日期。对 Ω 中的每一种状态 ω，我们可以把在每一时间 t 的期限结构 $g(t) = g(t,\cdot)$ 模拟成取实数的、在 $[0,\infty]$ 上连续可微函数的方便状态空间 $\mathcal{S}$ 的元素。现在令 $v(t,u)=\sigma(t,t+u)$(关于 f 的风险中性漂流限制)，再加上足够的规则性条件，我们就有 g 的下述随机偏微分方程(SPDE)：

$$\mathrm{d}g(t,u)=\frac{\partial g(t,u)}{\partial u}\mathrm{d}t+V(t,u)\mathrm{d}t+v(t,u)\mathrm{d}B_t^Q \tag{7.47}$$

其中

$$V(t,u) = v(t,u)\cdot\int_0^u v(t,z)\mathrm{d}z \tag{7.48}$$

(7.47)式是被称为“双曲线”的 SPDE 中一个相当特别的例子。上述观点相当巧妙，只要 SPDE(7.47)式有良好定义，整个远期利率曲线 $g(t)$ 对其未来的发展进化就是充分统计描述，也就是取函数值的过程 $\{g(t) : t\geqslant 0\}$ 是状态空间为 $\mathcal{S}$ 的马尔可夫过程。这样，你甚至可以允许布朗运动 B^Q 为无限维(参见注释中的有关文献资料)。

SPDE 方法的应用还包括习题 7.14 中考察过的市场模型(参见注释中部分参考资料)。在相关的远期风险中性测度下,此类市场模型把某些离散远期利率描述成对数正态的。这使得可以运用布莱克—斯科尔斯公式进行债券期权定价。在实际中,这是一个图方便的做法,因为很多上限和债券期权的价格是根据布莱克—斯科尔斯公式的隐含风险来报价的。

习 题

7.1 布莱克—德曼—托尔(Black-Derman-Toy)模型一般以下述形式表述:

$$r_t=U(t)\exp[\gamma(t)B^Q(t)] \tag{7.49}$$

其中函数 U 和 γ 是 $C^1(\mathbb{R}_+)$ 型的。请找出关于 K_1、K_2 和 H_2 的条件,使得在这些条件下,表 7.1 中所示的布莱克—卡拉辛司基模型的参数取值相当于布莱克—德曼—托尔模型特例的(7.49)式。

7.2 对表 7.1 中给出的瓦斯塞克模型,证明:

$$\Lambda_{t,s}=\exp[\alpha(t,s)+\beta(t,s)r_t]$$

并求解在 K_0、K_1 和 H_0 与时间无关情形下的 $\alpha(t,s)$和 $\beta(t,s)$。

7.3 对 K_0、K_1 和 H_0 与时间无关情形的瓦斯塞克模型,请计算零息债券看涨期权在时间 0 时的价格。标的债券到期的时间是 s。期权是欧式的,执行价格为 $c\in(0,1)$,到期时间为 τ。也就是说,请计算在时间 τ 应该支付 $(\Lambda_{\tau,s}-c)^+$ 的某种衍生证券的价格。提示:选择在时间 τ 到期的零息债券作为标准。相对于这一标准,短期利率为零,而期权的收益不受影响,因为 $\Lambda_{\tau,\tau}=1$。运用伊藤公式和上一个习题的解写出缩小后的债券价格 $p_t=\Lambda_{t,s}/\Lambda_{t,\tau}(t\leqslant\tau)$的随机微分方程。这样,$p$ 就为"对数正态"(log-normal)过程。现在再应用第 5 章或第 6 章中采用的方法。把债券期权价格的解用布莱克—斯科尔斯期权定价公式的形式表述出来,把常规变量用基于 K_0、K_1 和 H_0 的表达式来代替。然后再按原来的标准重新模化。这种习题以下将被推广到奚斯—加罗—默顿的情形。

7.4 首先,证明正如第 7.10 节中所声明的那样:在无套利条件下,在时间 τ 交付并在时间 $s>\tau$ 到期的零息债券的远期合约,其在时间 t 的价格由 $\Lambda_{t,s}/\Lambda_{t,\tau}$给出。然后,证明如果短期利率过程 r 是非负的,那么,(7.34)式定义的远期利率和(7.35)式定义的即时远期率为非负。最后再证明(7.36)式。

7.5 令 $\lambda_{\tau,\tau,s}$表示在时间 τ 交付在时间 S 到期的零息债券远期合约在时间 t 的价格。现在考虑价格过程为 S 且确定息率过程为 δ 的证券的远期合约(交付时间为 s)在时间 t 时的价格 F_t。假设所需的可积条件成立,证明无套利条件意味着:

$$F_t=\frac{S_t}{\Lambda_{t,s}}-\int_t^s\lambda_{t,\tau,s}^{-1}\delta_\tau d\tau$$

你不必假定等价鞅测度的存在。

7.6 考虑令第 7.10 节中的奚斯—加罗-莫顿模型(7.37)式中的系数 $\mu(t,s)$和 $\sigma(t,s)$为确定型且对 s 可微而得到的高斯远期利率模型。为了简单起见,令 $d=1$。请计算到期时间为 s 的单位零息的欧式看涨期权在时间 t 的无套利的价格。该看涨期权的执行价格为 K,失效时间为 $\tau(t<\tau<s)$。确切地说,该期权在时间 t 的收益为 $(\Lambda_{\tau,s}-K)^+$。提示:考虑把所有价格相对于 τ 到期的纯贴现债券的价格 $\Lambda_{t,\tau}$进行标准化而得到的缩子作为标准缩子。借助于此标准缩子,计算等价鞅测度 $P(\tau)$以及由下述定义的缩小后的债券价格过程 Z 在 $P(\tau)$下的随机微分方程:$Z_t=\Lambda_{t,s}/\Lambda_{t,\tau},t\leqslant\tau$ 和 $Z_t=\Lambda_{t,s},t\leqslant\tau$。证明 Z_t

在 $P(\tau)$ 下是对数正态分布。再运用事实 $\Lambda_{\tau,\tau}=1$ 证明相关的期权价格为 $\Lambda_{t,\tau}E_t^{P(\tau)}[(\Lambda_{\tau,t}-K)^+]$。然后运用布莱克 斯科尔斯期权定价公式就可得出显示解。你需要计算正态分布 $\log\Lambda_{\tau,s}$ 在 $P(\tau)$ 下基于条件 $\mathcal{F}_t$ 的方差。

7.7 验证互换协议的市场水平息票率 c^* 为票面固定息票率。

7.8 在远期限利率过程为 f 的奚斯—加罗—莫顿模型的情景下，考虑在时间 t 发行的在到期日 τ 之前支付息过程为 $\{\delta_s : t\leqslant s\leqslant\tau\}$ 的单位债券(即到期日支付一个计价单位)。假设对所有的 s，我们有 $\delta_t=f(t,s)$。证明该债券在时间 t 的无套利价格为 1。

7.9 下述方法可帮我们导出奚斯—加罗—莫顿模型的等价鞅测度 Q，同时还能得到使无套利即时远期利率模型 f 在原测度 P 下的布朗运动 B 按下述定义的条件：

$$f(t,s)=f(0,s)+\int_0^t\alpha(u,s)\mathrm{d}u+\int_0^t\sigma(u,s)\mathrm{d}B_u,\ t\leqslant s \tag{7.50}$$

其中 $\{\alpha(t,s):0\leqslant t\leqslant s\}$ 和 $\{\sigma(t,s):0\leqslant t\leqslant s\}$ 分别是取值为 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^d$ 型并使(7.50)式能作为伊藤过程有良好定义的适应过程。我们的具体方法是：

(A) 对每一个固定的 s，假设取值为 $\mathbb{R}^d$ 型的过程 a^s 和取实数的过程分别按下述两式有良好定义：

$$a_t^s=-\int_t^s\sigma(t,v)\mathrm{d}v;\quad b_t^s=\frac{\|a_t^s\|^2}{2}-\int_t^s\alpha(t,v)\mathrm{d}v,\quad t\leqslant s \tag{7.51}$$

证明：在适当的技术条件下，对任意固定的 s，有：

$$\Lambda_{t,s}=\Lambda_{0,s}+\int_0^t\Lambda_{u,s}(r_u+b_u^s)\mathrm{d}u+\int_0^t\Lambda_{u,s}a_u^s\mathrm{d}B_u,\quad 0\leqslant t\leqslant s \tag{7.52}$$

现在，取 d 个不同的到期日所对应的任意集 $\{s(1),\cdots,s(d)\}$，考虑由下式定义的缩小后的债券价格过程 $Z^1,\cdots,Z^d$：

$$Z_t^i=\exp\left(-\int_0^t r_u\mathrm{d}u\right)\Lambda_{t,s(i)},\quad t\leqslant s(i) \tag{7.53}$$

如果要使这 d 个债券直到时间 $S=\min\{s(i):1\leqslant i\leqslant d\}$ 无套利，第6章已经阐明了其充分条件为 $Z=(Z^1,\cdots,Z^d)$ 有等价鞅测度，而且在某种意义上几乎也是必要条件。要证明此点，只需证明 Z 的风险市场价格是第6.7节意义上的 L^2 可归纳性。而 Z 是不是 L^2 可归纳性取决于 Z 漂流和扩散过程。在本习题余下的部分中，我们将把时间区间限制为 $[0,S]$。

(B) 证明：对所有的 i，有：

$$\mathrm{d}Z_t^i=Z_t^ib_t^{s(i)}\mathrm{d}t+Z_t^ia_t^{s(i)}\mathrm{d}B_t,\quad t\in[0,S] \tag{7.54}$$

对任意 $t\leqslant s$，令 A_t 为 $d\times d$ 矩阵，其中 (i,j) 元素是向量 $a_t^{s(i)}$ 的第 j 个元素；再令 λ_t 为 $\mathbb{R}^d$ 型的向量，其第 i 个元素是 $b_t^{s(i)}$。我们便可考虑从下述线性方程式解出取值为 $\mathbb{R}^d$ 型的过程：

$$A_t\eta_t=\lambda_t,\quad t\in[0,S] \tag{7.55}$$

假设这样的解 $\eta\in\mathcal{L}^2$ 存在，并令 $v(Z)=\int_0^s\eta_t\cdot\eta_t\mathrm{d}t/2$ 和 $\xi(Z)=\exp[\int_0^s-\eta_t\mathrm{d}B_t-v(Z)]$，那么，命题6.3告诉我们，$\alpha$ 和 σ 与无套利是一致的，并且 Z 有等价鞅测度，记为 $Q(S)$，假定 $\exp[v(Z)]$ 的期望有限和 $\xi(Z)$ 的方差有限。此种情况下，我们可以令：

$$\frac{\mathrm{d}Q(S)}{\mathrm{d}P}=\xi(Z) \tag{7.56}$$

只要 A_t 几乎处处为非奇，那么，$Q(S)$ 是被惟一定义的。当然，S 是任意的。上述每一步的充分技术条件在

注释中都有资料注明。

(C) 假设 A_t 处处非奇。运用附录 D 中的基尔萨诺夫定理证明，对 $t \leqslant s$，有：

$$f(t,s) = f(0,s) + \int_0^t [a(u,s) - \sigma(u,s)\eta_u]\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(u,s)\mathrm{d}B_u^Q \tag{7.57}$$

其中 B^Q 是 $Q(S)$(由基尔萨诺夫定理得出) 下 $\mathbb{R}^d$ 维的标准布朗运动，也就是说，$\mathrm{d}B_t^Q = \mathrm{d}B_t + \eta_t \mathrm{d}t$。

(D) 证明(7.57) 式和(7.58) 式是一致的。

7.10 (外国债券衍生证券) 假设你需要给某个外国债券期权定价。标的零息债券在到期日 T 支付一个单位的外国货币。债券的本国货币价格过程为 S。为了方便起见，我们将称本国货币为“美元”。期权的作废日为 τ。执行价格为 K 美元，即债券期权在时间 τ 支付 $(S_\tau - K)^+$ 美元。我们的任务是获得债券期权价格过程 C。

外国货币价格过程 U_t 为给定。外国货币可以被定义为具有连续息过程 $U_t R_t$ 的证券，其中 R 是外国短期利率过程。汇率过程 U 被假设是具有下述形式的严格为正的伊藤过程：

$$\mathrm{d}U_t = \alpha_t U_t \mathrm{d}t + U_t \beta_t \mathrm{d}B_t$$

其中 α 为有界实数适应过程，β 为 $\mathbb{R}^d$ 型的有界适应过程。

像在奚斯—加罗—莫顿(Heath-Jarrow-Morton) 模型中一样，外国利率由远期利率过程 F 给出。也就是说，该给定零息外国债券在时间 t 的外国货币价格为 $\exp(\int_t^T -F(t,u)\mathrm{d}u)$，并且我们有 $R_t = F(t,t)$。因而，外国债券价格过程(以美元计) 应为：

$$S_t = U_t \exp\left(\int_t^T -F(t,u)\mathrm{d}u\right)$$

外国债券期权的价格(以美元计) 为：

$$C_t = E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^\tau -r_u \mathrm{d}u\right)(S_\tau - K)^+\right] \tag{7.58}$$

其中 r 是美元的短期利率过程，Q 是等价鞅测度。一般来说，我们总是假设所有可买到的证券的价格过程(以美元计) 向量 X 能使得 $\exp(\int_0^t -r_u \mathrm{d}u)X_t$ 定义 Q 鞅，从而与 Q 是等价鞅测度的定义一致起来。对任意 t 和 $t \geqslant s$，假设

$$F(t,s) = F(0,s) + \int_0^t a(u,s)\mathrm{d}u + \int_0^t b(u,s)\mathrm{d}B_u^Q$$

其中 B^Q 是 Q 下 $\mathbb{R}^d$ 中的标准布朗运动，而依赖于 s 的漂流过程 $a(\cdot,s): \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ 和依赖于 s 的扩散过程 $b(\cdot,s): \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ 被假设满足充分规则性条件，以使得 Q 确实是等价鞅测度以及外国债券价格过程有良好的定义。

(A) 说明：外国远期利率过程 F 的风险中性漂流限制由下式给出：$a(t,s) = b(t,s) \cdot [\int_t^s b(t,u)\mathrm{d}u - \beta_t']$。

(B) 假设国内远期利率过程 f 也是有 HJM 形式。也就是说，我们有 $r_t = f(t,t)$，其中

$$f(t,s) = f(0,s) + \int_0^t \mu(u,s)\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma(u,s)\mathrm{d}B_u^Q \tag{7.59}$$

其中依赖于 s 的漂流过程 $\mu(\cdot,s): \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ 和依赖于 s 的扩散过程 $\sigma(\cdot,s): \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ 被假设满足类似于 a 和 b 所满足的规则性条件。假设系数过程 β、b 和 σ 都是确定型的。请导出外国债券期权

价格的相对显示的表达式。

(C) 收益差距期权是这样一种衍生证券，其美元收益取决于国外和国内远期利率曲线的差距 $\delta = F - f$。差距曲线 δ 可以按下式建模：

$$\delta(t,s) = \delta(0,s) + \int_0^t m(u,s)\mathrm{d}u + \int_0^t v(u,s)\mathrm{d}B_u^Q \tag{7.60}$$

其中依赖于 s 的漂流过程 $m(\cdot,s): \Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 和依赖于 s 的扩散过程 $v(\cdot,s): \Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}^d$ 被假设满足类似于 a 和 b 所满足的规则性条件。给定(7.59)式，请导出关于 δ 的漂流限制，即设法获得不显示地涉及 a 和 b 的对 m 的表达式。不要假设 β、σ 和 v 为确定型系数过程。

7.11 假设 X 是有仿射系数(7.24)式和(7.25)式的 SDE(7.21)式的解，并且短期利率过程 r 具有仿射形式 $r_t = \rho_0 + \rho_1 \cdot X_t$。

(A)证明：在一定的技术可积性条件下，在任何时间 $t<s$，对 $e^{a+b\cdot X(s)}$ 在时间 s 的认领权的价格为形式 $e^{\alpha(t)+\beta(t)\cdot X(t)}$，其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 仅与 t 有关。请给出 β 的普通微分方程及其边界条件，以及依据 β 的 a 解。请给出你用来得到上述结果的可积性条件。

(B)令 $f(X_t,s)$ 表示时间 $T>s$ 到期的零息债券在时间 s 的价格，请给出有关的技术可积性条件，使得在该条件下，在时间 s 交付的该种债券的期货在时间 t 的价格为形式 $e^{\bar{\alpha}(t)+\bar{\beta}(t)\cdot X(t)}$，其中 $\bar{\alpha}(t)$ 和 $\bar{\beta}(t)$ 仅与 t 有关。请给出 $\bar{\beta}$ 的普通微分方程及其边界条件，以及依据 $\bar{\beta}$ 的 $\bar{\alpha}$ 解。

7.12 假设 X 是“原有”概率测度 P 下的仿射状态过程，即有 $\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t$，其中 B 是 P 下 $\mathbb{R}^d$ 维的标准布朗运动，且 $x \mapsto (\mu(x), \sigma(x)\sigma(x)^\top)$ 是仿射关系。假设短期利率过程 r 具有形式 $r_t = \rho_0(t) + \rho_1(t)\cdot X_t$，其中系数 ρ_0 和 ρ_1 可能是与时间有关的。

(A) 考虑形式为 $\xi_t = e^{\alpha(t)+\beta(t)\cdot X(t)}$ 的过程 ξ，其系数 α 和 β 是与时间有关的。请给出 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 的普通微分方程(ODE)，以及使得 ξ 为某等价概率测度 Q 的密度过程的技术可积条件。

(B)假设对任意 t 和 s，以及确定型系数 $a(i,t,s)$ 和 $b(i,t,s)$，时间 s 到期的零息债券在时间 t 的价格具有形式 $\sum_{i=1}^n e^{a(i,t,s)+b(i,t,s)\cdot X(t)}$。在一定的技术条件下，通过适当的缩小后，你能推测出某种适当形式的能给出上述期限结构的相关等价鞅测度 Q 吗？你能猜出的最一般形式是哪种？

7.13 (上限定价)证明：小额上限现金流收益 $(c(t_i)-c^*)^+$ 的认领权(如第 7.6 节所定义的那样)可以被看成是欧式卖(出)期权，期权的执行时间是 t_{i-1}，标的证券是时间 t_i 到期的零息债券。现在请在瓦斯塞克模型情形下给出上限在时间 0 的价格公式。上限是第 7.6 节中所定义的小额上限现金流的组合。

7.14 (市场模型和上限定价)在第 7.1 节的情形下，令 $\{\Lambda_{t,s}\}$ 为贴现期限结构的给定模型，再令 $\Gamma_{t,s,u} = \Lambda_{t,u}/\Lambda_{t,s}$ 如第 7.9 节中一样定义其相关的远期债券价格。对每一给定日期 s，运用日期 s 到期的债券作为计价标准，我们知道不存在套利相当于存在等价鞅测度 Q_s(在用 $\Lambda_{t,s}$ 缩小后)。也就是说，对任何 $u\geqslant s$，债券价格过程 $\{\Lambda_{t,u}/\Lambda_{t,s}: 0\leqslant t\leqslant s\}$ 是 Q_s 鞅。我们记得，Q_s 被称为到期日 s 的远期测度。

(A) 假设对任意 $s\leqslant T$，这样一种远期测度 Q_s 存在。固定 S 在定期技术可积条件下(请你给出)，证明：对任意给定到期日 $u\geqslant s$，有：

$$\mathrm{d}\Gamma_{t,s,u} = \Gamma_{t,s,u}\gamma(t,s,u)\mathrm{d}W_t^s \tag{7.61}$$

对能让随机积分有良好定义的取值为 $\mathbb{R}^d$ 型的适应过程 $\{\gamma(t,s,u): 0\leqslant t\leqslant s\}$ 成立，其中 W^s 是 Q_s 下 $\mathbb{R}^d$ 的特别标准布朗运动。

(B) 给定远期债券价格过程模型(7.61),考虑对每一固定日期 s 和路程(参数)δ,由下式定义的 δ 路程远期利率 $L(t,s)$:

$$1+L(t,s)\delta=\frac{1}{P(t,s,s+\delta)} \tag{7.62}$$

(7.62)式是实际中计算离散路程远期利率的公认方法。在实际中,δ 通常是 3 个月、6 个月或 1 年。$L(s,s)$ 是到期日 $s+\delta$ 的当前 δ 路程率,有时也称为 LIBOR(London Inter-Bank Offering Rate)率,因为这种计算方法被用于伦敦银行间利率的计算。请算出能使下式成立的过程 $\lambda(\cdot,s)=\{\lambda(t,s):0\leqslant t\leqslant s\}$:

$$dL(t,s)=L(t,s)\lambda(t,s)dW_t^{s+\delta} \tag{7.63}$$

(C)假设 $\lambda(\cdot,s)$ 是确定型的,且 $L(0,s)$ 是严格正的。请显示地算出在结算日 $s+\delta$ 支付的 $\delta(L(s,s)-\bar{L})^+$ 的小额上限现金流在时间 t 的价格,其中 $\bar{L}$ 是执行利率。像第 7.6 节中所解释的那样,这是目前市场实践中普遍采用的支付方法。)

注 释

期限结构模型和有关的衍生证券定价问题的一般处理可在下列文献中找到:加伯德(Garbade,1996),摩尔莱达(Moreleda,1997),代姆尼克(DeMunnik,1992),缪塞拉和路特克威斯基(Musiela and Rutkowski,1997),以及桑达尔森(Sundaresan,1997)。范·霍恩(Van Horne,1993)则描述固定收入证券市场的一般制度性特征。

(第 7.2 节~第 7.3 节)高斯短期利率模型发现于默顿(Merton,1974),该文也是本章所用方法的主要来源。派伊(Pye,1966)是现代期限结构模型的早期先驱。何和李(Ho and Lee,1986)推广了该模型并提出了将该模型按当前收益率曲线进行校准的想法。高斯模型的期权评价和其他应用由下列文献给出:卡夫希尔(Carverhill,1988),杰姆斯迪安(Jamshidian,1989a,b,d,1991a,1993b),伊尔卡洛伊和罗切特(El Karoui and Rochet,1989)。杰姆斯迪安(Jamshidian,1989b)就这一目的发展了远期测度方法。同样,也可参考戴维斯(Davis,1998),伊尔卡洛伊和罗切特(El Karoui and Rochet,1989),艾利奥特和德·海克(Elliot and der Hoek,1999),以及施洛德(Schroder,1999)。第 12、13 节中讨论过的校准思想在下述文献中得到了更进一步的发展:布莱克、德曼和托尔(Black,Derman,and Toy,1990),哈尔和怀特(Hull and White,1990a,1993) 以及布莱克和卡拉辛斯基(Black and Karasinski,1991)。习题 3.12 中给出了布莱克—德曼—托尔模型的离散时间版本。习题 12.6 说明,当取适当的参数时,离散时间布莱克—德曼—托尔模型收敛于习题 7.1 中的连续时间的对数正态模型。其他模型还包括科特登(Courtadon,1982)的模型。

(第 7.4 节)考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985b)中的 CIR 期限结构模型,正如在第 10 章所解释的那样,是在一般均衡情形下研发出来的。它后来又被发展成理查德(Richard,1978)套利期限结构模型的基本型。从附录 E 中所阐述的亚玛达和瓦特纳博(Yamada and Watanabe,1971)成果来看,我们可以看出其对应的 CIR 短期利率过程是存在的。为了应用附录 E 中的成果,对 $x<0$,我们可以令 $\sigma(x)=0$。由零是吉曼和斯科罗何德(Gihman and Skorohod,1972)意义上的自然边界这一事实可知,解是非负的。费勒(Feller,1951)解出了 CIR 利率 r_t 分布的拉普莱斯(Laplace)转换。其对应的密度根据理查德(Richard,1978)的脚注可知已经由姚(Yao)算出,更进一步的特征概括由下述参考资料给出:考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985b),切鲁比尼(Cherubini,1993),切鲁比尼和艾斯普希特(Cherubini and Esposito,1992),迪尔斯特拉和德尔伯恩(Deelstra and Delbaen,1994,1995),德

尔伯恩(Delbaen,1993),吉本斯和孙(Gibbons and Sun,1986),杰姆斯迪安(Jamshidian,1995),尼尔森和拉姆茨沃米(Nelson and Ramaswamy,1989),以及罗杰斯(Rogers,1993)。孙(Sun,1992)给出了随着期间长度的缩小收敛于 CIR 模型的一个离散时间模型。有关 CIR 模型的更多成果,包括时间变化系数的分析处理,请参见玛舒迪(Maghsoodi,1996a,b,1997a,b)。

(第 7.5 节)仿射期限结构模型通常是与仿射漂流和扩散平方相对应的思想,在考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985b),哈尔和怀特(Hull and White,1990a)中已有所预言,而在布朗和施艾弗(Brown and Schaefer,1994a)中则已相当明晰。

菲利浦威克(Filipovic,1999a)给出这个部分基于川津和瓦特纳博(Kawazu and Watanabe,1971)移民连续分支过程的特征概括,以及一维状态空间仿射期限结构模型的确定成果。

一维仿射类的例子包括下述文献:卡夫希尔(Carverhill,1988),陈(Chen,1996),考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985b),迪比威格(Dybvig,1988),弗拉乔特(Frachot,1996),杰姆斯迪安(Jamshidian,1989a,b,d,1991a),皮尔森和孙(Pearson and Sun,1994),赛尔拜和司基克兰德(Selby and Strickland,1993),以及瓦斯塞克(Vasicek,1977)。皮尔森和孙(Pearson and Sun,1994)把他们的模型称为转换后的 CIR 模型,原因很显然。

(第 7.6 节)期限结构衍生证券的一般应用处理包括加伯德(Garbade,1996),摩尔莱达(Moreleda,1997),代姆尼克(DeMunnik,1992),缪塞拉和路特克威斯基(Musiela and Rutkowski,1997),以及桑达尔森(Sundaresan,1997)。互换市场在下述参考文献中得到了分析:布雷斯和缪塞拉(Brace and Musiela,1994b),卡尔(Carr,1993b),达菲和黄(Duffie and Huang,1996),伊尔·卡洛伊和基曼(El Karoui and Geman,1994),以及桑达尔森(Sundaresan,1997)。关于互换市场的制度和一般经济特征可参考郎、林特博格和刘(Lang,Litzenberger,and Liu,1996)与林特博格(Litzenberger,1992)。关于上限定价问题,可以参见陈和斯科特(Chen and Scott,1995),克鲁罗、庞和司基克兰德(Clewlow,Pang,and Strickland,1997),米尔特森,萨德曼和桑德曼恩(Miltersen,Sandmann,and Sondermmann,1997),以及斯科特(Scott,1996b)。杰姆斯迪安(Jamshidian,1999)和路特克威斯基(Rutkowski,1996,1998)给出了 LIBOR 衍生证券建模的一般处理。

关于其他个别形式的期限结构衍生证券的定价,可参见阿兹那和罗杰(Artzner and Roger,1993),巴乔克斯—贝斯莱罗和波泰特(Bajeux-Besnainou and Portait,1998),布雷斯和缪塞拉(Brace and Musiela,1994b),查科和达斯(Chacko and Das,1998),陈和斯科特(Chen and Scott,1992b,1993b),切鲁比尼和艾斯普希特(Cherubini and Esposito,1995),切斯尼、艾利奥德和基伯森(Chesney,Elliott,and Gibson,1993),科汉(Cohen,1995),达赫尔、罗玛诺和查科兰德(Daher,Romano,and Zacklad,1992),戴卡姆伯斯和罗切特(Décamps and Rochet,1997),伊尔卡洛伊、莱佩吉、麦纳尼、罗希欧和维斯瓦纳莎(El Karoui,Lepage,Myneni,Roseau,and Viswanathan,1991a,b),腾布尔(Turnbull,1993),弗莱明和韦利(Fleming and Whaley,1994)(diff swaps and quantos),加罗和腾布尔(Jarrow and Turnbull,1994),朗斯坦夫(Longstaff,1990)(yield options),以及腾布尔(Turnbull,1994)。

关于美式债券期权的定价,可参见安德森和安德里森(Andersen and Andreasen,1999),布特勒(Büttler,1995),布特勒和沃尔德弗格(Büttler and Waldvogel,1996),格塔瑞克和缪塞拉(Gatarek and Musiela,1995),格罗森和乔吉森(Grosen and Jorgensen,1995),杰姆斯迪安(Jamshidian,1989a,c),乔吉森(Jorgensen,1996),朗斯坦夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz,1998),佩德森(Pedersen,1999),以及

塔努迪耶亚(Tanudjaja,1995)。

考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1981b),达菲和史丹登(Duffie and Stanton,1988),以及格瑞恩伯拉特和杰格迪斯(Grinblatt and Jegadeesh,1996)考虑了期货和远期合约的相对定价问题。阿贝尔弗尔德和孔茨(Apelfeld and Conze,1990)运用过滤理论研究信息不完整情形下的期限结构问题,从而推广了多斯安和费尔德曼(Dothan and Feldman,1986)的工作。更进一步的固定收入衍生证券的定价问题在第8章中讨论。衍生证券的对冲应用问题也在杰罗和腾布尔(Jarrow and Turnbull,1997a)和杰斯克(Jaschke,1997)中考虑。

(第7.7节)期限结构模型基本解[有时被错误地称为格林(Green)函数]的应用演示可在下列文献资料中找到:布特勒和沃尔德弗格(Buttler and Waldvogel,1996),达什(Dash,1989),比吉荷尔(Beaglehole,1990),比吉荷尔和腾尼(Beaglehole and Tenney,1991),戴(Dai,1994),以及杰姆斯迪安(Jamshidian,1991c)。多斯安(Dothan)(对数正态)短期利率模型可以从何格安(Hogan,1993a)的解型(被称为条件贴现函数)中推导出来。陈(Chen,1996)为其三因素仿射模型给出了基本解。斯特恩杰斯特和弗瑞西(Steenkiste and Foresi,1999)给出了仿射模型PDE基本解的一般处理。这里的总结是标准的。关于更多的技术细节和参考资料,请参见卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve,1988)。

(第7.8节~第7.9节)达菲和凯恩(Duffie and Kan,1996)给出了多因素仿射期限结构模型的特征概括。多因素仿射期限结构模型包括下列文献的各种模型:巴都兹、达斯和弗瑞西(Balduzzi,Das,and Foresi,1998),巴都兹、达斯、弗瑞西和桑德拉姆(Balduzzi,Das,Foresi,and Sundaram,1996),贝拉蒂和艾斯普希特(Berardi and Esposito,1999),陈(Chen,1996),考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985b),戴和辛格尔顿(Dai and Singleton,2000),赫斯顿(Heston,1988b),兰格特(Langetieg,1980),朗斯坦夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz,1992,1993),庞和霍德格斯(Pang and Hodges,1995),以及赛尔拜和司基克兰德(Selby and Strickland,1993)。

菲利浦威克(Filipović,1999a)给出了多维情形下期限结构模型的一个例子,在该模型中收益率是扩散状态变量的仿射关系,但并不是仿射随机微分方程的解。

仿射模式下折扣债券期权和上限的定价问题运用傅立叶转换法求解的有:陈和斯科特(Chen and Scott,1995),达菲、潘和辛格尔顿 (Duffie,Pan,and Singleton,2000),纽恩、克鲁罗和霍德格斯(Nunes,Clewlow,and Hodges,1999),以及斯卡尔立特(Scaillet,1996)。仿射模式下依路径的衍生证券的定价问题在莱布朗克和斯卡尔立特(Leblanc and Scaillet,1998)中考虑。斯特恩杰斯特和弗瑞西(Steenkiste and Foresi,1999) 给出了仿射模型PDE基本解的一般处理方法。关于数值求解诸如(7.31)式ODE的朗吉—库塔(Runge-Kutta)法,请参见普莱斯、弗拉尼瑞、特科尔斯基和范特林(Press,Flannery,Teukolsky,and Vetterling,1993)。有关仿射期限结构模型更多的一般性讨论,请参见戴和辛格尔顿(Dai and Singleton,2000),达弗利(Duffee,1999b),达菲、潘和辛格尔顿(Duffie,Pan,and Singleton,2000),佩德森(Pedersen,1997),以及斯特恩杰斯特和弗瑞西(Steenkiste and Foresi,1999)。

多种形式的仿射期限结构模型的实证估计研究有下述参考文献:布朗和施艾弗(Brown and Schaefer,1994b),查思、卡诺尔伊、朗斯坦夫和桑德斯(Chan,Karolyi,Longstaff,and Saunders,1992),陈和斯科特(Chen and Scott,1992a,1993a),戴(Dai,1995,1996),戴和辛格尔顿(Dai and Singleton,2000),段和西莫纳托(Duan and Simonato,1993),达弗利(Duffee,1999b),达菲和辛格尔顿(Duffie and Singleton,1997),吉本斯和拉姆茨沃米(Gibbons and Ramaswamy,1993),赫斯顿(Heston,1989),代姆尼克

(DeMunnik,1992),莱森(Lesne,1995),朗斯坦夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz,1993),皮尔森和孙(Pearson and Sun,1994),彭纳奇(Pennacchi,1991),罗杰斯和思杜莫(Rogers and Stummer,1994),辛夫(Singh,1995),史丹姆博(Stambaugh,1988),以及瓦斯塞克(Vasicek,1995)。仿射模型的转换法在期权定价和其他方面应用的进一步分析可在第8章和下列文献中找到:达菲、潘和辛格尔顿(Duffie,Pan,and Singleton,2000),刘、潘和佩德森(Liu,Pan,and Pedersen,1999),以及辛格尔顿(Singleton,1999)。

切瑞夫、伊尔卡洛伊、麦纳尼和维斯瓦纳莎(Cherif,El Karoui,Myneni,and Viswanathan,1995),康斯坦丁尼德斯(Constantinides,1992),伊尔卡洛伊、麦纳尼和维斯瓦纳莎(El Karoui,Myneni,and Viswanathan,1992),杰姆斯迪安(Jamshidian,1996a),以及罗杰斯(Rogers,1993)描述了一个模型,在该模型中,短期利率是线性二次型多变量马尔可夫高斯过程。显然,这一模型与一般仿射模型有所重叠,只不过变量有所变化,尽管在多大程度上可以开发,同时又可以卵化成仿射模型和二次高斯型模型这一点还有待研究。皮尔兹希(Piazzesi,1999)给出了同时包含二次高斯型和仿射非高斯型特征的推广。

布莱南和施瓦茨(Brennan and Schwartz,1979,1980c,1982)的联合公债率多因素模型在下述文献中得到了更进一步的分析和研究:尼尔森和施艾弗(Nelson and Schaefer,1983),施艾弗和施瓦茨(Schaefer and Schwartz,1984),何格安(Hogan,1993b),以及达菲、马和杨(Duffie,Ma,and Yong,1995)。

其他多因素模型包括下述文献中的模型:布莱克、德曼和卡尼(Black,Derman,and Kani,1992),查思(Chan,1992),克劳斯和史密斯(Kraus and Smith,1993),以及普拉顿(Platten,1994)。

(第7.10节)运用即时远期利率过程的想法出现在理查德(Richard,1978)。奚斯、加罗和莫顿(Heath,Jarrow,and Morton,1992a)的远期利率模型在高斯即时远期利率情形下,由下述文献进行了广泛的研究处理:杰姆斯迪安(Jamshidian,1989a,b,d,1991a),伊尔卡洛伊和罗切特(El Karoui and Rochet,1989),伊尔卡洛伊、莱佩吉、麦纳尼、罗希欧和维斯瓦纳莎(El Karoui,Lepage,Myneni,Roseau,and Viswanathan,1991a,b),伊尔卡洛伊和雷库斯特(El Karoui and Lacoste,1992),弗拉乔特(Frachot,1995),弗拉乔特、杰恩斯和雷库斯特(Frachot,Janci,and Lacoste,1993),弗拉乔特和莱森(Frachot and Lesne,1993a,b,c),米尔特森(Miltersen,1994),以及代姆尼克(DeMunnik,1992)。基本HJM漂流约束(7.38)式的演示基于罗杰斯(Rogers,1993)。另一较好的推导方法由哈尔(Hull,2000)给出,其假设是债券价格扩散对到期时间是可微的。奚斯、加罗和莫顿(Heath,Jarrow,and Morton,1992a)中(7.38)式的最初推导是基于习题7.12的方法。该习题用来建立初始测度P下和等价鞅测度Q下行为之间的联系是非常有用的。计算得出(7.38)式和短期利率与远期利率之间的关系$r_t=f(t,t)$的技术条件可以在下述参考文献中找到:卡夫希尔(Carverhill,1995),奚斯、加罗和莫顿(Heath,Jarrow,and Morton,1992a),以及米尔特森(Miltersen,1994)。

关于高斯远期利率情形下债券期权定价的习题7.6来自上述几篇关于HJM模型的文章。奚斯、加罗和莫顿(Heath,Jarrow,and Morton,1992a)给出了下述形式的远期利率模型:对$0\leqslant t\leqslant s$,有:

$$f(t,s)=f(0,s)+\int_0^t v[u,s,f(u,s)]\mathrm{d}u+\int_0^t v[u,s,f(u,s)]\mathrm{d}B_u^Q \tag{7.64}$$

其中$v:[0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和$v:[0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$为有界且利普斯基茨(Lipschitz)连续。在一定的规则性条件下,远期利率过程的解为非负。HJM模型在米尔特森(Miltersen,1994)中得到了进一步的推广。关于HJM模式下其他一些相关的研究,衍生证券定价以及计算方法,可参见下述参考文献:拜布斯(Babbs,1991),布雷斯和缪塞拉(Brace and Musiela,1995b),巴克斯特(Baxter,1996),卡夫希尔和庞(Carverhill and Pang,1995),奚斯、加罗和莫顿(Heath,Jarrow and Morton,1990,1992b),杰弗

瑞(Jeffrey,1995a,b),米尔特森和佩尔森(Miltersen and Persson,1997),以及路特克威斯基(Rutkowski,1995,1996)。

HJM模型的马尔可夫版可在下述文献中找到:奥和瑟斯顿(Au and Thurston,1993),巴尔和切尔瑞拉(Bhar and Chiarella,1995),布雷斯和缪塞拉(Brace and Musiela,1994a),基耶迪(Cheyette,1995),杰弗瑞(Jeffrey,1995c),缪塞拉(Musiela,1994b),瑞切肯和萨卡拉萨布拉曼尼(Ritchken and Sankarasubramanian,1992),以及瑞切肯和切弗尔(Ritchken and Trevor,1993)。

(第7.11节)缪塞拉(Musiela,1994b)给出了HJM模型的另一版本,在那里,远期利率曲线是马尔可夫过程。有关此种情形[有时也称为串(String)、随机场(andom field)或SPDE期限结构模型]下的相关研究工作,请参见下述文献:孔特(Cont,1998),琼格和圣—卡拉诺(Jong and Santa-Clara,1999),格奥德斯坦(Goldstein,1997,2000),格奥德伊斯和缪塞拉(Goldys and Musiela,1996),哈姆查和克莱巴纳(Hamza and Klebaner,1995),肯尼迪(Kennedy,1994),库舒卡(Kusuoka,2000),缪塞拉和桑德曼恩(Musiela and Sondermann,1994),庞(Pang,1996),圣—卡拉诺和索纳特(Santa-Clara and Sornette,1997),以及索纳特(Sornette,1998)。

额外话题 考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1981a)以及程(Cheng,1991)举例说明如果人们不先验证无套利的条件而直接从债券价格的随机行为模型出发,将会发生什么错误。对此还可参见坎贝尔(Campbell,1986b)。阿明和莫顿(Amin and Morton,1994a)说明如何从期限结构模型估计利率的隐含波动性(风险)。有关实际中经常用到的标准法的理论套利问题,其解释可在拜克斯、弗瑞西和秦(Backus,Foresi,and Zin,1998)中找到。

有关期限结构模型的计量估计文献日益增多。除上述提到过的论文外,还包括下述文献:艾特—沙哈利(Ait-Sahalia,1996a,b,c),波尔和托洛斯(Ball and Torous,1994),布洛兹、斯卡尔立特和查克安(Broze,Scaillet,and Zakoïan,1993),布勒、尤瑞格—霍姆博格、沃尔特和韦博(Bühler,Uhrig-Homburg,Walter and Weber,1995),布尔诺、格莱哥利—亚伦和亚瑞(Buono,Gregory-Allen,and Yaari,1992),查恩、卡诺尔伊、朗斯坦夫和桑德斯(Chan,Karolyi,Longstaff,and Saunders,1992),达耐斯、加利亚、基诺—卡塔洛特和劳伦特(Danesi,Garcia,Genon-Catalot,and Laurent,1993),达斯(Das,1993a,b),达弗利(Duffee,1999b),弗奈和塔雷(Fourniéand Talay,1991),高瑞洛克斯和劳伦特(Gourieroux and Laurent,1994),高瑞洛克斯和斯卡尔立特(Gourieroux and Scaillet,1994),格瑞恩伯拉特和杰格迪斯(Grinblatt and Jegadeesh,1996),杰格迪斯(Jegadeesh,1993),克迪贾科、尼桑、舒特曼和沃尔夫(Koedijk,Nissen,Schotman,and Wolff,1994),利特曼和施埃恩克曼(Litterman and Scheinkman,1988),以及代姆尼克(DeMunnik,1992)。有关HJM模式下的估计,请参见弗拉乔特(Frachot,1995),弗拉乔特、杰恩斯和雷库斯特(Frachot,Janci,and Lacoste,1993),弗拉乔特和莱森(Frachot and Lesne,1993a,b,c),弗莱沙克(Flesaker,1993),杰弗瑞(Jeffrey,1995b),米尔特森(Miltersen,1993),以及史丹登(Stanton,1995a)。

关于对数正态利率和习题7.14中用过的米尔特森、萨德曼和桑德曼恩(Miltersen,Sandmann,and Sondermann,1997)利率市场模型,请参见安德森和安德里森(Andersen and Andreasen,1998),布雷斯和缪塞拉(Brace and Musiela,1995c),多斯安(Dothan,1978),格奥德伯格(Goldberg,1998),格奥德伊斯、缪塞拉和桑德曼恩(Goldys,Musiela,and Sondermann,1994),哈恩森和乔吉森(Hansen and Jorgensen,1998),何格安(Hogan,1993a),杰姆斯迪安(Jamshidian,1996b,1997b,1999),米尔特森、萨德曼和桑德曼恩(Miltersen,Sandmann,and Sondermann,1997),萨德曼和桑德曼恩(Sandmann and Sondermann,

1997)，缪塞拉(Musiela,1994a)，以及凡基勒(Vargiolu,1999)，另一相关性的对数正态期货价格期限结构模型则归功于奚斯(Heath,1998)。

期限结构建模中跳跃的作用在下述参考文献中得到了研究：巴兹和达斯(Baz and Das,1996)，博尔克、卡巴诺夫和朗格迪尔(Björk,Kabanov,and Runggaldier,1995)，博尔克、迪马斯、卡巴诺夫和朗格迪尔(Björk,DiMasi,Kabanov,and Runggaldier,1997)，达斯(Das,1993c,1995,1997,1998)，达斯和弗瑞西(Das and Foresi,1996)，达菲和凯恩(Duffie and Kan,1996)，伊伯莱恩和莱博尔(Eberlein and Raible,1999)，格拉斯曼和寇(Glasserman and Kou,1999)，奈克和李(Naik and Lee,1994)。

迪比威格、英格索和罗斯(Dybvig,Ingersoll,and Ross,1996)说明：当到期期限趋于无限时，长期利率的极限特征定义一个日历时间上非递减的过程。相关的研究工作可在卡夫希尔(Carverhill,1996)以及伊尔卡洛伊、弗拉乔特和基曼(El Karoui,Frachot,and Geman,1997)中找到。

求解期限结构模型的数值法和衍生证券的定价将在第12章中描述。

建立在期限结构模型基础上的抵押物支持的证券定价的研究可在下述参考文献中找到：布多克、里查德森、史丹登和怀特洛(Boudoukh,Richardson,Stanton,and Whitelaw,1995)，基耶迪(Cheyette,1996)，杰克布森(Jakobsen,1992)，史丹登(Stanton,1995b)，以及史丹登和沃尔勒斯(Stanton and Wallace,1995,1998)。

关于外汇情形下的期限结构模型，请参见尼尔森和萨—瑞克尔(Nielsen and Saá-Requejo,1992)，以及萨—瑞克尔(Saá-Requejo,1993)。HJM模式下外国债券期权定价练习是基于阿明和加罗(Amin and Jarrow,1993)，以及阿明和布德萨(Amin and Bodurtha,1995)。该习题中作为解出现过的外国远期利率漂流约束的明晰式不但在此出现，而且也在缪塞拉和路特克威斯基(Musiela and Rutkowski,1997)中出现。货币统一所隐含的约束在朗德(Lund,1999)中得到了研究。

一直以来我们均认为零息债券的收益曲线可以直接从市场中观察到。事实上，金融界正常的做法是从零息债券和息票债券的价格数据中估计当前零息债券收益曲线(或远期利率)。这种曲线拟合法，例如非线性最小平方和以及多变量薄片方法可用于这一目的。例如，可参见亚当斯和范·蒂凡特(Adams and Van Deventer,1994)，克莱姆、费希尔和伊博森(Coleman,Fisher,and Ibbotson,1992)，迪阿尼特(Diament,1993)，费希尔、奈奇卡和泽弗斯(Fisher,Nychka,and Zervos,1994)，杰斯克(Jaschke,1996)，克诺和塔卡思(Konno and Takase,1995,1996)，以及史文森和达尔奎斯特(Svensson and Dahlquist,1993)。曲线拟合法与基础期限结构模型间的一致性在下述参考文献中考察：博尔克和科瑞斯坦生(Björk and Christensen,1999)，博尔克和格姆巴尼(Björk and Gombani,1999)，以及菲利浦威克(Filipović,1999b)。

关于实物利率期限结构建模，请参见布朗和施艾弗(Brown and Schaefer,1996)，以及彭纳奇(Pennacchi,1991)。关于中央银行政策效应和期限结构模型，请参见拜布斯和韦博(Babbs and Webber,1994)，巴都兹、贝托拉、弗瑞西和克拉普(Balduzzi,Bertola,Foresi,and Klapper,1998)，以及皮尔兹希(Piazzesi,1997,1999)。

关于纳税和非纳税债券的相对收益问题，请参见乔德安(Jordan,1995)和拉姆塞(Rumsey,1996)。

期限结构框架下的期望假设在费希尔和基勒斯(Fisher and Gilles,1998a)中讨论。

特殊回购利率对期限结构建模的影响在巴罗恩和瑞莎(Barone and Risa,1994)，达菲(Duffie,1996)，以及费希尔和基勒斯(Fisher and Gilles,1996)中考察。格瑞恩伯拉特(Grinblatt,1994)考察了相

关的互换利差模型。

关于期限结构无套利模型更进一步的普通读物可在下述参考文献中找到:阿兹那和德尔伯恩(Artzner and Delbaen,1990b),拜布斯和韦博(Babbs and Webber,1994),拜克(Back,1996),巴都兹(Balduzzi,1994),博尔克(Björk,1996),布沙兹(Bossaerts,1990),坎贝尔(Campbell,1995),卡夫希尔(Carvehill,1990,1991),赫斯顿(Heston,1988a,1989),哈尔和怀特(Hull and White,1993),Marsh (1994),代姆尼克(DeMnnik,1992),缪塞拉和路特克威斯基(Musiela and Rutkowski,1997),佩德森和萧(Pedersen and Shiu,1993),佩德森、萧和瑟拉希斯(Pedersen, Shiu, and Thorlacius,1989),罗杰斯(Rogers,1993),以及韦博(Webber,1990,1992)。

利率期限结构建模的其他方法可在下述参考文献中找到:拜克斯、弗瑞西和秦(Backus, Foresi, and Zin,1998),布雷斯和缪塞拉(Brace and Musiela,1995a),格奥德斯坦(Goldstein,1995),金和格拉斯曼(Jin and Glasserman,1998),金(Kim,1992,1993,1994),泰斯和韦博(Tice and Webber,1997),以及郑(Zheng,1994)。

关于远期商品价格期限结构建模,请参见第 8 章中引用的参考资料。

8.

衍生证券定价

本章将第6章和第7章的无套利定价技术应用于衍生证券，这些衍生证券并不总是可以用第5章中的直接PDE法来处理。衍生证券的特点是其现金流与其他证券的价格或相关的指数有关。我们先总结第6章中有关这方面的基本内容，然后再研究远期权证、期货、欧式和美式期权，以及某些奇异期权的估价问题。具有随机波动性的期权定价用傅立叶变换方法来加以说明。

8.1 黑箱里的鞅测度

本节跳过第6章中的基础理论，而采取“黑箱”方法来重温等价鞅测度的特征，并将其应用于无套利衍生证券的定价。我们再次锁定$\mathbb{R}^d$中的标准布朗运动，$B=(B^1,\cdots,B^d)$，其时间区间为$[0,T]$，对应的概率空间为$(\Omega,\mathcal{F},P)$。B的标准过滤$\mathbb{F}=\{F_t:0\leqslant t\leqslant T\}$如第5.9节中定义的那样。

我们假设给定短期利率适应过程r，且$\int_0^T|r_t|\,\mathrm{d}t<\infty$几乎肯定成立，以及对适当的$\mu$和$\sigma$，在$\mathbb{R}^N$中满足下式的伊藤证券过程$S$：

$$\mathrm{d}S_t=\mu_t\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}B_t$$

在第6章中已说明，在适当的技术条件下，不存在套利相当于存在具有“风险中性”特征的概率测度Q，称为等价鞅测度。本章中，我们将使用等价鞅测度的狭义定义，在该定义下，所有期望回报率均相当于无风险利率r(广义的等价鞅测度定义参见第6章)。这意味着，在Q下，$\mathbb{R}^d$中有标准布朗运动B^Q，使得如果该给定证券在时间T之前不付息，那么：

$$\mathrm{d}S_t=r_tS_t\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}B_t^Q \tag{8.1}$$

上式与(6.14)式一样。用这种“风险中性”测度Q代替P后，我们可以把每一个证券的

"即时期望回报率"看成短期利率 r。

更一般地，假设有价格过程 S 的证券是对累积券息过程 D 有声明权的证券。(也就是说，D_t 表示直到时间 t 这 N 个证券所支付的累积券息向量。)在这种情况下，我们有：

$$S_t = E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^T -r_s\mathrm{d}s\right)S_T + \int_t^T \exp\left(\int_t^s -r_u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}D_s\right] \tag{8.2}$$

上式与(6.20)式一样。例如，假设对某个息率过程 δ，$D_t = \int_0^t \delta_s\mathrm{d}s$。那么，由(8.2)式得出：

$$\mathrm{d}S_t = (r_tS_t - \delta_t)\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}B_t^Q \tag{8.3}$$

从而进一步推广了(8.1)式。再举一例，考虑在时间 s 到期的无风险贴现单位债券。这一证券的累积息过程 H 的特征概括如下：对 $u < s$，$H_u = 0$；而对 $u \geqslant s$，$H_u = 1$。因此，这一债券的价格在任意时间 $t < s$ 由(8.2)式决定为：

$$\Lambda_{t,s} \equiv E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^s r_u\mathrm{d}u\right)\right]$$

标有双重下标的过程 Λ 有时也被称为贴现函数，或者更松散地称为期限结构模型。有关细节可在第 7 章中找到。

由第 6 章给出的等价鞅测度定义，任意针对 P 存在有限方差的随机变量 Z 针对 Q 存在有限期望，且

$$E_t^Q(Z) = \frac{1}{\xi_t}E_t(\xi_T Z) \tag{8.4}$$

其中 E_t^Q 表示在 Q 下的 $\mathcal{F}_t$ 条件期望，以及

$$\xi_t = \exp\left(-\int_0^t \eta_s\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \eta_s \cdot \eta_s\mathrm{d}s\right)$$

其中 η 为风险市场价格过程，即 $\mathbb{R}^d$ 中能解下述线性方程的适应过程：

$$\sigma_t\eta_t = \mu_t - r_tS_t, \quad t \in [0,T]$$

本章的余下部分把这些概念应用到衍生证券价格的计算上，其研究范围超出了第 5 章中所处理过的那个简单例子。

8.2 远期价格

第 8.2 节～第 8.4 节将论述一类非常重要的衍生证券远期合约和期货合约的定价问题。习题 2.17 给出了此类问题的离散时间基本情形。远期合约是这两种密切相关的证券中较为简单的一种。令 W 为 $\mathcal{F}_T$ 可测的有限方差随机变量，它表示在交付时间 T，远期合约持有人所享有的价值权力。例如，关于在时间 T 交付一定数量的某种外汇的远期合约，随机变量 W 为该外汇在时间 T 的市场价值。远期价格过程 F 为由下述事实定义的

伊藤过程：时间 t 时的远期合约为在时间 T 支付净额 F_t-W 的承诺，它在别处再无现金流。特别地，远期合约在合约日的真实价格为零。

我们锁定有界短期利率过程 r 和等价鞅测度 Q。在时间 t 时所签署的远期合约的券息过程 H 为：$H_s=0, s<T$ 和 $H_T=W-F_t$。因为远期合约在时间 t 的真实价格为零，由(8.2)式有：

$$0=E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right)(W-F_t)\right]$$

解出远期价格，有：

$$F_t=\frac{E_t^Q\left[\exp(-\int_t^T r_s\mathrm{d}s)W\right]}{E_t^Q\left[\exp(-\int_t^T r_s\mathrm{d}s)\right]}$$

如果我们假设在时间 t 存在到期日为 T 的零息无风险债券，则有：

$$F_t=\frac{1}{\Lambda_{t,T}}E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right)W\right] \tag{8.5}$$

由此，我们可以看出远期价格过程 F 的确是伊藤过程。

如果 r 和 W 在统计的意义上与 Q 相互独立，那么，我们就有简化的表达式 $F_t=E_t^Q(W)$，说明远期价格是 Q 鞅。如果短期利率过程 r 是决定型的，那么，这一点可以是正确的。

例如，假设远期合约是在时间 T 交付一个单位的具有价格过程 S 和息过程 D 的某种特别证券。因此，令 $W=S_T$。根据(8.5)式和(8.2)式，我们可以得到比(8.5)式更具体的远期价格表达式：

$$F_t=\frac{1}{\Lambda_{t,T}}\left(S_t-E_t^Q\left[\int_t^T\exp\left(-\int_t^s r_u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}D_s\right]\right) \tag{8.6}$$

如果短期利率过程 r 是决定型的，上式可以进一步简化为：

$$F_t=\frac{S_t}{\Lambda_{t,T}}-E_t^Q\left[\int_t^T\exp\left(\int_s^T r_u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}D_s\right] \tag{8.7}$$

上式称为远期价格的“运送成本公式(cost - of - carry formula)”。

对决定型的 r 和 D，上述运送成本公式也可以从一种直接且简单的套利论点中得出。除了在时间 t 购买远期合约外，另一种投资的方法为：在时间 t 购买基础证券并通过卖出到期日为 T 的零息无风险债券而借入所需的成本 S_t。(假设将所购买的到期日为 T 的无风险债券上收到的股息再次借出。)那么，时间 T 这一策略的净收益为基础证券的价值 S_T，减去时间 t 卖出的债券的到期价值 $S_t/\Lambda_{t,T}$，再加上用从时间 t 到 T 所收到的股息所购买的所有债券的总到期价值 $\int_t^T\Lambda_{s,T}^{-1}\mathrm{d}D_s$，其总和为 $S_T-S_t/\Lambda_{t,T}+\int_t^T\Lambda_{s,T}^{-1}\mathrm{d}D_s$。远期合约的收益为 S_T-F_t。由于这两种策略除时间 T 外再没有别的收益，又由于 F_t 和 $S_t/\Lambda_{t,T}-$

$\int_t^T \Lambda_{s,T}^{-1} dD_s$ 在时间 t 已知，除非 F_t 和 $s_t/\Lambda_{t,T} - \int_t^T \Lambda_{s,T}^{-1} dD_s$ 相等，否则就会有套利存在。这与(8.7)式一致。

我们一直没有处理等价鞅测度 Q 的计算问题。最简单的原因是远期合约是富余证券，这时等价鞅测度与远期价格无关。给定存在到期日为 T 的零息债券，如果基础证券从时间 t 到 T 的股息是决定型的，那么，远期合约自动地成为富余证券。这时，远期合约可用类似上述用来验证"运送成本公式"的策略来进行复制。本章习题中将会要求构造这种策略。

8.3 期货和连续结算

跟远期合约一样，交付时间为 T 的期货合约对应着交付价值 W。我们假设 W 为有限方差的 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量。期货合约完全由期货价格过程 Φ 定义，Φ 具有特征 $\Phi_T = W$。我们将看到，该期货合约实际上是价格过程为零而累积息过程为 Φ 的证券。换句话说，期货价格的变化在它们发生时就被记到合约持有人的账户上了。这可参见习题 2.17 的解释(在离散时间情形下的)。

上述定义是传统的期货合约概念的抽象。根据传统的期货合约概念，+1 合约持有人在交付时间 T 必须接受某项资产(其时间 T 时的现货市场价值由 W 表示)，并同时相应支付当期期货价格 Φ_T。同样，−1 合约持有人(也称为空头)依据传统的方法有义务以当期期货价格 Φ_T 向对方交付该基础资产。这非正式地证明了上述定义中的期货价格过程中含有性质 $\Phi_T = W$。大致来说，如果 Φ_T 不等于 W(且如果我们继续忽略交易成本和其他细节)，那么，就存在交付套利。我们将不会明确地定义交付套利，因为它只会使下述关于期货价格的分析变得更复杂。但非正式地可以说明如下：如果 $W > \Phi_T$，那么，你可以在时间 T 以价格 W 买入交付资产，同时卖出期货合约，并立即安排交付，这样便可得利润 $W - \Phi_T$。因此，交付套利的可能自然会使 Φ_T 等于交付价值 W。有时这也称为趋同原则。

很多现代期货合约的过程已经被简化，从而避免了交付过程。因此，与交付概念相关的惟一联系是期终期货价格 Φ_T 从契约上讲等于某变量 W，该变量 W 可以是某商品或证券的价格，甚至可以是诸如价格缩子之类的一般经济利益抽象变量。这种避免资产实际交付的过程称为现金结算。不管是基于现金结算还是无交付套利，无论如何，我们将以定义的方式接受：交付期货价格 Φ_T 等于给定交付价值 W。

与我们的期货价格分析最密切相关的期货市场制度特征为重新结算，即基于期货价格的变化，每天或更频繁地结清期货合约持有人之间的收支过程。同远期价格一样，术语

"期货价格"容易让人误解，因为时间 t 时的期货价格 Φ_t 并不是期货合约的价格。实际上，在每一结算时间 t，持有 θ 个期货合约的投资者（自上次结算时间 s 以来），根据最简单的结算方法会收到 $\theta(\Phi_t-\Phi_s)$ 的结算支付。实际中也常用到一些更复杂的结算方法。连续时间的抽象是让期货价格过程 Φ 为伊藤过程，让期货仓位过程为 $\mathscr{H}^2(\Phi)$ 中的某个 θ，所产生的结算盈利 $\int\theta\mathrm{d}\Phi$ 为累积券息过程。特别地，就像我们已经在其定义中所指出的那样，期货价格过程本身可以正式地说成是与合约对应的累积券息过程。而真实价格过程为零，因为（再次忽略某些制度性细节过程）在买卖合约时并没有任何为合约而发生的支付。

8.4 无套利的期货价格

我们下面概括期货价格过程 Φ 的特征。我们假设短期利率过程 r 是有界的。对所有的 t，令 $Y_t=\exp(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s)$，因为严格来说，$\Phi$ 是期货合约对应的累积券息过程，并且合约的真实价格是零，由(8.2)式我们有：

$$0=E_t^Q\left(\int_t^T Y_s\mathrm{d}\Phi_s\right),\quad t\leqslant T$$

据此，可看到随机积分 $\int Y\mathrm{d}\Phi$ 是 Q 鞅。因为 r 是有界的，对所有的 t，存在常数 $k_1>0$ 和 k_2 使得 $k_1\leqslant Y_t\leqslant k_2$。因而，当且仅当 Φ 是 Q 鞅时，过程 $\int Y\mathrm{d}\Phi$ 也是 Q 鞅。（这看上去显然成立，其证明留作习题。）因为 $\Phi_T=W$，我们已为期货价格过程推导出了简便的表达式：

$$\Phi_t=E_t^Q(W),\quad t\in[0,T] \tag{8.8}$$

如果 r 和 W 在 Q 下统计性地独立，那么，由(8.8)式给出的期货价格过程 Φ 和由(8.5)式给出的远期价格过程 F 完全一样。特别地，如果 r 是决定型的，那么，运送成本公式(8.7)式也适用于期货价格。

至于如何计算等价鞅测度 Q，如果期货合约是富余证券，那么，这将最为方便，因为此时可直接从其他证券计算出合适的 Q。这一方法由注释中所列出的参考资料给出，在本节的余下部分中，我们将沿用这一方法并锁定这样一个等价鞅测度 Q。除了完备市场的情形外，我们并不很清楚如何建立期货合约的富余证券性质，因为期货价格过程 Φ 本身是合约的累积息过程，任何观点都有可能是在绕圈子。不管怎样，假设存在自融资策略（除期货合约以外的证券），其在交付日 T 的价值为：

$$Z_T=W\exp\left(\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right)$$

稍后我们将给出这样一种策略的例子。由 Q 的定义，这一策略在时间 t 的市场价值为 $Z_t = E_t^Q(W)$。我们声称，如果 Φ_t 不等于 Z_t，那么，就存在套利。为了说明这一点，我们将构造一个只涉及期货合约和以短期利率借贷的交易策略，使得该策略在时间 T 的收益正好是 Z_T，且在时间 t 需要投资 Φ_t。由此可以清楚地看到，不存在套利要求 Φ_t 等于 Z_t。此策略的构造如下所述：令 θ 为如下定义的（有界）期货仓位过程：$\theta_s = 0, s < t$ 和 $\theta_s = \exp(\int_t^s r_u du)$，$s \geqslant t$；令 V_t 为在时间 t 投资于短期利率如下确定的投资量：$V_s = 0, s < t$ 和 $V_t = \Phi_t$。在时间 t 之后，让所有期货仓位产生的股息都投资于短期利率并不断远期滚动。也就是说，令

$$dV_s = r_s V_s ds + \theta_s d\Phi_s, \qquad s \in [t, T]$$

由于期货合约的真实价格是零，这一涉及期货和短期利率的自融资策略在任意时间 $s \geqslant t$ 的总的市场价值为投资于短期利率的投资 V_s。由伊藤公式我们算出：

$$V_T = \Phi_T \exp\left(\int_t^T r_s ds\right) = W \exp\left(\int_t^T r_s ds\right) = Z_T \tag{8.9}$$

上式证实了期货合约为富余证券的声明。

总结一下，给定存在自融资策略，且其在交付日 T 的价值为 $Z_T = W \exp(\int_t^T r_s ds)$，期货价格过程则由(8.8)式惟一定义。余下的工作就是寻找例子说明，Z_T 的确是某自融资策略在时间 T 的价值。例如，如果期货合约交付的是在时间 T 之前不付息的证券，并且短期利率过程是决定型的，那么，就正好是这种情况。这种情况下，在时间 t 购买 $\exp(\int_0^t r_s ds)$ 单位数量的基础证券就足够了。其他更一般的例子也很容易构造出来。

另外还有一点不严格性需要指出：期货价格过程 Φ 为伊藤过程的假设在我们的分析中起到了重要作用，但我们至今还没有证实 Φ 的解(8.8)式事实上就是伊藤过程。这可以应用基尔萨诺夫定理（参见附录 D）来说明。

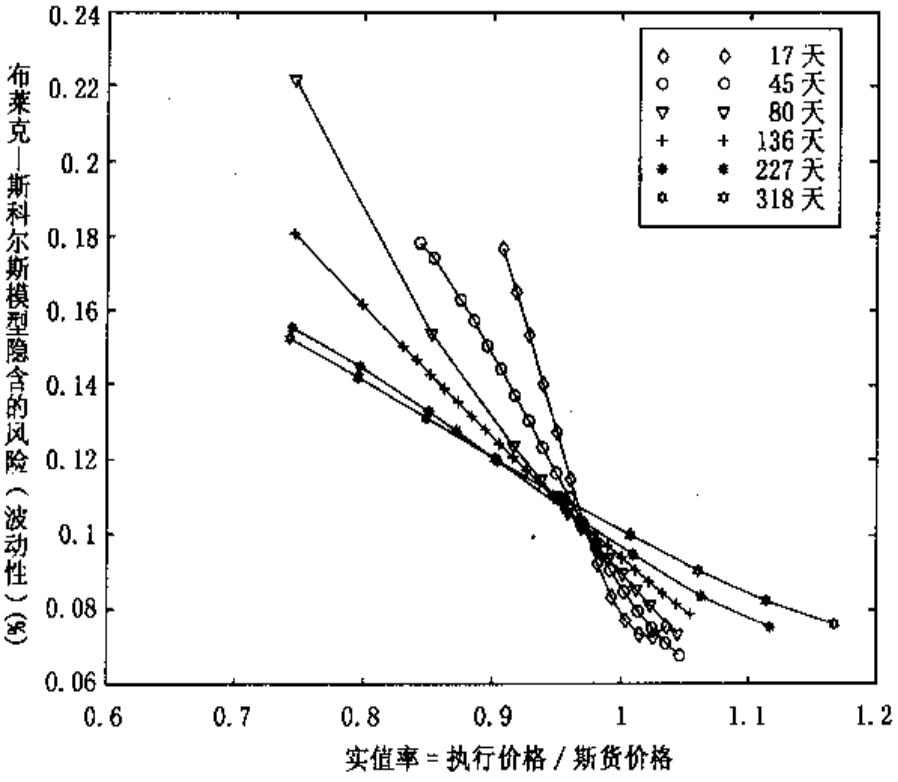
8.5 随机波动性

我们记得，对 $C: \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}_+$，第 5 章中的布莱克—斯科尔斯期权定价公式具有形式 $C(x, p, \bar{r}, t, \bar{\sigma})$，其中 x 为当期基础证券的价格，p 为执行价格，$\bar{r}$ 为短期利率，t 为到期时间，以及 $\bar{\sigma}$ 为基础证券的波动性系数。对任意具有非零 x 和 t 的固定 $(x, p, \bar{r}, t)$，从 $\bar{\sigma}$ 到 $C(x, p, \bar{r}, t, \bar{\sigma})$ 的映射是严格递增的，且其定义区间无界。因此，我们可以转置（invert）从而从期权价格得到波动性。也就是说，对所有足够大的 $c \in \mathbb{R}_+$，我们可以根据下式定义隐含的波动性函数 $I: \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}_+$：

$$c = C(x, p, \bar{r}, t, I(x, p, \bar{r}, t, c)) \tag{8.10}$$

如果 c_1 是定义于给定基础资产上具有执行价格为 p_1、到期时间为 t_1 的期权的布莱克—斯科尔斯价格，c_2 为定义于相同基础证券上的具有执行价格为 p_2、到期时间为 t_2 的期权的布莱克—斯科尔斯价格，如果布莱克—斯科尔斯公式背后的假设的确适用的话，特别是，如果基础价格过程具有不变波动性的几何布朗运动，那么，相应的隐含波动性 $I(x, p_1, \bar{r}, t, c_1)$ 和 $I(x, p_2, \bar{r}, t, c_2)$ 必然是完全一样的。但是，已经被广泛注意到，相同基础证券的具有不同执行价格和到期时间的不同欧式期权的实际市场价格，对应着不一样的布莱克—斯科尔斯隐含波动性。例如，在某些市场的某些时候，具有某一给定执行日期的期权的隐含波动性以被称为微笑曲线(Smile Curve)的方式依赖于执行价格。例如，图 8.1 描述了 1993 年 11 月 2 日依据各种 S&P 500 指数期权数据所计算出的布莱克—斯科尔斯隐含波动性对实值率(moneyness)(执行价格对期货价格的比率)的依赖性。对不变隐含波动性的系统性偏离的其他形式也被注意到，包括随时间变化和在同一时间点上不同的衍生证券之间。

对探讨这些布莱克—斯科尔斯模型背后假设的系统性偏离，主要有三种路线的建模方法。



说明：数据来源于 1993 年 11 月 2 日的市场数据。

图 8.1 六种不同到期时间的 S&P 500 指数期权所隐含的“微笑曲线”

在所有这些方法中，布莱克—斯科尔斯模型中对数正态基础价格过程中的不变波动性参

数$\bar{\sigma}$被具有下述特征的非负适应过程、波动性过程V所取代：$\int_0^T V_t dt < \infty$。因此，基础资产价格过程S被推广使得满足：

$$dS_t = r_t S_t dt + S_t \sqrt{V_t} d\epsilon_t^S \tag{8.11}$$

$\epsilon^S = c_S \cdot B^Q$为$Q$下的标准布朗运动，它是由$\mathbb{R}^d$中具有单位模的任意$c_S$可得。

在第一类的模型中，对满足技术规则条件的某个函数$v: \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$，有$V_t = v(S_t, t)$。在实际应用中，函数$v$或其离散时间、离散状态对应项，常被针对所用的期权价格"校准"。这种方法，有时也称为隐含树模型，在本章和第3章注释中的参考文献被广泛探讨。

第二类模型被称为广义自回归条件异方差，或者GARCH。在这类模型中，波动性依赖于回报率的平方的路径。该模型最初是在离散时间情形下提出，其方法是对满足规则性条件的固定系数a、b和c，根据下述迭代公式构造回报$R_{t+1} = \log S_{t+1} - \log S_t$在时间$t$的波动性$V_t$：

$$V_t = a + bV_{t-1} + cR_t^2 \tag{8.12}$$

我们取时间长度为h，进行自然标准化，并取极限，就可得到其连续时间极限情形。不难看出，波动性遵循决定型的满足下述常微分方程的中值过程V：

$$\frac{dV(t)}{dt} = \kappa(\bar{v} - V(t)) \tag{8.13}$$

（关于连续时间极限的性质的讨论可以在注释中的参考文献中找到。）

在第三种方法中，波动性过程V的增量依赖于与ϵ^S不是完全相关的布朗运动（或者其他更一般的随机过程）。例如，在简单的"单因子"模式下，波动性过程V满足下述形式的随机微分方程：对某单位模常数向量c_V，有

$$dV_t = \mu_V(V_t)dt + \sigma_V(V_t)d\epsilon_t^V \tag{8.14}$$

其中$\epsilon^V = c_V \cdot B^Q$为$Q$下的标准布朗运动。我们将看到，相关参数$c_{SV} = c_S \cdot c_V$对期权价格有重要影响。

第5章中曾展示费恩曼—凯科方法在一定技术条件下解出欧式期权价格的偏微分方程：某个执行价格为p、到期时间为t的欧式期权在时间s时的价格为函数$f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,t] \to \mathbb{R}$，其形式为：

$$f(S_s, V_s, s) = E_s^Q[e^{-r(t-s)}(S_t - p)^+]$$

用离散法解此类PDE的方法可参见本书第12章。

一种有时被用到的随机波动性模型的特别情况是令相关参数c_{SV}为零。这意味着波动性过程V的分布（在Q下）与驱动回报布朗运动ϵ^S独立。请注意，在波动性过程V条件下，基础资产价格过程在Q下是对数正态，我们就可以更加容易地计算出基础资产上的期权（或者其他衍生证券）价值。也就是说，$\log S_t$在Q下的分布（以整个波动性过程

$\{V_s : s\in[0,t]\}$为条件)是正态的,其标准差为$\sigma(V)\sqrt{t}$,其中:

$$\sigma(V)=\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\int_0^t V_s\mathrm{d}s\right)^{1/2}$$

均值为$rt-\sigma(V)^2t/2$。由期望迭代法则,到期日为t、执行价格为p的欧式看涨期权的最初价格由下式给出:

$$\begin{aligned}f(S_0,V_0,t)&=E^Q[e^{-\bar{r}t}(S_t-p)^+]\\&=E^Q(E^Q[e^{-\bar{r}t}(S_t-p)^+\mid\{V_s:s\in[0,t]\}])\\&=E^Q[C(S_0,p,\bar{r},t,\sigma(V))]\end{aligned}\tag{8.15}$$

其中$C(\cdot)$像通常一样表示布莱克—斯科尔斯公式。给定V的特别随机模型,我们可以通过注释中提到的几种数字方法来估计期权价格(8.15)式。我们的确可发现隐含的微笑曲线是微笑型的,尽管还很难使这种特别情况与期权的多种经验表现一致起来。特别地,在很多场合下,对微笑的显著弯曲,像在图8.1中一样,说明驱动回报和驱动波动性布朗运动的增量(ϵ^S和ϵ^V)间的相关性有非常重要的作用。这种作用直接体现在某些重要资产类的时间序列数据中的隐含波动性和回报之间的相关性,正如注释中参考文献所指出的那样。

可处理的允许相关性弯曲效应的模型是赫斯顿(Heston)模型,它是(8.14)式的一种特殊情况,且有

$$\mathrm{d}V_t=\kappa(\bar{v}-V_t)\mathrm{d}t+\sigma_v\sqrt{V_t}\,\mathrm{d}\epsilon_t^V\tag{8.16}$$

对正系数κ、$\bar{v}$和σ_v,其在V中各自的作用类似于在CIR利率模型中。[事实上,(8.16)式有时被称为波动性的CIR模型。]在最初的赫斯顿模型中,短期利率被假设成常数,例如说$\bar{r}$,且期权价格可以运用下节将介绍的转换方法:根据赫斯顿模型参数$(\bar{r},c_{SV},\kappa,\bar{v},\sigma_v)$,以及最初波动性$V_0$、最初基础价格$S_0$、执行价格和到期时间解析地计算出来。图8.2中给出的是图8.1中的期权的微笑曲线,但参数(包括V_0)被选定以使得实际的和理论的期权价格之差的平方和最小。很明显,这种被称为"斜曲"的明显向下倾斜的斜线体现在负的相关系数c_{SV}上。取短期利率$\bar{r}=0.031\,9$,赫斯顿模型的其他系数可以校准为$c_{SV}=-0.66$,$\kappa=19.66$,$\bar{v}=0.017$,$\sigma_v=1.516$和$\sqrt{V_0}=0.094$。注释中给出的参考文献运用期权和标的价格的时间序列数据来拟合这些参数,结果显示赫斯顿模型对这些数据过于严格。但是,这种转换方法同样适用于随机利率、跳跃以及更一般的波动性模型。

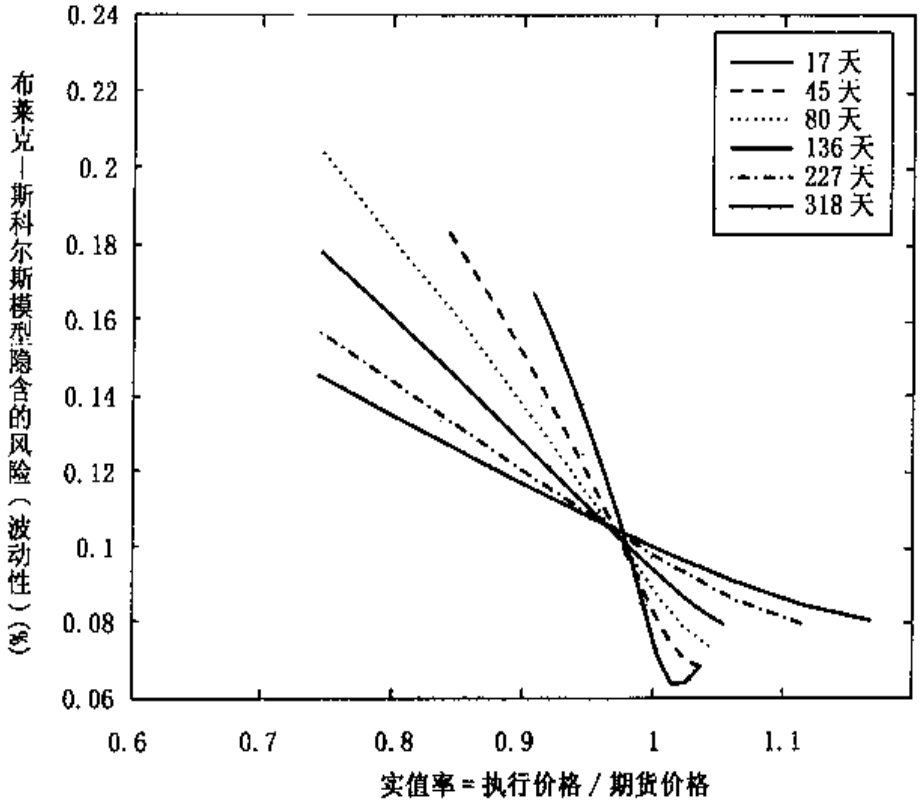


图 8.2 运用赫斯顿模型计算出来的 1993 年 11 月 2 日六种不同到期时间的 S&P 500 指数期权的"微笑曲线"

8.6 转换分析法与期权定价

本节专门处理第 7 章引入的期限结构模型在仿射状态动力学的情形下，具有随机波动性的期权价格计算问题。我们运用转换分析，从而允许相对丰富和可处理的随机利率和波动性说明，并最后允许跳跃。重复第 7 章的内容，状态空间 $D\subset\mathbb{R}^k$ 中的状态过程 X 在 Q 下是仿射的，如果：

$$dX_t=\mu(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t^Q \tag{8.17}$$

其中对 $K_0\in\mathbb{R}^k$ 和 $K_1\in\mathbb{R}^{k\times k}$，$\mu(x)=K_0+K_1x$。以及对每个 i 和 $j\in\{1,\cdots,k\}$，有：

$$(\sigma(x)\sigma(x)^\top)_{ij}=H_{0ij}+H_{1ij}\cdot x \tag{8.18}$$

这里，$H_{0ij}\in\mathbb{R}$ 和 $H_{1ij}\in\mathbb{R}^k$，并且状态空间

$$D=\{x:H_{0ii}+H_{1ii}\cdot x\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n\} \tag{8.19}$$

注释中引用的关于系数(H,K)的技术条件能够保证(8.17)式有惟一解 X 存在。对时间序列的实证研究，我们经常方便地假设状态过程 X 在原有数据产生概率测度 P 下也是仿

射的，虽然与漂移有关的系数集变化为 $K^p=(K_0^p,K_1^p)$。其条件及其依时间而定的系数的推广均将在习题中探讨。

在此种情形下，假设对系数 $\rho_0\in\mathbb{R}$ 和 $\rho_1\in\mathbb{R}^k$，短期利率过程 r 具有仿射形式 $r_t=\rho_0+\rho_1\cdot X_t$。最后，我们假设对可能依时间而定的系数 $a_t\in\mathbb{R}$ 和 $b_t\in\mathbb{R}^k$，所研究的期权的标的价格过程 S 具有指数仿射形式 $S_t=\exp(a_t+b_t\cdot X_t)$。我们的例子包括权益证券、外汇的价格，或者像第 7 章所说明的零息债券的价格。

当 $X_t^{(1)}=Y\equiv\log(S_t)$ 和 $X_t^{(2)}=V_t$ 时，赫斯顿模型(8.16)式是仿射过程 $X=(X^{(1)},X^{(2)})$的一种特例。短期利率被假设是常数 $\bar{r}=\rho_0$。根据伊藤公式有：

$$dY_t=\left(\bar{r}-\frac{1}{2}V_t\right)dt+\sqrt{V_t}\,d\epsilon_t^S \tag{8.20}$$

这确实使得状态向量 $X_t=(Y_t,V_t)$ 是仿射过程，其状态空间为 $D=\mathbb{R}\times[0,\infty)$，其系数 (H,K) 则可根据赫斯顿模型的参数 $(\bar{r},c_{SV},\kappa,\bar{v},\sigma_v)$ 来选取。标的资产价格具有所希望的指数仿射形式，因为 $S_t=e^{Y(t)}$。我们稍后将回到赫斯顿模型并给出有关期权定价的一些明晰成果。

对一般的仿射情形，假设我们感兴趣的是定义在标的证券上的欧式看涨期权，其执行价格为 P，执行时间为 t。那么，我们有如下的初始期权价格：

$$U_0=E^Q\left[\exp\left(-\int_0^t r_u du\right)(S_t-p)^+\right]$$

令 A 表示事件 $\{\omega:S(\omega,t)\geqslant p\}$，即该期权到期时有实值，那么，期权价格为：

$$U_0=E^Q\left[\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)(S_t 1_A-p1_A)\right]$$

因为 $S(t)=e^{a(t)+b(t)\cdot X(t)}$，我们有：

$$\begin{aligned}U_0&=e^{a(t)}G(-\log p+a(t);t,b(t),-b(t))\\&\quad-pG(-\log p+a(t);t,0,-b(t))\end{aligned}\tag{8.21}$$

其中，对任意 $y\in\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^k$ 中的任意系数向量 d 和 δ，

$$G(y;t,d,\delta)=E^Q\left[\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)e^{d\cdot X(t)}1_{\delta\cdot X(t)\leqslant y}\right]\tag{8.22}$$

因此，如果我们能够计算函数 G，那么，我们就可获得具有任意执行价格和到期时间的期权价格。类似地，欧式看跌期权、利率上限、选择者期权以及许多其他衍生证券的价格也可以根据 G 推导出来，就像本章习题和注释中所给出的参考文献所说明的那样。

我们注意到，对固定的 (t,d,δ)，假定 $E^Q(\exp(\int_0^t -r_s ds)e^{d\cdot X(t)})<\infty$，那么，$G(\cdot;t,d,\delta)$ 是一个有界递增函数。对任意该种函数 $g:\mathbb{R}\to[0,\infty)$，相关的转换(函数)$\hat{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$(其中 $\mathbb{C}$ 是复数集)被定义为：

$$\hat{g}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{izy}dg(y)\tag{8.23}$$

其中i是通常的虚数，也常记为$\sqrt{-1}$。(附录H总结了复数算术的基本内容。)也许你习惯地把$\hat{g}$称为g的傅立叶变换。在技术条件$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{g}(z)|\mathrm{d}z<\infty$下，我们有列维(Levy)反转公式：

$$g(y)=\frac{\hat{g}(0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{z}\mathrm{Im}[e^{iyz}\hat{g}(z)]\mathrm{d}z \tag{8.24}$$

其中$\mathrm{Im}(c)$表示复数c的虚数部分。

对$g(\cdot)=G(\cdot;t,d,\delta)$的情形，借助于转换$\hat{G}(\cdot;t,d,\delta)$，我们可以从(8.24)式计算$G(y;t,d,\delta)$，通常的方法是用数值法计算(8.24)式中的积分，然后再从(8.21)式得出期权价格。因此，我们的最终目标是计算变换$\hat{G}$。固定z，对(8.23)式应用福比尼(Fubini)定理，有$\hat{G}(z;t,d,\delta)=f(X_0,0)$，其中$f:D\times[0,t]\to\mathbb{C}$被定义为：

$$f(X_s,s)=E^{Q}\left[\exp\left(-\int_s^t r_u\mathrm{d}u\right)e^{d\cdot X(t)}e^{iz\delta\cdot X(t)}\,\middle|\,X_s\right] \tag{8.25}$$

由(8.25)式，第7章中所用过的分离变量法意味着，在一定的技术规则性条件下，有：

$$f(x,s)=e^{\alpha(s)+\beta(s)\cdot x} \tag{8.26}$$

其中β是下述瑞加蒂(Riccati)普通微分方程(ODE)的解：

$$\beta'(s)=\rho_1-K_1^{\top}\beta(s)-\frac{1}{2}\beta(s)^{\top}H_1\beta(s) \tag{8.27}$$

边界条件为：

$$\beta(t)=d+iz\delta \tag{8.28}$$

而其中

$$\alpha(s)=\int_s^t\left[-\rho_0+K_0\cdot\beta(u)+\frac{1}{2}\beta(u)^{\top}H_0\beta(u)\right]\mathrm{d}u \tag{8.29}$$

普通微分方程(8.27)式与第7章中由于仿射期限结构计算而产生的普通微分方程完全一样，但由于$\beta(t)$的边界条件是复数的，因而$\alpha(t)$和$\beta(t)$的解也均为复数。我们必须遵循附录H中给出的复数运算法则来处理$\alpha(s)$和$\beta(s)$的实数和虚数部分。

因此，在一定的技术条件下，存在某特别值z取值的变换$\hat{G}(z;t,d,\delta)$。于是，我们便有期权定价公式(8.21)，其中$G(y;t,d,\delta)$来自反转公式(8.24)式对变换$\hat{G}(\cdot;t,b(t),-b(t))$和$\hat{G}(\cdot;t,0,-b(t))$的应用，而后两者可通过求解瑞加蒂方程(8.27)式及其各自对应的边界条件$b(t)-izb(t)$和$-izb(t)$。ODE(8.27)式在不能显示求解的情形下，进行数值积分得出(8.24)式，但所带来的数值计算会显得比较繁琐。不过，直接的PDE或者蒙特卡洛数值法的计算量通常会更大。

对赫斯顿模型情形下的期权定价，对给定特别选取的$u\in C$，我们只要求变换$\psi(u)=$

$e^{-\bar{r}t}E^{Q}[e^{uY(t)}]$。求解此种情形下的(8.27)式，我们有：

$$\psi(u)=e^{\bar{\alpha}(t,u)+u\bar{\beta}(t,u)V(0)+\bar{\beta}(t,u)V(0)}$$

其中，令 $b=u\sigma_v\rho_{SV}-\kappa$，$a=u(1-u)$ 和 $\gamma=\sqrt{b^2+a\sigma_v^2}$，我们有：

$$\bar{\beta}(t,u)=-\frac{a(1-e^{-\gamma t})}{2\gamma-(\gamma+b)(1-e^{-\gamma t})}$$

$$\bar{\alpha}(t,u)=\bar{r}t(u-1)-\kappa\bar{v}\left(\frac{\gamma+b}{\sigma_v^2}t+\frac{2}{\sigma_v^2}\log\left[1-\frac{\gamma+b}{2\gamma}(1-e^{-\gamma t})\right]\right)$$

能够计算明晰解的其他特别情形，可以在本章末的注释和习题中找到。

8.7 美式证券定价

本节讨论美式证券的定价问题。美式证券的最主要特点，就是现金流由美式证券的拥有人决定行权的时间即所谓的停止时间决定。我们先来看原始证券的情况，取有界短期利率过程 r，并假设其他证券的价格过程满足(8.1)式，其中 B^{Q} 是等价于 P 的概率测度 Q 下的标准布朗运动。我们在本节中也假设秩 $\mathrm{rank}(\sigma)=d$ 几乎处处成立，使得有限风险中性期望的任意随机收入不需借助于"加倍策略"就能被复制，正如命题 6.4 所阐明的那样。像第 2 章中所指出的那样，此种类型的某种动态张量特征对美式证券的定价非常重要。

由适应过程 U 和到期时间 $\bar{\tau}$ 定义的美式证券是在由证券所有人选择的停止时间 $\tau\leqslant\bar{\tau}$ 对收入 U_τ 的声明权。这样一种执行时间即是一种执行方针。与第 2 章中的离散时间情形一样，我们的目的是计算美式证券的价格过程 V，并概括理性执行方针，对此经典的例子是不变股票价格波动性和不变短期利率的布莱克—斯科尔斯情形下某股票的看跌期权。在这种情况下，我们有 $U_t=(p-S_t)^+$，其中 P 是执行价格，S 是标的资产价格过程。更一般地，我们将依靠下面的技术条件。

美式证券规则性条件 U 是一个有下界的适应连续过程，且 $E^{Q}(U_*)<\infty$，其中 $U_*=\sup_{t\in[0,T]}U_t$。

标的价格过程是伊藤过程的标准情形下的美式看跌期权，显然满足上述规则性条件。

给定特定的执行方针 τ，命题6.4意味着，在时间 T 对 $U_\tau\exp(\int_\tau^T r_s ds)$ 的声明权可用自融资交易策略 θ 来复制，该策略的市场价值过程 V^τ 是由下式给出：

$$V_t^\tau=E_t^{Q}(\varphi_{t,\tau}U_\tau)$$

其中 $\varphi_{t,\tau}=\exp(\int_t^\tau -r_s ds)$。这意味着，在时间 T 的收入 U_τ 是由交易策略 θ^τ 复制，直到时间 τ 时为 θ，然后为零，从而在时间 τ 产生总量支付 U_τ。

按照第 2.9 节所采用的方法，我们不妨定义理性执行方针为下述最佳停止问题的解：

$$V_0^* = \sup_{\tau \in \mathcal{T}(0)} V_0^{\tau} \tag{8.30}$$

其中 $\mathcal{T}(t)$ 表示取值于 $[t,\bar{\tau}]$ 上的停止时间集。这实际上是一个让初始复制成本最大化的问题。我们将证明，实际上存在停止时间 τ^* 可以解(8.30)式，而且“非病态”套利的缺乏意味着该美式证券必须起初以 V_0^* 销售。

如果 $V_0 < V_0^*$，那么，以 V_0 购买该美式证券，并采纳理性执行方针 τ^*，再于时间 τ^* 在初始收入 V_0^* 处复制收入 $-U(\tau^*)$，将共同产生净初始利润 $V_0^* - V_0 > 0$，此后再无其他现金流，这是一种套利。

为了排除另一种可能性 $V_0 > V_0^*$，我们将充分利用概念“超级复制交易策略”——一种自融资策略，特点是对所有的 $t \in [0,\bar{\tau}]$，其市场价值过程 Y 支配执行价值过程 U，即 $Y_t \geqslant U_t$。我们将阐明存在初始市场价值 $Y_0 = V_0^*$ 的超级复制交易策略。如果 $V_0 > V_0^*$，那么，就卖出美式证券，并采纳超级复制策略，意味着将产生初始利润 $V_0 - V_0^* > 0$，而且超级复制策略的市场价值 Y_t 有能力支付美式证券持有人在执行该策略时所需求的支付 U_t，而不管美式证券持有人的执行方针 τ 到底如何。实际上，惟一的无套利美式证券价格将会由(8.30)式给出。(为了处理美式证券，我们实际上已将套利的定义做了稍微的推广。)

令 $\hat{U}$ 为缩小后的执行价值过程，并由下式定义：

$$\hat{U}_t = \exp\left(\int_0^t -r_s ds\right) U_t$$

令 W 为 Q 下 $\hat{U}$ 的斯耐尔包络(snell envelope)，意即：

$$W_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}(t)} E_t^Q(\hat{U}_\tau), t \leqslant \bar{\tau} \tag{8.31}$$

其中 ess sup 表示实质上确界(essential supremum)。[换言之，对所有 $\tau \in \mathcal{T}(t)$，$P(W_t \geqslant E_t^Q(\hat{U}_\tau)) = 1$，以及如果 $\hat{W}$ 是任意其他 $\mathcal{F}_t$ 可测并且对所有 $\tau \in \mathcal{T}(t)$ 满足 $P(\hat{W}_t \geqslant E_t^Q(\hat{U})) = 1$ 的随机变量，那么 $P(W_t \leqslant \hat{W}_t) = 1$。]

回顾第 6 章我们知道，市场价值过程有下界的交易策略不可以取套利的某些“病态”变异，诸如加倍策略。

命题 8.1 *市场价值过程有下界且初始市场价值 $Y_0 = V_0^*$ 的超级复制交易策略 θ^* 是存在的。其理性执行方针由 $\tau^0 = \inf\{t : Y_t = U_t\}$ 给出。*

证明：在美式证券规则性条件下，注释中引用的文献资料告诉我们，$\hat{U}$ 的斯耐尔包络 W 是 Q 下一个连续上鞅，因而可以分解为形式 $W = Z - A$，其中 Z 是一个 Q 鞅，A 是一个递增适应过程且 $A_0 = 0$。由命题 6.4 和标准不变性法则，存在自融资交易策略，其市场价值过程 Y 的最终市场价值 $Y_T = Z_T \exp(\int_{\bar{\tau}}^T r_t dt)$ 并满足：

$$Y_t = E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^T -r_t dt\right)Y_T\right]$$

因此，Q 鞅 $\hat{Y}$ 由 $\hat{Y}_t = Y_t\exp(\int_0^t -r_s ds)$ 定义。因为 Z 也是一个 Q 鞅，对 $t \leqslant \bar{\tau}$，我们有：

$$\begin{aligned} Y_t &= \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)E_t^Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)Y_T\right] \\ &= \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)E_t^Q[Z(\bar{\tau})] \\ &= \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)Z_t \\ &= \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)(W_t + A_t) \end{aligned} \tag{8.32}$$

在(8.32)式中，取 $t=0$，我们有 $Y_0 = W_0 = V_0^*$，正如所声称的那样，根据(8.32)式，我们有：

$$Y_t \geqslant \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)W_t \geqslant U_t \tag{8.33}$$

上式的推导运用了 A_t 是非负的事实、$\hat{U}_t$ 的定义以及 $W_t \geqslant \hat{U}_t$ 的事实。因此，基础交易策略是超级复制的。因为 U 是有下界的，(8.33) 式意味着，复制市场价值过程 Y 是有下界的。而且，τ^0 是理性执行方针，因为：

$$V_0^* = Y_0 = E^Q\left[\exp\left(\int_0^{\tau^0} -r_t dt\right)Y(\tau^0)\right] = V_0^{\tau^0}$$

推导上式时，应注意 $\hat{Y}$ 是一个 Q 鞅以及 $Y(\tau^0) = U(\tau^0)$。 □

归纳起来，“套利定价”的内容总结如下。如果美式证券 $(U,\bar{\tau})$ 的初始价格 V_0 严格大于

$$V_0^* = \sup_{\tau\in\mathcal{T}(0)} E^Q\left[\exp\left(\int_0^\tau -r(s)ds\right)U_\tau\right] \tag{8.34}$$

那么，套利的构成为卖出期权，并且直到期权持有者选择执行时间 τ 采纳超级复制交易策略 θ^*；反之，如果 $V_0 < V_0^*$，那么，套利的构成为在时间 0 购买期权，在理性时间 τ^0 执行该期权，并直到变现时间 τ^0 采纳交易策略 $-\theta^*$。这些套利策略均不是第 6 章中讨论过的那类“加倍策略”；其含有的定价意义确实是与给定的等价鞅测度 Q 相一致。

对短期利率为常数 $\bar{r}$，标的价格过程 S 可以解出下述方程的“布莱克—斯科尔斯”情形下的美式看跌期权，我们的所有假设均成立：

$$dS_t = \bar{r}S_t dt + \bar{\sigma}S_t d\epsilon_t^S; \quad S_0 = x \tag{8.35}$$

其中 ϵ^S 是 Q 下的标准布朗运动。因此，执行价格为 p、到期时间为 $\bar{\tau}$ 的美式看跌期权的初始无套利价格为：

$$V_0^* = \max_{\tau\in\mathcal{T}(0)} E^Q[e^{-\bar{r}\tau}(p-S_\tau)^+] \tag{8.36}$$

在第 12 章中，我们将评论一些对该式取近似的数值方法。事实上，市场不需要是完备的，

我们的成果便可应用于这种简单情形，因为即使潜在的布朗运动的维数 $d>1$，命题 8.1 中的超级复制策略可根据具有价格过程 S 的标的证券和短期利率为 $\bar{r}$ 的基金来构造，并且其市场价值过程 Y 在任意停止时间 τ 支配执行价值 $(p-S_\tau)^+$，即使停止时间 τ 并非是由标的价格过程 S 的布朗运动 ϵ^S 所产生的信息决定。

通过推广我们的论点，我们可以处理直到某停止时间 $\tau\leqslant\bar{\tau}$ 执行而获得最终收入之前应先支付累积券息过程 H 的美式证券的定价问题。应用前面用过的论点，在类似的技术规则性下，美式证券 $(H,U,\bar{\tau})$ 的初始价格为：

$$V_0^* = \sup_{\tau\in\mathcal{S}(0)} E^Q\left(\int_0^\tau e^{\int_0^s r(u)du}dH_s + e^{\int_0^\tau -r(u)du}U_\tau\right)$$

8.8 美式证券执行边界

我们考察美式证券 $(U,\bar{\tau})$ 满足 $U_t=g(X_t,t)$ 的情形，其中 $g:\mathbb{R}^k\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 是连续的，对满足利普斯基茨(Lipschitz)条件的连续函数 a 和 b，X 是一个 $\mathbb{R}^k$ 维的满足下式 SDE 的状态过程：

$$dX_t=a(X_t)dt+b(X_t)dB_t^Q \tag{8.37}$$

为了简单起见，我们令利率过程 r 为零，但稍后我们将阐明，即使不简化技术性细节，也并不会使我们的结果失去一般性。我们采纳美式证券规则性条件，并再次假设美式证券对任意执行方针的冗余性。以时间 t 开始，并使(8.37)式取初始条件 $X_t=x$，那么，无套利价值由下式给出：

$$h(x,t)\equiv\sup_{\tau\in\mathcal{T}(t)} E_t^Q[g(X_\tau,\tau)] \tag{8.38}$$

通过检查，$h\geqslant g$。根据命题 8.1，最佳执行方针由下式给出：

$$\tau^0=\inf\{t\in[0,T]:h(X_t,t)=g(X_t,t)\} \tag{8.39}$$

根据(8.39)式，对所有的 $t<\tau^0$，$h(X_t,t)>g(X_t,t)$。令：

$$\mathcal{C}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^k\times[0,T]:h(x,t)=g(x,t)\} \tag{8.40}$$

我们可以写出 $\tau^0=\inf\{t:(X_t,t)\in\mathcal{C}\}$，并且可以安全地称 $\mathcal{C}$ 为执行区域，而称其补集

$$\mathcal{C}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^k\times[0,T]:h(x,t)>g(x,t)\}$$

为继续区域。为了求解最佳执行问题，只需把 $\mathbb{R}^k\times[0,T]$ 分成两块。最佳方针就是当 (X_t,t) 在 $\mathcal{C}$ 中时就执行，否则就等待。求解执行区域 $\mathcal{C}$ 通常是一个艰难的问题。

为了考察该解在偏微分方程方面的特征，假设 h 足够光滑以致我们可以应用伊藤公式。那么，

$$h(X_t,t) = h(X_0,0)+\int_0^t \mathcal{D}h(X_s,s)ds+\int_0^t h_x(X_s,s)b(X_s)dB_s^Q$$

其中

$$\mathscr{D}h(x,t)=h_t(x,t)+h_x(x,t)a(x)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[h_{xx}(x,t)b(x)b(x)^{\top}]$$

对任意初始条件(x,t)和任意停止时间$\tau\geqslant t$，由h的定义我们知道$E^Q[h(X_\tau,\tau]\leqslant h(x,t)$。由此，我们自然可以猜测对所有$(x,t)$，$\mathscr{D}h(x,t)\leqslant 0$。而且，我们可以看到对所有$(x,t)\in\mathscr{C}$，$\mathscr{D}h(x,t)=0$。下面我们总结这些关于$h$的猜测的必要条件，但为了简化起见，就省去变量$(x,t)$。在$\mathbb{R}^k\times[0,T]$上，有：

$$h\geqslant g,\qquad \mathscr{D}h\leqslant 0,\qquad (h-g)(\mathscr{D}h)=0 \tag{8.41}$$

上述最后一个条件的意思是只要$h>g$，$\mathscr{D}h=0$；反之，只要$\mathscr{D}h<0$，$h=g$。从感觉上说，只要价值函数的期望变化率不严格为负，那么，就要履行不执行的方针，这被称为贝尔曼条件。我们还有下述边界条件：

$$h(x,T)=g(x,T),\quad x\in\mathbb{R}^k \tag{8.42}$$

在注释中的参考文献所给出的强技术假设下，我们发现(8.41)式～(8.42)式这些必要条件也是h为价值函数的充分条件。价值函数的特征(8.41)式～(8.42)式适用于该价值函数数值解的有限差分算法。

为了包含非零利率，假设对基本有界函数$R(\cdot)$，短期利率过程r可以写成形式$r_t=R(X_t)$。由同样的观点，价值函数h的变化不等式(8.41)式～(8.42)式正好可以写成以前的形式，惟一例外的是处处都用$\mathscr{D}h(x,t)-R(x)h(x,t)$代替$\mathscr{D}h(x,t)$。

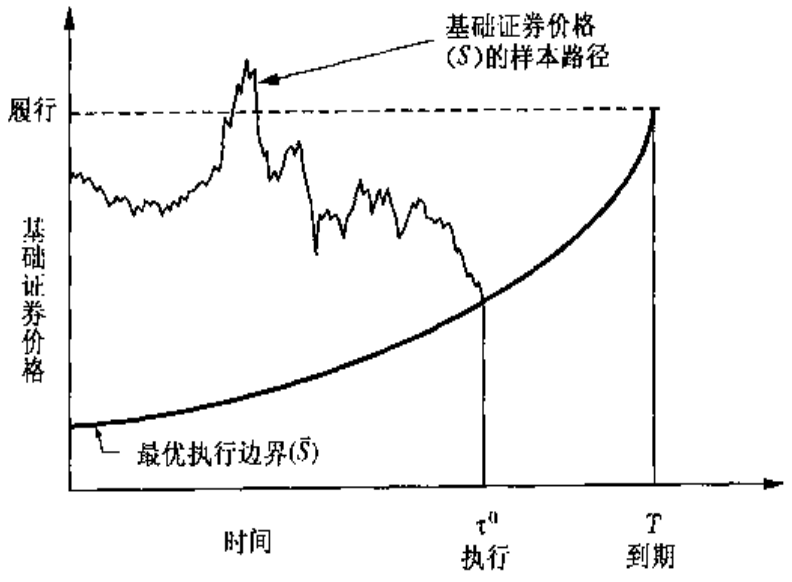


图 8.3 美式卖出期权的最优执行边界

对常数短期利率和由(8.35)式给出的不变波动性标的价格过程S的特别情形，令状态过程X为标的价格过程S。注释中所指出的一系列前沿文献可以导出解的下述特征：

因为 S 是非负的，继续区域 $\mathscr{C}$ 可以处理成 $\mathbb{R}_+\times[0,T)$ 上的一个子集。可以证明存在一个递增连续可微函数 $\bar{S}:[0,T)\to\mathbb{R}$，称为最佳执行边界，使得 $\mathscr{C}=\{(x,t):x>\bar{S}_t\}$。令 $\bar{S}_T=K$，最佳执行方针 τ^* 则为当(以及如果)股价 S"击中最佳执行边界"时就执行，正如图 8.3 所展示的那样，即 $\tau^*=\inf\{t:S_t\leqslant\bar{S}_t\}$。

不幸的是，最佳停止边界 $\bar{S}$ 还没有可用的显示解，但可以用数值方法来估计价值函数 h 和执行边界 $\bar{S}$。其中一种方法是二项模型的简单算法(3.23)式，在第 12 章中我们将看到，二项模型可以做为布莱克—斯科尔斯模型的一种近似。另一种方法是相关偏微分不等式(8.41)式～(8.42)式的直接有限差分数值解。通过把股价 x 变成它的对数 $y=\log(x)$，上述偏微分不等式可以写成：在 $\mathbb{R}\times[0,T)$ 上，

$$\begin{gathered}h(y,t)-(K-e^y)^+\geqslant 0\\ \mathscr{D}h(y,t)-\bar{r}h(y,t)\leqslant 0\\ [h(y,t)-(K-e^y)^+][\mathscr{D}h(y,t)-\bar{r}h(y,t)]=0\end{gathered}\tag{8.43}$$

边界条件为：

$$h(y,T)=(K-e^y)^+,\quad y\in\mathbb{R}\tag{8.44}$$

其中

$$\mathscr{D}h(y,t)=h_t(y,t)+\left(\bar{r}-\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)h_y(y,t)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}h_{yy}(y,t)\tag{8.45}$$

并不是所有上述 h 的导数均成立，但由注释中的文献资料可知，就计算的目的而言，处理(8.43)式～(8.44)式并没有实质性的困难。

8.9 回望期权

如果某些衍生证券在给定时间的收入取决于当时标的资产价格所走的路径，那么，该类衍生证券就被说成是依路径而定的。一个重要且能说明问题的例子是回望期权。

考虑执行时间为 T 的最高卖出期权情形。令某证券的价格 S 为伊藤过程，令 r 表示有界适应短期利率过程。对任意时间 t 和 $s\geqslant t$，令 $S^*_{t,s}=\max\{S_u:t\leqslant u\leqslant s\}$ 表示在时间 t 和时间 s 之间上述价格过程所取得的最大值水平。该期权赋予期权持有者在时间 T 将该证券以价格 $S^*_{0,T}$ 卖出的权利。当然，$S^*_{0,T}\geqslant S_T$，因此，期权执行收益为 $S^*_{0,T}-S_T$。若给定等价鞅测度 Q，那么，在时间 t 该期权的市场价值为：

$$V_t=E^Q_t\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right)(S^*_{0,T}-S_T)\right]\tag{8.46}$$

对满足(8.35)式的对数正态证券价格过程和常数短期利率 $\bar{r}$ 的情形，我们可以得出回望期权价格过程 V 的闭型(Closed-from)解。我们知道 $S_t=S_0\exp(\alpha t+\bar{\sigma}\epsilon^S_t)$，其中 ϵ^S

是Q下的一个标准布朗运动以及$\alpha=\bar{r}-\bar{\sigma}^2/2$。因此，

$$\begin{aligned} S^*_{0,T} &= \max(S^*_{0,t}, S^*_{t,T}) \\ &= \max[S^*_{0,t}, S_t \exp(Z_{t,T})] \end{aligned} \tag{8.47}$$

其中

$$Z_{t,T} = \max_{u\in[t,T]} \alpha(u-t) + \bar{\sigma}(\epsilon^S_u - \epsilon^S_t) \tag{8.48}$$

基于注释中的参考文献，我们知道，$Z_{t,T}$的累积分布函数F_{T-t}由下式给出：

$$F_\tau(z) = 1-\Phi\left(\frac{z-\alpha\tau}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}}\right) + e^{2\alpha z/\bar{\sigma}^2}\Phi\left(\frac{-z-\alpha\tau}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}}\right), \quad z>0 \tag{8.49}$$

其中Φ是标准正态累积分布函数。由(8.47)式，有：

$$E^Q_t(S^*_{0,T}) = F_{T-t}(z^*)S^*_{0,t} + [1-F_{T-t}(z^*)]S_t\int_{z^*}^{\infty} e^z F'_{T-t}(z)\mathrm{d}z \tag{8.50}$$

其中$z^* = \log(S^*_{0,t}) - \log(S_t)$。

由于不存在股息，时间T的支付S_T在时间t时的市场价值为S_t。由(8.46)式，我们可以得出：

$$V_t = E^Q_t(e^{-\bar{r}(T-t)}S^*_{0,T}) - S_t$$

计算出(8.50)式中的积分后，我们于是有向后看最高价卖出期权的价格$V_t = v(S_t, S^*_{0,t}; T-t)$，其中

$$\begin{aligned} v(x,y;\tau) = &-x\Phi(-D) + e^{-\bar{r}\tau}y\Phi(-D+\bar{\sigma}\sqrt{\tau}) \\ &+\frac{\bar{\sigma}^2}{2\bar{r}}e^{-\bar{r}\tau}x\left[-\left(\frac{x}{y}\right)^{-2\bar{r}/\bar{\sigma}^2}\Phi\left(D-\frac{2\bar{r}}{\bar{\sigma}}\sqrt{\tau}\right) + e^{\bar{r}\tau}\Phi(D)\right] \end{aligned} \tag{8.51}$$

其中

$$D = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{\tau}}\left(\log\left(\frac{x}{y}\right) + \bar{r}\tau + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\tau\right)$$

类似的无套利最低价购买回望期权的价格公式也是闭型的。该种衍生证券在时间T支付$S_T - S_{*,0,T}$，其中

$$S_{*,t,s} = \min\{S_u : t\leqslant u\leqslant s\} \tag{8.52}$$

依路径而定的其他种类的衍生证券包括：

- 撞出期权(Knock-outs)：如果标的资产价格在期权到期前触击某给定边界，其收入为零。(参见习题2.1。)
- 撞进期权(Knock-ins)：除非标的资产价格在期权到期前触击其给定边界，否则其收入是零。
- 障碍衍生证券：在某个给定过程，通常标的资产价格触击某边界时，期权即可在此时获得收入。
- 亚式期权(Asians)：其收入取决于期权到期之前标的资产价格的样本路径在持有

时间上的平均值。

依路径而定的期权有时也被称为奇异期权，尽管有些期权在市场上很常见。但是，奇异期权的概念更广，它所包括的期权有些并不是依路径而定的。一些相关的文献资料可在注释中找到。

习 题

8.1 运用基尔萨诺夫定理证明由(8.8)式定义的期货价格过程 Φ 是伊藤过程(在原有测度 P 下)。

8.2 运用伊藤公式验证(8.9)式。

8.3 证明：像第 8.4 节中所声明的那样，如果 Φ 是伊藤过程，Y 有界并且 0 为其下界，那么，当且仅当 Φ 是鞅时，那么 $\int Y\mathrm{d}\Phi$ 是鞅提示：运用伊藤过程的惟一分解特征。

8.4 假设有 3 种交易证券。证券 1 的价格过程 X 由 $X_t=x\exp(\alpha t+\beta\cdot B_t)$ 给出，其中 $\alpha\in\mathbb{R}$，$\beta\in\mathbb{R}^2$，B 是 $\mathbb{R}^2$ 维的标准布朗运动。证券 2 的价格过程 Y 由 $Y_t=y\exp(at+b\cdot B_t)$ 给出，其中 $a\in\mathbb{R}$，$b\in\mathbb{R}^2$。证券 3 的价格过程为 e^{rt}，其中 r 是常数。所有证券在期间 $[0,T]$ 均不支付券息。考虑某个契约，该契约在时间 $T>0$ 要么支付 k 单位的证券 1，要么支付一个单位的证券 2，具体是哪种方案可由契约权所有人选择。请计算无套利的契约价格。

8.5 考虑按下述定义的滚动现期期货合约(rolling spot futures contract)：该契约承诺连续不断地支付，并根据标的资产的现货价格 S_t 而变化，这与期货结算款一样。也就是说，从契约来看，契约所对应的滚动现期期货价格过程 U 满足 $U_T=S_T$，并且契约在任意两个时间 t 和 $s\geqslant t$ 之间的总盈利为 G_s-G_t，其中 $G_t=U_t+S_t$。证明：给定等价鞅测度的存在(这在本质上相当于无套利)，滚动现期期货价格过程由 $U_t=2\Phi_t-S_t$ 给出，其中 Φ_t 是传统的期货价格。

8.6 第 8.9 节中，在用来推导“以最高价卖出”期权的价格(8.50)式的相同假设下，我们定义了“以最低价买入”的回望期权。请计算此种期权的价值。

8.7 考虑满足(8.35)式(对数正态模型)的标的资产价格过程 S 和定义其上的期货期权。即我们令 f 为在时间 T 交付标的资产的未来(期货)价格，再考虑在给定时间 $\tau<T$ 支付 $(f_\tau-K)^+$ 的证券，请计算此种期货期权的初始价格。

8.8 假设短期利率过程 r 由第 7.4 节中的考克斯—英格索—罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)模型给出。请计算在时间 $\tau<T$ 交付到期日为 T 的零息债券的期货价议远期价格(在时间 0 时)。提示：对期货价格，猜测形式 $f(r_t,t)=e^{\alpha(t)+\beta(t)r(t)}$，对 $t<\tau$ 和依时间而定的系数 α 和 β 成立。你可以决定 β 的普通微分方程，及其在 τ 时的边界条件。考虑由 $b(t)=\beta(t)^{-1}$ 给出的变量变化。请依次求解 b、β 和 α。

8.9 (市场选时期权定价公式)考虑有常数短期利率 r 的经济体系，以及权益资本价格过程为几何布朗运动 S 的一家公司。我们假设，像通常一样，对给定实数参数 α 和 σ，$S_t=S_0\exp(\alpha t+\sigma B_t)$，其中 B 是标准布朗运动。设想有两种证券：无风险证券和风险证券。某个证券组合由此两种证券组成。不变比例投资策略由风险资产价值占证券组合价值的分数常数 $b\in\mathbb{R}$ 定义。因此，此策略要求不断调整以维持该分数在时间上恒为常数。(例如在第 9 章中，我们发现，在 HARA 效用函数和技术规则性条件下，这样一种政策是最佳的。)

与这样一种政策系数 b 对应的财富过程 $W(b)$，当给定初始财富 $W(b)_0=1$ 时，对任意 $b\in\mathbb{R}$，该过程可以被清晰地定义。

如果你在时间 0 时事先知道标的股票价格的路径，那么，你可以利用这一知识从不同的方案中来适当地选择不变比例政策。这样一种事先知识政策由不变风险投资比例 b 定义，而 b 为 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量。当然，我们假设这种事先知识是不可能有的。但是，经纪人—交易商决定提供销售衍生证券，该衍生证券的收益为事先知识条件下选择的不变比例投资策略的价值。经纪人—交易商将其称为市场选时期权(market-timing option)。该市场选时期权在固定时间 T 的收益为 $W(b^*)_T$，其中对任意 ω，分数 $b^*(\omega)$可以解出下述问题：

$$\max_{b\in[0,1]} W(b,\omega)_T$$

b 从[0,1]中取值的要求意味着两种证券均不可以做空。换句话说：经纪人—交易商将付给投资者的收益对应着一个不变比例的投资政策，该政策中的风险资产分数是在时间 T 观察到所有已发生的事情后才选择的。

(A)假设不存在套利，计算市场选时期权的市场价值。在这里，应该排除的套利种类应是下述形式的：股票和银行账户的自融资交易策略 $\theta\in\mathcal{H}^2(S,e^{-rt})$，再加上固定市场选时期权头寸。证明：在你提出的价格水平上没有这种套利，而在其他价格水平上则存在此种套利。

(B)假设经纪人—交易商提供销售的市场选时期权有一个变化，那就是风险资产比例 b 不局限于[0,1]，而是完全不受约束。如果市场选时期权存在有限无套利价格，那么，请计算该价格，并像上面一样说明原因。如果没有，也说明原因。

8.10 (黄金交付合同定价)黄金的现货价格过程 S 被假设是有不变风险参数 v 的几何布朗运动。为了简单起见，利率被假设为常数 $r\geqslant 0$。我们假设黄金可以无成本地贮藏，也不支付利息。也就是说，布莱克—斯科尔斯模型的通常假设均可以满足。

某金矿公司向某些特别顾客提供下述交付合同。对价格 p(制定和付款的日期为 0)，顾客可以获得权利而不是义务，从金矿公司那里购买 n 盎司黄金，购买日期由顾客在时间 $T>0$ 和 $U>T$ 之间选择，价格为时间 T 时确定的现货价格 S_T。对时间 T 和 U 之间的任意时间 t，是否以价格 S_T 购买黄金的决定可以根据时间 t 时所具有的全部信息来做出。但是每天最多有 k 盎司黄金可以被购买。每天的购买决定可以在固定时间做出，例如说中午。为了记法上的方便，你可以假设 n/k 是整数，且 $U-T\geqslant n/k$。

(A) 给出(并说明理由)黄金交付合同惟一无套利价格 p 的明晰公式。

(B) 对时间 0 时确定和支付的某个额外费用 f，顾客可以选择在某个给定时间 T_0(0 和 T 之间)加倍合同的购买量到 $2n$ 盎司，但顾客需要在时间 T_0 支付一笔额外的款项 p。请显示地给出 f 的无套利水平。你可以出于记法上的简便，假设 $U-T\geqslant 2n/k$。

8.11 对于有参数向量$(\bar{r},c_{SV},\kappa,\bar{v},\sigma_v)$的赫斯顿(Heston)模型，本习题将探讨转换解方法的一种变形。对实数系数 h 和固定时间 t，令 U 可以解下述 SDE：

$$dU_t=(\bar{r}+hV_t)dt+\sqrt{V_t}d\epsilon_t^S;\quad U_0=\log S_0$$

对任意实数 y 和时间 t，令

$$g(y)=Q(U_t\leqslant y) \tag{8.53}$$

(A) 证明 $g(\cdot)$的转换 $\hat{g}$ 由下式给出：

$$\hat{g}(z)=\exp[C(t,z)+D(t,z)V_0+izU_0] \tag{8.54}$$

其中

$$C(t,z)=\bar{r}izt+\frac{\kappa\bar{v}}{\sigma_v^2}\left[(\kappa-c_{SV}\sigma_v zi+\varphi)t-2\log\left(\frac{1-\zeta e^{t\varphi}}{1-\zeta}\right)\right]$$

$$D(t,z)=\frac{\kappa-c_{SV}\sigma_v zi+\varphi}{\sigma_v^2}\cdot\left(\frac{1-e^{t\varphi}}{1-\zeta e^{t\varphi}}\right)$$

对

$$\zeta=\frac{\kappa-c_{SV}\sigma_v zi+\varphi}{\kappa-c_{SV}\sigma_v zi-\varphi}$$

成立。这里，

$$\varphi=\sqrt{(c_{SV}\sigma_v zi-\kappa)^2-\sigma_v^2(2hzi-z^2)}$$

提示：验证系数 $C(\cdot,z)$ 和 $D(\cdot,z)$ 满足适当的瑞加蒂(Riccati)方程。

(B) 请给出标的证券的买入期权的价格。该期权的作废时间为 t，执行价格为 p。提示：为了计算期权定价公式(8.21)式的项 $G(y;t,b(t),-b(t))$，考虑把标的证券的价格过程 S 作为计价标准。考虑 h 和由 V 解出的 SDE 参数与使用的概率测度有关。运用列维(Lévy)反转公式，令 $\hat{g}(0)=0.5$，而不需要直接从上述的转换解形式来评价 $\hat{g}(0)$。

(C) 对存在下述参数的赫斯顿模型：

$$(r,c_{SV},k,\bar{v},\sigma_v)=(0.05,-0.5,0.5,0.99,0.09)$$

令 $S_0=100$ 和 $V_0=0.09$。请为欧式买入期权的微笑曲线(布莱克—斯科尔斯隐含的风险)绘图或制表。该期权的作废时间为 $t=0.25$。现阶段令相关参数 $c_{SV}=0$，请重新绘图。你可以运用任何(方便的)数值积分软件来计算(8.24)式。

8.12 (风险对冲应用) 在第 5 章中我们就知道，隐含树模型的特征之一是期权可被复制。因此，可对期权进行对冲应用，其方法是运用涉及标的资产和投资于短期利率 r 的基金的某种自融资交易策略。一般来说，随机风险模型并不具有这种特征。但是在规则性条件下，人们可以用涉及标的资产和投资于无风险利率 r 的基金的某种自融资交易策略来复制给定期权。

(A)具体来说，让我们考虑标的资产价格过程 S 的模型(8.11)式和风险过程 V 的模型(8.14)式，两过程的相关系数为 $c_{SV}\in(0,1)$。令 $\Phi_t=f(S_t,V_t,t)$ 和 $\Gamma_t=g(S_t,V_t,t)$ 表示在未来某时间 τ 作废，执行价格分别为 p_1 和 p_2 的两期权在时间 t 时的价格。假设 f 和 g 可以解费恩曼—凯科法的 PDE。假设短期利率为常数 $\bar{r}$。令 $\theta=(a,b,c)$ 表示价格过程 $(S_t,\Phi_t,e^{\bar{r}t})$ 中能够复制执行价格为 p_2、价格过程为 Γ 的期权的收益的自融资交易策略。请根据 f、g 和它们的偏导数明晰地求解 θ_t(尽可能少用一些假设)。

(B)对存在下述参数的赫斯顿(Heston)模型：

$$(\bar{r},c_{SV},\kappa,\bar{v},\sigma_v)=(0.05,-0.5,0.5,0.09,0.09)$$

令 $S_0=100$，$V_0=0.09$ 和 $p_1=100$。当被复制的期权的执行价格 p_2 的变化范围为 60～150 时，估计初始复制资产组合 (a_0,b_0,c_0)，并制表或画图，请给出最小 10 个点的数据。为了估计偏导数，你可以用分析法(列出过程)，也可以采用通常的离散近似法。在离散近似法下，对小的 Δ，我们有 $F'(x)\approx[F(x+\Delta)-F(x-\Delta)]/2\Delta$。

8.13 (仿射期限结构模型中的期权定价) 本习题说明如何在仿射状态动力学情形下计算债券期权的价格。与第 7.9 节稍微不同的是，我们开始就让状态过程 X 的行为在原有给定概率测度 P 下给出，而不是在等价鞅测度 Q 下给出，即假设 X 可以解下述形式的随机微分方程：

$$dX_t=[K_0^P+K_1^P X_t]dt+\sigma(X_t)dB_t,\quad X_0\in D\subset\mathbb{R}^k \tag{8.55}$$

其中 B 是 P 下 $\mathbb{R}^d$ 维的标准布朗运动，而 σ 则满足(8.18)式。我们再假设关于系数 $K^P=(K_0^P,K_1^P)$ 和 $H=(H_{0i},H_{1ij})$ 的其他条件能够保证(8.55)式在由(8.19)式定义的状态空间 D 中有惟一解 X 存在。为

了简便起见，你可以假设 D 包含开集。

(A)给定经济的状态价格缩子 π 被假设是由 $\pi_t=\exp(X_t^{(1)})$[即状态过程 $X=(X^{(1)},\cdots,X^{(k)})^{\mathsf{T}}$ 的第一个坐标的指数函数]定义的过程。这说明短期利率过程 r 由 $r_t=\rho_0+\rho_1\cdot X_t$ 定义，其中 $\rho_0\in\mathbb{R}$，$\rho_1\in\mathbb{R}^k$。请计算 ρ_0 和 ρ_1。

(B)由 π 的定义可知，给定时间 $s\geqslant t$ 到期的零息债券在时间 t 的价格是由 $f(X_t,t,s)=E_t(\pi_s)/\pi_t$ 给出。根据第 7.9 节中的观点，请推测可由 $a:[0,s]\to\mathbb{R}$ 和 $b:[0,s]\to\mathbb{R}^k$ 解出以使得 $f(x,t,s)=\exp[a(s-t)+b(s-t)\cdot x]$ 的普通微分方程(ODE)。请不要忘记给出边界条件。这种普通微分方程(下面我们将再次遇到)很容易用数值法解出，而且我们假定其解是存在的。请给出技术可积性条件，并验证在此可积性条件下关于 f 的候选解。提示：如果伊藤过程是鞅，那么，其漂流过程必然为零。

(C)假设有 $n>0$ 个此种零息债券可供交易，到期日分别为 $T_1,T_2,\cdots,T_n$。请给出张量条件。在此张量条件下，原则上另外的证券是多余的(另外的证券在时间 T 的收益由有界的 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量 Z 给出)，假定人们有机会交易这几个债券，并且能够自由地、连续地以短期利率 r 借或贷。请写出多种你所需要的记法。

(D)我们现在来探讨特别的零息债券期权的定价问题。该零息债券期权提供一种机会但不是义务，在时间 τ 以给定价格 $p>0$ 卖出在时间 $s>\tau$ 到期的零息债券(到期时，该债券支付一个计价单位)。当且仅当 $\exp[a(s-\tau)+b(s-\tau)\cdot X_\tau]\leqslant p$，即当且仅当有事件 $A_\tau=b(s-\tau)\cdot X_\tau\leqslant\log p-a(s-\tau)$ 时，该期权在到期时是实值的。在可积性条件下，可以看出，对某系数 c_1 和 c_2 以及对等价于 P 的某概率测度 Q_1 和 Q_2，该期权在时间 0 时的价格具有形式 $c_1Q_1(A)-c_2Q_2(A)$。请给出可积性条件、Q_1 和 Q_2 对 P 的拉顿－尼科代姆(Radon-Nikodym)导数，以及 c_1 和 c_2 的定义。请解释如何从市场数据得到系数 c_1 和 c_2。

(E)对任意 $i\in\{1,2\}$，在技术可积性条件下，可以证明 Q_i 的密度过程 ξ_i 具有形式 $\xi_i(t)=\exp[\alpha_i(t)+\beta_i(t)\cdot X_t]$，其中 α_i 和 β_i 为普通微分方程的解。请给出这些普通微分方程及其边界条件和能得出此解的技术可积性条件。

(F)在 Q_i 下，对任意 $i\in\{1,2\}$，请给出由 Q_i 下 $\mathbb{R}^d$ 维标准布朗运动驱动 $B^{Q(i)}$ 的状态向量过程 X 的新的随机微分方程，并请定义 $B^{Q(i)}$。

(G)通过前几步的工作，你已经说明，如果对任意 $\gamma\in\mathbb{R}^d$ 和任意 y，能够算出形式为 $Q_i(\gamma\cdot X_T\leqslant y)$ 的任意概率，那么，债券期权价格可以很容易被计算出来。如果我们知道由 $\psi(u)=E[\exp(iuZ)]$ 定义的 Z 的特征函数 $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 为虚数，那么，对给定的随机变量 Z 和数值 z，我们就可以计算 $P(Z\leqslant z)$。因此，此种情形下的期权定价可能被简化成 Q_1 和 Q_2 下 $Z=\gamma\cdot X_T$ 的特征函数的计算。[有时也称这一过程为傅立叶变换(Fourier transform)，傅立叶变换和特征函数除了有系数的差别之外，两者是相等的。]在第 8.6 节的成果基础上，固定 u 和 d，再定义 $\psi(X_t,t)=E_t[\exp(iud\cdot X_T)]$，我们猜测有：

$$\psi(x,t)=\exp[\alpha(t)+\beta(t)\cdot x]$$

其中 α 和 β 为取复数且能够解变通微分方程(ODEs)的系数函数。假设现有概率测度下 X 的依据时间的系数 $(K(t),H(t))$ 给定，你现在的任务是给出 α 和 β 的 ODE 及其边界条件，给出可积性条件(当你运用伊藤公式验证你的解时，你就会碰到这些可积性条件)并且证实你的猜测。提示：$\psi(x,t)$ 是复数，可以应用伊藤公式得到漂流(实数和虚数两部分)。你将看到关于漂流的限制，由此你可以得到希望的 ODE。请尽可能清晰地表达 ODE。注意：实际中，就目前情况而言，你需要分别计算每个 u 的微分方程

的解(若应用计算技巧可以加快解题速度),以及从即将出现的特征函数用数值法计算需要的数值 c_1、c_2、$Q_1(A)$和 $Q_2(A)$。

注 释

期权、期货或其他衍生证券市场的一般回顾和评论性文章包括下述参考文献:阿维兰尼达和劳伦斯(Avellaneda and Laurence,2000),考克斯和鲁宾斯坦因(Cox and Rubinstein,1985),代格勒(Daigler,1993),达菲(Duffie,1989),哈尔(Hull,2000),加罗和路德(Jarrow and Rudd,1983),加罗和腾布尔(Jarrow and Turnbull,1999),拉姆伯登和拉佩尔(Lamberton and Lapeyre,1997),缪塞拉和路特克威斯基(Musiela and Rutkowski,1997),普莱斯曼(Prisman,2000),鲁宾斯坦因(Rubinstein,1999),希格尔和希格尔(Siegel and Siegel,1990),以及思多尔和韦利(Stoll and Whaley,1993)。关于计算问题请参见本书第12章,塔凡拉和雷恩达尔(Tavella and Randall,2000),以及威尔姆特、迪威尼和霍威森(Wilmott,Dewynne,and Howison,1993)。迪科斯特和平迪克(Dixit and Pindyck,1993)是关于不确定性条件下生产计划和资本预算理论中产生的实物期权建模的一个很全面的处理,并且给出了不少参考资料。

(第8.2节~第8.4节)第8.2节~第8.4节中远期合约和期货之间的关系是由考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1981b)推导出的。这里给出的期货价格鞅特征(8.8)式的推导是原创性的,尽管公式本身及随后的复制策略来自于考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1981b)。这方面的更进一步的研究工作,请参见比克(Bick,1994),迪兹巴克什(Dezhbakhsh,1994),达菲和史丹登(Duffie and Stanton,1988),以及麦纳尼(Myneni,1992b)。一个明晰的高斯型案例由杰姆斯迪安(Jamshidian,1993b)以及杰姆斯迪安和费恩(Jamshidian and Fein,1990)给出。格瑞恩伯拉特和杰格迪斯(Grinblatt and Jegadeesh,1996)推导出了期限结构考克斯—英格索—罗斯模型下债券的期货价格。卡尔(Carr,1989)根据标的资产远期价格随机模型推导出随机券息资产的期权定价模型。

比克(Bick,1997),卡尔(Carr,1993b),卡尔和陈(Carr and Chen,1993),以及海勒(Hemler,1990)对向未来契约交付多种不同质量的标的资产的选择权(有时称为最廉价交付期权或质量期权)的定价及其对应的确定期货价格问题进行研究。这一问题与定价复合期权以及几种资产的最小值、最大值期权有关,而且这个问题的解(在布莱克—斯科尔斯模式下)可以在下述文献中找到:哥斯克(Geske,1979),约翰逊(Johnson,1987),玛格瑞博(Margrabe,1978),赛尔拜和霍德格斯(Selby and Hodges,1987),以及思杜尔茨(Stulz,1982)。有关不规则期权的定价问题,请参见弗莱明和韦利(Fleming and Whaley,1994)。

布莱克(Black,1976)说明了如何将布莱克—斯科尔斯期权定价公式推广到期货期权的情形。读者也可参见布莱克(Black,1988)。

关于看跌—看涨期权的平价关系和对称性,可参见卡尔(Carr,1993a)。习题8.8中探讨过的考克斯—英格索—罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)模型下债券的远期和期货价格可在格瑞恩伯拉特(Grinblatt,1994)中找到。卡尔(Carr,1989)考察过的相关问题是当"搬运"成本未知时期权的定价问题。

(第8.5节~第8.6节)贝克斯(Beckers,1981)发展和倡导了运用隐含波动性作为测量期权价格隐含的市场波动性的思想。比克和雷兹曼(Bick and Reisman,1993)讨论了更一般的隐含波动性问题。切瑞安和加罗(Cherian and Jarrow,1998)探讨相关的"理性"问题。

德曼和卡尼(Derman and Kani,1994),达派(Dupire,1994a,b),杰克维斯(Jackwerth,1997,2000),杰克维斯和鲁宾斯坦因(Jackwerth and Rubinstein,1996a,b,c),鲁宾斯坦因(Rubinstein,1994,1995)以及

托夫特和布朗(Toft and Brown,1996)论述了期权定价的隐含树模型,并根据一族给定的"微笑曲线"或风险中性概率分布进行标准。安德逊和布洛斯顿—莱特克利夫(Andersen and Brotherton-Ratcliffe,1995)对微笑分析采用"隐含有限差分"法。拉格那多和欧歇尔(Lagnado and Osher,1996)则阐述了一种通用的标准法。

布黎登和林特博格(Breeden and Litzenberger,1978)描述了在某些情形下,如何从不同履约价格的期权价格中反推出状态价格缩子。这一课题在下述文献中得到了进一步的探讨:艾特—沙哈利和罗(Ait-Sahalia and Lo,1998,2000),雷迪(Rady,1995),罗森堡和恩格尔(Rosenberg and Engle,1999)。

哈尔和怀特(Hull and White,1987),斯科特(Scott,1987,1992),以及维金斯(Wiggins,1987)提出了期权定价具有随机波动性来作为"微笑曲线"的回答。这一问题在下述文献中得到了进一步的分析:阿明(Amin,1993b),阿明和吴(Amin and Ng,1993),阿明和莫顿(Amin and Morton,1994b),波尔和罗玛(Ball and Roma,1994),巴勒斯、罗玛诺和托兹(Barles,Romano,and Touzi,1993),段(Duan,1995),赫斯顿(Heston,1993),霍夫曼、普雷登和施维茨(Hofmann,Platen,and Schweizer,1992),卢和余(Lu and Yu,1993),麦当和张(Madan and Chang,1996),普雷登和施维茨(Platen and Schweizer,1994),雷诺特、帕斯特瑞罗和托兹(Renault,Pastorello,and Touzi,2000),雷诺特和托兹(Renault and Touzi,1992),以及托兹(Touzi,1993,1995)。

阿明和加罗(Amin and Jarrow,1993)论叙了奚斯—加罗—莫顿模式下随机利率的期权定价问题。麦里诺和腾布尔(Melino and Turnbull,1990)演示了外汇期权定价的一个应用。赫恩和凯特(Heynen and Kat,1993)以及赫恩、凯姆纳和福斯特(Heynen,Kemna,and Vorst,1994)给出马尔可夫模式下预测波动性的公式。奈尔逊(Nelson,1990,1991,1992)论述 ARCH、GARCH 和 EGARCH 模型与第 8.5 节中所考虑的那类随机波动模型的收敛性问题以及其他相关的问题。但是,科拉第(Corradi,2000)说明,更自然的收敛概念会使得(8.13)式所定义的退化的风险波动过程有局限性。别勒斯拉夫、邹和克莱纳(Bollerslev,Chou,and Kroner,1992)以及泰勒(Taylor,1994)考察源自恩格尔(Engle,1982)的 ARCH 和 ARCH 相关的模型在金融领域内的应用。赫斯顿和南迪(Heston and Nandi,1997)给出了 GARCH 模式下期权定价的模型。哈威、路易茨和谢泊德(Harvey,Ruiz,and Shephard,1994),哈威和谢泊德(Harvey and Shephard,1993),以及拉姆洛克斯和拉斯瑞普(Lamoureux and Lastrapes,1993)阐述了相关的计量经济方法和内容。霍布森和罗杰斯(Hobson and Rogers,1993)描述了内生随机波动性模型,而霍布森和罗杰斯(Hobson and Rogers,1998)则阐明了在随机波动性下市场怎样才能完整。这一问题在罗玛诺和托兹(Romano and Touzi,1997)中得到了更进一步的研究,该文中还可以找到期权价格对随机波动性状态变量的单调性条件。

第 8.5 节中的命题①可以从卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve,1988)的成果中推导出来。

根据克拉科(Clark,1973)的早期工作,基曼、麦当和约尔(Geman,Madan and Yor,1999),吉塞尔斯、高瑞洛克斯和杰斯埃克(Ghysels,Gourieroux,and Jasiak,1995),玛舒迪(Maghsoodi,1998),莱德克普(Redekop,1995),以及莱德克普和费希尔(Redekop and Fisher,1995)通过随机时间变化(有时称为"市场选时")的影响考察随机波动性。贝尔格曼、格洛恩迪和维纳(Bergman,Grundy,and Wiener,1996b),伊尔卡洛伊、杰安伯兰克和施莱弗(El Karoui,Jeanblanc,and Shreve,1998),克雷和辛(Krey and Sin,

① 原著第 8.5 节中无命题出现,可能是因版本不同而产生疏漏。——译者注

1997)，罗玛诺和托兹(Romano and Touzi,1997) 概括了期权价格对标的资产价格和包括波动性的模型系数的依赖特征。上述这些成果运用随机流的方法给出了期权价格对标的资产的凸性条件。

下述文献试图将时间序列计量经济模型推广到将参数的期权价格观测数据用于估计随机波动性过程：艾特 沙哈利、王和亚瑞德(Ait-Sahalia, Wang, and Yared,1998)，本索尼(Benzoni,1998)，切诺和吉塞尔斯(Chernov and Ghysels,2000)，郭(Guo,1998)，潘(Pan,1999)，波特希曼(Poteshman,1998)，以及雷诺特和托兹(Renault and Touzi,1992)。给定 V_t 和在时间 t 的特定期权价格之间的一一对应关系，充分利用期权数据可以改善估计的计量经济效率。有关随机波动性的其他计量经济方法还包括弗克、帕潘尼克拉欧和瑟卡(Fouque, Papanicolaou, and Sircar,1999a, b, c) 的方法。

图 8.1 来自达菲、潘和辛格尔顿(Duffie, Pan, and Singleton,2000)。用于作图的期权数据来自普林斯顿大学亚赛恩·艾特—沙哈利教授的互联网主页。该图代表着到期期限从 17 天～318 天和履约价格从 0.74～1.17 倍于标的期货价格的多种期权共 87 个。

第 8.6 节中的转换法由斯坦因和斯坦因(Stein and Stein,1991)原创。这一线路最开始的明晰成果由赫斯顿(Heston,1993)做出。达菲、潘和辛格尔顿(Duffie, Pan, and Singleton,2000)的一般仿射模型转换成果推广了下述文献的成果：拜克希、曹和陈(Bakshi, Cao, and Chen,1997)，拜克希和麦当(Bakshi and Madan,1997)，贝兹(Bates,1996)，贝兹(Bates,1997)，以及斯科特(Scott,1997)。卡尔和麦当(Carr and Madan,1999) 演示了运用快速傅立叶转换对期权进行定价。

扩散跳跃情形下期权定价的方法由默顿(Merton,1976) 原创，也在后来的不少文献中得到了论述，这些文献包括阿明(Amin,1993a)，安德森和安德里森(Andersen and Andreasen,1999)，波尔和托洛斯(Ball and Torous,1985)，贝兹(Bates,1997)，卡尔和麦当(Carr and Madan,1999)，伊伯莱恩和乔洛德(Eberlein and Jorod,1997)，伊伯莱恩和凯勒(Eberlein and Keller,1995)，伊伯莱恩、凯勒和普劳斯(Eberlein, Keller and Prause,1998)，乔瑞恩(Jorion,1988)，寇(Kou,1999)，兰德(Lando,1995)，麦当和米尔尼(Madan and Milne,1991)，麦当、米尔尼和夏弗林(Madan, Milne, and Shefrin,1989)，帕潘拉多(Pappalardo,1996)，斯科特(Scott,1997)，以及张(Zhang,1994)。潘(Pan,1999)，班多夫—尼尔森(Barndorff-Nielsen,1997)，以及爱拉克、琼哈恩斯和波尔森(Eraker, Johannes, and Polson,1999) 提供跳跃行为的计量经济证据。

(第 8.7 节～第 8.8 节)麦凯恩(McKean,1965)，默顿(Merton,1973b)，哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps,1979)，以及贝索沙恩(Bensoussan,1984)做出了关于美式期权定价非常重要的早期工作。命题 8.1 来自卡拉特查斯(Karatzas,1988)，尽管其技术条件稍显不同。卡拉特查斯把美式期权的公允价格定义为该证券的无套利价格(当两者均存在时)，同时推广默顿关于永续期权(永不过期的期权)的分析。杰尔勒特、拉姆伯登和拉佩尔(Jaillet, Lamberton, and Lapeyre,1988,1990) 把最佳停止定价问题的处理重新看成是可以写成(8.41)式的变化不等式。把美式期权依据提早履约酬金分解的思想是在下述文献中首先提出来的：杰姆斯迪安(Jamshidian,1989c)，杰卡(Jacka,1991)，金(Kim,1990)，以及卡尔、加罗和麦纳尼(Carr, Jarrow, and Myneni,1992)，其工作方法是从麦凯恩(McKean,1965)关于无边界问题(有时也称为 Stefan 问题)的表述出发。范·莫尔贝克(Van Moerbeke,1976)在众多相关成果中最先揭示了最佳停止边界 S^* 是连续可微的。关于这一方面，请参见艾特—沙亚(Ait-Sahlia,1995)。乔吉森(Jorgensen,1994) 和麦纳尼(Myneni,1992a)考察了上述问题和布莱克—斯科尔斯情形下美式看跌期权的定价问题。

美式期权价格或最佳履约边界的数值或近似解由下列文献给出：艾特—沙亚和赖(Ait-Sahlia and Lai,1997a,b,1998)，阿勒格兰托、巴勒斯、布迪尔、罗玛诺和萨姆索恩(Allegretto, Barles, Burdeau, Romano, and Samsoen,1995)，巴罗恩—安德斯(Barone-Adesi)，以及艾利奥德(Elliott,1993)，巴罗恩—安德斯(Barone-Adesi)，艾利奥德(Elliott,1991)，布洛迪和迪特姆普勒(Broadie and Detemple,1996)，卡尔(Carr,1994)，卡尔和法特(Carr and Faguet,1996)，哥斯克和约翰逊(Geske and Johnson,1984)，黄、萨博拉曼耶姆和余(Huang, Subrahmanyam, Yu,1996)，以及朗斯坦夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz,1998)。读者也可参见本书第12章的注释。接近到期日的最佳履约边界行为在下述文献中论述：艾特—沙亚(Ait-Sahlia,1995)，巴勒斯、布迪尔、罗玛诺和萨姆索恩(Barles, Burdeau, Romano, and Samsoen,1993)，拉姆伯登(Lamberton,1993)，查莱特、艾利奥德、麦纳尼和维斯瓦纳莎(Charretour, Elliott, Myneni, and Viswanathan,1992)。布克丹和胡(Buckdahn and Hu,1995)，古克哈尔(Gukhal,1995a,b)，法姆(Pham,1995)，以及张(Zhang,1993)论述标的资产有跳跃情形下的美式期权定价问题。美式期权情形下还有更多的关于最佳停止问题的一般研究工作，可以在贝比尔和勒奇(Beibel and Lerche,1995,1997)和库舒卡(Kusuoka,1996)中找到。

德·梅托斯(de Matos,1993)给出了美式期权的模拟法矩估计技术。余(Yu,1993)提供了更多的美式期权定价的成果。布洛迪和迪特姆普勒(Broadie and Detemple,1995,1997)论述了美式上限看涨期权，以及多项标的资产期权定价问题。哈格(Haug,1999)论述了美式屏障期权。

基弗(Kifer,2000)，麦克科勒尔和施瓦茨(McConnell and Schwartz,1986)，以及皮克弗斯基和施莱弗(Pikovsky and Shreve,1996b)分析了买卖双方均持有美式期权的证券的定价问题，诸如可召回可转换债券的定价问题。

(第8.9节)最高价出卖和最低价购买回望期权定价理论来自格奥德曼、索辛和格特(Goldman, Sosin, and Gatto, 1979)。最高价卖看跌期权的公式表述直接来自孔茨和维斯瓦纳莎(Conze and Viswanathan,1991a)。两个时间点之间布朗运动路径的最大值的分布，以及相关于最先通过时间的分布研究成果可以在下述文献中找到：庄(Chuang,1994)，戴丝西奥斯(Dassios,1994)，哈瑞森(Harrison,1995)，以及利歇尔迪和萨托(Ricciardi and Sato,1998)。有关其他向后看的期权定价成果，请参见孔茨和维斯瓦纳莎(Conze and Viswanathan,1991a)，戴维德夫和林特斯凯(Davydov and Linetky,1999a,b)，达菲和哈瑞森(Duffie and Harrison,1993)，霍布森(Hobson,1998)，乔(Ju,1997b)以及施普和肖叶弗(Shepp and Shiryaev,1993)。

基于标的资产价格过程算术平均值的亚式期权的分析请参见：戴卡姆伯斯和科霍尔(Décamps and Koehl,1994)，基曼和约尔(Geman and Yor,1993)，奥利弗(Oliveira,1994)，罗杰斯和施(Rogers and Shi,1995)，以及约尔(Yor,1991)。阿卡哈利(Akahari,1993)以及约尔(Yor,1993)论述了相关的中间价期权的定价问题。拜克希和麦当(Bakshi and Madan,2000)，贺和塔卡哈希(He and Takahashi,1995)，以及乔(Ju,1997a)考虑了平均率期权的定价问题。

凯特(Kat,1993)分析了亚式和回望期权的对冲应用。有关杠杆约束下的对冲应用请参见奈克和尤泼尔(Naik and Uppal,1994)。关于"最小最大"准则的对冲应用，请参见霍威和路斯特恩(Howe and Rustem,1994a,b)。

各种形式的障碍期权(被称为撞出、撞入、跌出局、涨进局、有限风险期权和锁定期权)的论述可以在下述参考文献中找到：卡尔(Carr,1995)，卡尔和艾丽丝(Carr and Ellis,1994)，孔茨和维斯瓦纳莎(Conze

and Viswanathan,1991a),哈格(Haug,1999),默顿(Merton,1973b),萨布尔兹(Sbuelz,1998),以及余(Yu,1993)。

纳姆(Nahum,1998)探讨了与离散时间集上最大值有关的期权定价问题。

安德森、安德里森和布洛斯顿 莱特克利夫(Andersen,Andreasen,and Brotherton-Ratcliffe,1998)以及德尔伯恩和约尔(Delbaen and Yor,1999)考虑了通行证期权。

依据路径期权更多的分析方法,可参见凯恩德、利普斯特和朗格迪尔(Kind,Lipster,and Rung-galdier,1991),周(Zhou,1997a),以及邹和德曼(Zou and Derman,1996)。

切斯尼、杰安伯兰克和约尔(Chesney,Jeanblanc,and Yor,1997)以及施洛德(schröder,1999a,b,c,d)运用先进转换法分析依路径而定的期权,诸如亚式期权、障碍期权和巴黎式期权(一种障碍期权)。杰姆斯迪安(Jamshidian,1997a)给出了双重障碍期权定价方法。

额外话题 诸如第7章中应用过的期限结构模型,也被下述文献开发应用到商品期权的定价:格拉尔和林特博格(Grauer and Litzenberger,1979),杰姆斯迪安(Jamshidian,1991b,1993b),米尔特森和施瓦茨(Miltersen and Schwartz,1998),以及第7章中引用的部分参考资料。格莱比(Grabbe,1983)研究发展了布莱克 斯科尔斯模型的外汇版。尼尔森和萨—瑞克尔(Nielsen and Saá-Requejo,1992)进一步分析了外汇期权定价。

卡尔(Carr,1991)研究了与衍生证券相关的"delta"、"gamma"等对冲应用系数。

有关交易成本和约束下的期权定价,请参见巴勒斯和索纳(Barles and Soner,1998),贝尔格曼(Bergman,1985a),弗瑞(Frey,1996),马和科威坦尼克(Ma and Cvitanić,1996),萨博拉曼尼(Subramanian,1997),以及本书第6章注释中引用的部分参考资料。约翰逊和夏诺(Johnson and Shanno,1987)以及瑞奇(Rich,1993)研究了违约风险对布莱克—斯科尔斯方法的影响(第11章将要讨论的课题)。布莱南和施瓦茨(Brennan and Schwartz,1980b)给出了一个定价可转换债券的模型。

市场选时期权的定义和定价成果取自奥丹特里奇(Ordentlich,1996)。格博和萧(Gerber and Shiu,1994)描述了一种基于 Escher 转换法的期权定价计算方法。赫斯顿(Heston,1997)考虑了无限可分布标的证券的期权定价。

安德逊(Andersen,1995)考虑双变量二项期权。戴维德夫和林特斯凯(Davydov and Linetsky,1998)以及林特斯凯(Linetsky,1998)讨论了步(step)期权和双步期权。弗莱沙克(Flesaker,1991)考虑了标的证券在到期时为不可观测的情形。

弗瑞和斯特兰姆(Frey and Stremme,1997)考虑了反馈的影响,从而允许对冲应用活动影响期权的价格。

基于杰姆斯迪安(Jamshidian,1989b)对远期测度下债券期权定价的早期研究工作,基曼、伊尔卡洛伊和罗切特(Geman,El Karoui,and Rochet,1995)以及施洛德(Schroder,1999)探讨期货、远期和期权定价中的计价标准变化问题。

9.

证券组合和消费选择

本章论述最佳证券组合和消费选择的一些基本成果，先是运用动态规划法，然后运用一般鞅和效用梯度法。我们首先回顾了随机控制的汉密尔顿—雅可比—贝尔曼(Hamilton-Jacobi-Bellman，H-J-B)方程，然后将它应用于有限和无限时间视野情形下的最佳消费和证券组合选择的默顿(Merton)问题。然后，通过利用第 6 章中等价鞅测度的性质，我们将再次在非马尔可夫模式下求解默顿问题。最后，我们论述第 2 章介绍过的一般效用梯度法，并证明它正好与等价鞅测度法相吻合。

9.1 随机控制

连续时间模式下的动态规划通常被称为随机控制，而且基本思路与第 3 章中离散时间模式下的基本一样。连续时间模式下表现良好的解的存在是一个很微妙的问题，但我们将把注意力主要集中在解的存在的必要条件上。这会帮助我们猜测一个解，如果正确的话，这个解就可以被验证。

给定 $\mathbb{R}^d$ 中定义于概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的标准布朗运动 $B=(B^1,\cdots,B^d)$，我们锁定 B 的标准过滤 $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t:t\geqslant 0\}$，并限定时间区间为 $[0,T]$，对某些有限 $T>0$，随机控制问题的原始对象主要有：

- 对某个整数 $m\geqslant 1$，活动集合 $A\subset\mathbb{R}^m$。
- 对某个整数 $K\geqslant 1$，状态集合 $\mathcal{Y}\subset\mathbb{R}^K$。
- 取 A 值的适应过程集合 $\mathcal{C}$，称其为控制。
- 控制漂移函数 $g:A\times\mathcal{Y}\to\mathbb{R}^K$。
- 控制扩散函数 $h:A\times\mathcal{Y}\to\mathbb{R}^{K\times d}$。
- 运行奖励函数 $f:A\times\mathcal{Y}\times[0,T]\to\mathbb{R}$。

- 终端奖励函数 $F:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$。

状态空间 $\mathcal{Y}$不应与"世界的状态"根本集 Ω 相混淆。$\mathcal{C}$ 中的某个控制 c 是可容许的，给定 $\mathcal{Y}$中的初始状态 y，如果存在一个在 $\mathcal{Y}$中取值的惟一伊藤过程 Y^c，且

$$dY_t^c=g(c_t,Y_t^c)dt+h(c_t,Y_t^c)dB_t;\quad Y_0^c=y \tag{9.1}$$

对于可容许性，要求 c、g 和 h 满足一定的技术性条件。

给定初始状态 y，令 $\mathcal{C}_a(y)$表示可容许控制集。给定任意初始状态 $y\in\mathcal{Y}$，我们假定原始对象$(A,\mathcal{Y},\mathcal{C},g,h,f,F)$能使可容许控制 c 的效用有良好定义，且可由下式给出：

$$V^c(y)=E\left[\int_0^T f(c_t,Y_t^c,t)dt+F(Y_T^c)\right]$$

我们允许其取值为$-\infty$或$+\infty$。$\mathcal{Y}$中初始状态 y 的价值则为：

$$V(y)=\sup_{c\in\mathcal{C}_a(y)}V^c(y) \tag{9.2}$$

如果不存在可容许控制(给定初始状态 y)，那么，$V(y)=-\infty$。如果 $V^c(y)=V(y)$，那么，c 是在 y 的最优控制。(你也许会注意到，这种表述允许最优控制取无限效用的可能性。)

我们通常先猜测对某些 $J\in C^{2,1}(\mathcal{Y}\times[0,T])$，$V(y)=J(y,0)$，并且是下述贝尔曼方程的解：

$$\sup_{a\in A}\{\mathcal{D}^aJ(y,t)+f(a,y,t)\}=0,\quad (y,t)\in\mathcal{Y}\times[0,T] \tag{9.3}$$

其中

$$\mathcal{D}^aJ(y,t)=J_y(y,t)g(a,y)+J_t(y,t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[h(a,y)h(a,y)^{\mathrm{T}}J_{yy}(y,t)]$$

边界条件为：

$$J(y,T)=F(y),\quad y\in\mathcal{Y} \tag{9.4}$$

(9.3)式的直观理由可以从与其类似的离散时间、离散状态、离散行动的情形中得到。在那些情形下的贝尔曼方程看上去大致为：

$$J(y,t)=\max_{a\in A}\{f(a,y,t)+E[J(Y_{t+1}^c,t+1)|Y_t^c=y,c_t=a]\}$$

其中 $f(a,y,t)$是每单位时间的运行奖励。(这里读者可以自由地运用想像力。这种类比的完整研究和严格理由远远超出我们展示此种思路的目标。注释中引用了给出该种理由的参考资料。)对任意给定控制过程 c，第 3 章中的离散时间贝尔曼方程意味着：

$$E_t[J(Y_{t+1}^c,t+1)-J(Y_t^c,t)]+f(c_t,Y_t^c,t)\leqslant 0$$

对时间区间长度为 Δt 的模型，上式可改写成：

$$E_t[J(Y_{t+\Delta t}^c,t+\Delta t)-J(Y_t^c,t)]+f(c_t,Y_t^c,t)\Delta_t\leqslant 0$$

现在回到连续时间的模式上来。上述方程式除以 Δt，并取 $\Delta t\to 0$ 时的极限，那么，在第 5 章中所描述的技术性条件下，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E_t[J(Y_s^c,s)]|_{s=t+}+f(c_t,Y_t^c,t)=\mathscr{D}^{c(t)}J(Y_t^c,t)+f(c_t,Y_t^c,t)\leqslant 0$$

如果 c_t 在离散型的贝尔曼方程中取最大值，那么，上式就为等式。根据这一不完整但具有启发性的方法，我们又再次得到贝尔曼方程(9.3)。

连续时间的贝尔曼方程(9.3)常被称为汉密尔顿—雅可比—贝尔曼方程。你可以把 $J(y,t)$看成在时间 t、状态 y 下剩余的最佳效用。给定(9.3)式～(9.4)式的解 J，假设可测函数 $C:\mathscr{Y}\times[0,T]\to A$ 被定义使得对任意(y,t)、行为 $C(y,t)$可以解(9.3)式。其直觉是，如果时间为 t、状态是 y，那么，最优行动是 $C(y,t)$。为了证实以这种方式对原有问题(9.2)式选择的最优性，我们把这种反馈形式的控制方针函数 C 转换成(9.2)式意义上的控制，即集合 $\mathscr{C}$ 中的一个过程。为了做到这一点，假设下述随机微分方程存在取值为 $\mathscr{Y}$ 型的解 Y^*：

$$\mathrm{d}Y_t^*=g[C(Y_t^*,t),Y_t^*]\mathrm{d}t+h[C(Y_t^*,t),Y_t^*]\mathrm{d}B_t;\qquad Y_0^*=y$$

有关原始对象的能使此 SDE 的解 Y^* 惟一存在的充分条件一般很难表述，因为 C 依赖于 J，而 J 又不是显函数。注释中引用的资料探讨了这个存在性问题。给定 Y^*，我们可以推测，最佳控制 c^* 由 $c_t^*=C(Y_t^*,t)$给出，并且可按下述方法验证：令 $c\in\mathscr{C}_a(y)$为任意可容许控制。我们要说明 $V^{c^*}(y)\geqslant V^c(y)$。由(9.3)式，可得：

$$\mathscr{D}^{c(t)}J(Y_t^c,t)+f(c_t,Y_t^c,t)\leqslant 0,\quad t\in[0,T] \tag{9.5}$$

运用伊藤公式：

$$J(Y_T^c,T)=J(y,0)+\int_0^T\mathscr{D}^{c(t)}J(Y_t^c,t)\mathrm{d}t+\int_0^T\beta_t\mathrm{d}B_t \tag{9.6}$$

其中 $\beta_t=J_y(Y_t^c,t)h(c_t,Y_t^c)$。假设局域鞅$\int\beta\mathrm{d}B$ 实际上是一个鞅(这通常在具体问题的基础上验证，或者运用特别的技巧来回避)，我们知道 $E(\int_0^T\beta_t\mathrm{d}B_t)=0$。然后，我们对(9.6)式两边取期望，再运用边界条件(9.4) 和不等式(9.5) 有：

$$V^c(y)=E\left[\int_0^T f(c_t,Y_t^c,t)\mathrm{d}t+F(Y_T^c)\right]\leqslant J(y,0) \tag{9.7}$$

同样的计算可用于 $c=c^*$，只是(9.5) 式和(9.7) 式中的不等式应转换成等式，因而有：

$$J(y,0)=V^{c^*}(y) \tag{9.8}$$

据(9.7)式和(9.8)式，我们有 $V(y)=J(y,0)$，这说明 c^* 确实是最佳的。

这只是大致描绘了一种通用方法，几个假设也是在一起提出来的。这些假设可以用有关原始对象的强技术规则性条件来取代，但已知的通用条件对金融中的绝大多数应用问题限制太多。所以，人们常常利用贝尔曼方程(9.3)式～(9.4)式做为一种猜测显示解的方法，该解如果正确的话，又能通过类似上述的方法加以验证。在有些情况下，贝尔曼

方程也可以用来做为有限差分数值解的基础，就像第 12 章注释中参考资料所指明的那样。

9.2 默顿问题

我们现在将随机控制方法应用于连续时间模式下经典的最佳消费和投资问题的解。

假定 $X=(X^{(0)},X^{(1)},\cdots,X^{(N)})$ 是 $N+1$ 个证券的价格的伊藤过程($X\in\mathbb{R}^{N+1}$)。对任意 $i\geqslant 1$，我们假设：

$$dX_t^{(i)}=\mu_i X_t^{(i)}dt+X_t^{(i)}\sigma^{(i)}dB_t,\quad X_0^{(i)}>0 \tag{9.9}$$

其中 σ^i 是矩阵 $\sigma\in\mathbb{R}^{N\times d}$ 的第 i 行，σ 矩阵的所有行线性独立，μ_i 为常数。这意味着，特别地，每个过程 $X^{(i)}$ 是布莱克-斯科尔斯期权定价模型中用过的那种几何布朗运动。我们假设 $\sigma^{(0)}=0$，因而 $r=\mu_0$ 为短期利率。

效用被定义于消费偶 (c,Z) 的空间 D 上，其中 c 为非负适应消费率过程，并且 $\int_0^T c_t dt<\infty$ 几乎肯定成立，Z 为描述终端总量消费的 $\mathcal{F}_T$ 可测非负随机变量。具体来说，效用 $U:D\to\mathbb{R}$ 由下式定义：

$$U(c,Z)=E\left[\int_0^T u(c_t,t)dt+F(Z)\right] \tag{9.10}$$

其中

- $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是递增的凹函数，且 $F(0)=0$；
- $u:\mathbb{R}_+\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 连续，对 $[0,T]$ 中的任意 t，$u(\cdot,t):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 递增且凹性，并有 $u(0,t)=0$；
- F 是严格凹性或者等于零，或者对 $[0,T]$ 中的任意 t，$u(\cdot,t)$ 是严格凹性的或等于零；
- u 和 F 中至少有一个为非零。

交易策略为 $\mathcal{L}(X)$ 中的过程 $\theta=(\theta^{(0)},\cdots,\theta^{(N)})$（像在第 5 章中所定义的那样，其意思是说随机积分 $\int\theta dX$ 存在）。给定初始财富 $w>0$，我们说 (c,Z,θ) 为预算可行，记为 $(c,Z,\theta)\in\Lambda(w)$，如果 (c,Z) 是 D 中的消费选择，且 $\theta\in\mathcal{L}(X)$ 为满足下述条件的交易策略：

$$\theta_t\cdot X_t=w+\int_0^t\theta_s dX_s-\int_0^t c_s ds\geqslant 0,\quad t\in[0,T] \tag{9.11}$$

和

$$\theta_T\cdot X_T\geqslant Z \tag{9.12}$$

第一条限制(9.11)式是说，该交易策略的当期市场价值 $\theta_t\cdot X_t$ 为非负且等于其初始价值 w，加上证券交易的任何盈利，再减去至今为止的累积消费。非负财富限制可以像第 6.3

节中一样看成是信用约束。第二条限制(9.12)式意思是说,期终证券组合价值足够覆盖期终消费。对任意初始财富 w,我们现在有问题:

$$\sup_{(c,Z,\theta)\in\Lambda(w)} U(c,Z) \tag{9.13}$$

为了把该问题陈述(9.13)式转化成第 9.1 节中建立起来的更加便于处理的随机控制表述,我们以持有的各风险证券的价值占总财富的份额表示交易策略(风险证券的价格过程分别为 $\mathcal{P}^{(1)},\cdots,\mathcal{P}^{(N)}$ 和 $X^{(1)},\cdots,X^{(N)}$),因为财富被限定为非负,这不会有损一般性。即对原有意义上的给定交易策略 θ,我们可令:

$$\varphi_t^{(n)}=\frac{\theta_t^{(n)}X_t^{(n)}}{\theta_t\cdot X_t},\quad \theta_t\cdot X_t\neq 0 \tag{9.14}$$

如果 $\theta_t\cdot X_t=0$,那么,$\varphi_t^{(n)}=0$。

(9.13)式要转化成第 9.1 节中类似的标准控制问题,首先需要定义状态过程。用证券组合分数定义交易策略,使得证券价格过程 X 不出现在控制问题状态过程的定义中。我们可以定义一个一维状态过程 W 表示投资者的总财富。为了方便记法,我们令 $\lambda\in\mathbb{R}^N$ 表示 $\mathbb{R}^N$ 中的向量,且 $\lambda_i=\mu_i-r$,即证券 i 的"超额期望回报率"。给定消费过程 c 和风险证券财富分数适应过程 $\varphi=(\varphi^{(1)},\cdots,\varphi^{(N)})$,我们可以提议存在非负财富伊藤过程 W 满足:

$$\mathrm{d}W_t=[W_t(\varphi_t\cdot\lambda+r)-c_t]\mathrm{d}t+W_t\varphi_t^{\top}\sigma\mathrm{d}B_t;\quad W_0=w \tag{9.15}$$

你也许注意到,为了使 W 维持非负,可以容许控制(c,φ)具有下述性质:对于 t 大于停止时间 $\inf\{s:W_s=0\}$,我们有 $\varphi_t=0$,以及 $W_t=c_t=0$。

因此,与(9.13)式对应的控制问题可以通过(如下述)定义原始对象$(A,\mathcal{Y},\mathcal{C},g,h,f,F)$而得以锁定。

- $A=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N$,其典型元素$(\bar{c},\bar{\varphi})$分别表示目前的消费率 $\bar{c}$ 和目前财富投资于风险证券的比例 $\bar{\varphi}_1,\cdots,\bar{\varphi}_N$;
- $\mathcal{Y}=\mathbb{R}_+$,其典型元素 w 代表目前财富;
- $\mathcal{C}$ 为适应过程(c,φ)的集,其中 c 和 φ 分别取值为 $\mathbb{R}_+$ 和 $\mathbb{R}^N$ 型,并且 $\int_0^T c_t\mathrm{d}t<\infty$ 和 $\int_0^T\varphi_t\cdot\varphi_t\mathrm{d}t<\infty$ 几乎肯定成立;
- $g[(\bar{c},\bar{\varphi}),w]=w\bar{\varphi}\cdot\lambda+rw-\bar{c}$;
- $h[(\bar{c},\bar{\varphi}),w]=w\bar{\varphi}^{\top}\sigma$;
- $f[(\bar{c},\bar{\varphi}),w,t]=u(\bar{c},t)$,其中 u 由(9.10)式描述;
- $F(w)$由(9.10)式描述。

给定初始财富 w,可容许控制是 $\mathcal{C}$ 中的控制(c,φ),对于该控制,存在满足(9.15)式的惟一的伊藤过程 W。

控制问题$(A,\mathcal{Y},\mathcal{C},g,h,f,F)$等价于原有问题(9.13)式,只是有一点小小的例外,即控制公式迫使投资者消费所有期终财富,而原有的预算约束(9.12)式允许投资者留下一

些期终财富不被消费掉。但是，由于期终效用函数 F 是递增的，因此这一区别是不重要的。事实上，你可以看出，当且仅当财富过程 $\{W_t=\theta_t\cdot X_t:t\in[0,T]\}$ 为非负，满足(9.15)式以及 $W_T\geqslant Z$ 时，(c,Z,θ) 是在 $A(w)$ 中。其中 φ 由(9.14)式通过 θ 定义。

9.3 默顿问题的解

给定当期财富水平 $w>0$，默顿问题的贝尔曼方程(9.3)式可以写成：

$$\sup_{(\bar{c},\bar{\varphi})\in A}\{\mathscr{D}^{\bar{c},\bar{\varphi}}J(w,t)+u(\bar{c},t)\}=0 \tag{9.16}$$

其中，

$$\mathscr{D}^{\bar{c},\bar{\varphi}}J(w,t)=J_w(w,t)(w\bar{\varphi}\cdot\lambda+rw-\bar{c})+J_t(w,t)+\frac{w^2}{2}\bar{\varphi}^{\top}\sigma\sigma^{\top}\bar{\varphi}J_{ww}(w,t)$$

边界条件为：

$$J(w,T)=F(w),\quad w\geqslant 0 \tag{9.17}$$

对任意 t，你可以把 $J(\cdot,t)$ 看成投资者在时间 t 的财富的间接效用函数。

由对(9.16)式的解的非负性提示，我们注意到：

$$J(0,t)=\int_t^T u(0,s)\mathrm{d}s+F(0),\quad t\in[0,T] \tag{9.18}$$

如果对任意 t，$u(\cdot,t)$ 为严格凹性的且在 $(0,\infty)$ 上二次连续可微，那么，(9.16)式的内部最佳消费选择的一阶条件意味着 $\bar{c}=C(w,t)$，其中：

$$C(w,t)=I[J_w(w,t),t]$$

上式中 $I(\cdot,t)$ 为 $u_c(\cdot,t)$ 的反函数，即对所有的 x 和 t，$I[u_c(x,t),t]=x$。如果 $u=0$，那么，我们令 $I=0$。假设财富的间接效用函数 $J(\cdot,t)$ 是严格凹性的，那么，(9.16)式的最佳 $\bar{\varphi}$ 选择的一阶条件意味着 $\bar{\varphi}=\Phi(w,t)$，其中：

$$\Phi(w,t)=\frac{-J_w(w,t)}{wJ_{ww}(w,t)}(\sigma\sigma^{\top})^{-1}\lambda \tag{9.19}$$

我们要提示的是，最佳证券组合分数是由固定的证券组合权重向量 $\bar{\varphi}=(\sigma\sigma^{\top})^{-1}\lambda$ 乘以间接效用函数 $J(\cdot,t)$ 的阿罗—普拉特(Arrow-Pratt)相对风险容忍度量(相对风险厌恶的倒数)给出。实际上，这意味着，在时间齐次高斯回报和可加型效用的情形下，就最佳证券选择的目的而言，投资者只需投资于某个单一的“共同基金”所投资的所有风险证券，并且不断交易以便维持每一种证券对总资产价值的给定份额 $\bar{\varphi}$ 的证券组合。每一位投资者应该愿意只投资于该共同基金和无风险借贷，尽管不同投资者的财富中共同基金的份额会因其财富的间接效用风险厌恶的不同而不同，但这与市场均衡并不一定一致。

我们现在来看 $u=0$ 和 $F(w)=w^{\alpha}/\alpha$[对系数 $\alpha\in(0,1)$]的特殊情况。相应的相对风

险厌恶为 $1-\alpha$。这一效用函数例子常被称为双曲线绝对风险厌恶(HARA)。因为我们取 $u=0$ 和 F 为严格递增,任意最佳中间消费选择 c^* 必须为零。该 HARA 效用例子的一个显示值函数 J 可被推测如下:给定初始财富水平 1,假设 Z 是最佳期终消费,现在考虑新的初始财富水平 w,对某个固定的 $w\in(0,\infty)$,你也许看到了,wZ 必须是相关的最佳期终消费。wZ 自然可以以预算约束的方式得到,因为如果 $Z=\theta_T\cdot X_T$ 可以从初始财富 1 以交易策略 θ 得到,那么,给定随机积分的线性性质,$w\theta$ 对初始财富 w 是预算可行策略,并且我们有 $w\theta_T\cdot X_T=wZ$。如果某些其他的期终消费 $\hat{Z}$ 对初始财富 w 是预算可行的,并且具有更高的效用:

$$E\left(\frac{\hat{Z}^\alpha}{\alpha}\right)>E\left[\frac{(wZ)^\alpha}{\alpha}\right] \tag{9.20}$$

那么,我们就会有如下的悖论:首先,(9.20)式两边同除以 w^α/α,有:

$$E\left[\left(\frac{\hat{Z}}{w}\right)^\alpha\right]>E(Z^\alpha) \tag{9.21}$$

根据上述推理,$\hat{Z}/w$ 可以用初始财富 1 来资助,这显然与(9.21)式在初始财富 1 下 Z 是最佳消费相悖。因此,正如所宣称的那样,对任意初始财富水平 w,最佳期终消费为 wZ。结果有:

$$J(w,0)=E\left[\frac{(wZ)^\alpha}{\alpha}\right]=\frac{w^\alpha}{\alpha}K$$

其中 $K=E(Z^\alpha)$取决于常数 K,而 K 即依赖于模型的所有基本参数$(\lambda,r,\sigma,\alpha,T)$,我们对初始间接效用函数 $J(\cdot,0)$就有了一个合理的推测。对 $t\in(0,T)$,最佳剩余效用可以正好用上述方法来推测,方法是把问题处理成期限到 $T-t$ 而不是 T 为止。所以我们猜测对某函数 $k:[0,T]\to\mathbb{R}$,$J(w,t)=k(t)w^\alpha/\alpha$。$J$ 必须充分可微以便应用伊藤公式,因此,我们猜测 k 本身是连续可微的。

有了这一猜测 J 后,对所有的(w,t),我们可以解(9.19)式得:

$$\Phi(w,t)=\frac{(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}\lambda}{1-\alpha} \tag{9.22}$$

即固定证券组合分数。因此,投资于风险资产的总财富分数是相对风险厌恶 $1-\alpha$ 的递减函数。因为 $u=0$,我们有:

$$C(w,t)=0 \tag{9.23}$$

我们可将(9.22)式~(9.23)式代入贝尔曼方程(9.16)式,并运用我们的推测 $J(w,t)-k(t)w^\alpha/\alpha$,即可得下述普通微分方程:

$$k'(t)=-\epsilon\,k(t) \tag{9.24}$$

其中:

$$\epsilon=\frac{\alpha\lambda^{\top}(\sigma\sigma^{\top})^{-1}\lambda}{2(1-\alpha)}+r\alpha \tag{9.25}$$

由(9.17)式,可知其边界条件为:

$$k(T)=1 \tag{9.26}$$

解(9.24)式~(9.26)式,我们有:

$$k(t)=e^{\epsilon(T-t)},t\in[0,T]$$

我们已经发现,由 $J(w,t)=e^{\epsilon(T-t)}w^{\alpha}/\alpha$ 定义的函数 J 可解贝尔曼方程(9.16)式及其边界条件(9.17)式,因此,J 是价值函数的逻辑候选者。

我们现在来验证价值函数的这一候选者,以及猜测最佳控制(c^*,φ^*)[由 $c_t^*=0$ 和 $\varphi_t^*=(\sigma\sigma^{\top})^{-1}\lambda/(1-\alpha)$给出]确实是最优的。对初始财富 w,令(c,φ)为任意可容许控制,再令 W 是可以解(9.15)式的相应的财富过程。由贝尔曼方程(9.16)式、伊藤公式以及边界条件(9.17)式,我们有:

$$J(w,0)+\int_0^T\beta_t\mathrm{d}B_t\geqslant F(W_T) \tag{9.27}$$

其中 $\beta_t=J_w(W_t,t)W_t\varphi_t^{\top}\sigma$。因为 J 是非负的,贝尔曼方程(9.16) 式和伊藤公式意味着由下式定义的非负过程 M:$M_t=J(w,0)+\int_0^T\beta_t\mathrm{d}B_s$。我们也知道 M 是局域鞅(参见附录 D 中的定义),非负局域鞅是上鞅(附录 D 中所载明的事实)。将(9.27) 式两边取期望,对任意可容许控制,有 $J(w,0)\geqslant E[F(W_T)]$。

余下需要说明的是,对最佳候选控制(c^*,φ^*),以及相应的财富过程 W^*,我们有 $J(w,0)=E[F(E_T^*)]$,从而证实最优性。对最佳候选控制(c^*,φ^*),由贝尔曼方程以及类似的计算,我们有:

$$J(w,0)+\int_0^T\beta_t^*\,\mathrm{d}B_t=F(w_T^*) \tag{9.28}$$

其中 $\beta_t^*=J_w(W_t^*,t)W_t^*\lambda^{\top}(\sigma\sigma^{\top})^{-1}\sigma/(1-\alpha)$。因为所提议的最佳控制使得贝尔曼方程取最大值,不等式(9.27) 式就变成了等式。因为 $J_w(W_t^*,t)\times W_t^*=e^{\epsilon(T-t)}(W_t^*)^{\alpha}$,作为习题可以看出 $E(\int_0^T\beta_t^*\cdot\beta_t^*\,\mathrm{d}t)<\infty$,由命题5.1可知,$\int\beta^*\,\mathrm{d}B$是鞅。将(9.28) 式两边取期望,则有 $J(w,0)=E[F(W_T^*)]$,这证实(c^*,φ^*) 是最佳的,并且该问题有最佳初始效用 $J(w,0)=e^{\epsilon T}w^{\alpha}/\alpha$。

9.4 无限期的情形

无限视野控制问题的原始对象$(A,\mathscr{Y},\mathscr{C},g,h,f)$ 也正如第 9.1 节中所描述的那样,只

是没有期终奖励 F。给定贴现率 $\rho\in(0,\infty)$，对某个 $v:A\times\mathcal{Y}\to\mathcal{R}$，运行奖励函数 $f:A\times\mathcal{Y}\times[0,\infty]\to\mathbb{R}$ 通常由 $f(a,y,t)=e^{-\rho t}v(a,y)$ 定义。给定初始状态 $y\in\mathcal{Y}$，可容许控制 c 的价值为：

$$V^c(y)=E\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}v(c_t,Y_t^c)\mathrm{d}t\right] \tag{9.29}$$

假定上述期望存在，其中 Y^c 由(9.1)式给出。$V(y)$ 的最大值由(9.2)式定义。有限视野贝尔曼方程(9.3)被下式取代：

$$\sup_{a\in\lambda}\{\mathcal{D}^aJ(y)-\rho J(y)+v(a,y)\}=0,\quad y\in\mathcal{Y} \tag{9.30}$$

其中 J 属于 $C^2(\mathcal{Y})$，且

$$\mathcal{D}^aJ(y)=J_y(y)g(a,y)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[h(a,y)h(a,y)^{\mathrm{T}}J_{yy}(y)]$$

除了用边界条件(9.4)式外，对 $\mathcal{Y}$ 中任意给定初始状态 $Y_0^c=y$ 和任意可容许控制 c，我们也可以增加一些技术条件使得产生所谓的横截性条件：

$$\lim_{T\to\infty}E(e^{-\rho T}\mid J(Y_T^c)\mid)=0 \tag{9.31}$$

在此条件下，由第9.1节论述的技术论点和假设可知，贝尔曼方程(9.30)的解 J 定义该问题的价值，即 $J(y)=V(y)$。最大的区别是(9.7)式被下式取代：

$$J(y)\geqslant E\left[\int_0^T e^{-\rho t}v(c_t,Y_t^c)\mathrm{d}t+e^{-\rho T}J(Y_T^c)\right],\quad T>0$$

对上式右边取当 $T\to\infty$ 时的极限，再运用(9.31)式，对任意可容许控制 c，从上式可得出，$J(y)\geqslant V^c(y)$。类似地，最佳候选控制由函数 $C:\mathcal{Y}\to A$ 以反馈形式定义，且满足特征：对任意 y，行动 $C(y)$ 可以解贝尔曼方程(9.30)。有关原始对象的技术条件可以再次保证最佳控制的存在，但是这些条件在实际应用中的限制性太强，因此，贝尔曼方程更多的是用来帮助猜测一个解。

例如，在默顿问题中，因为 $v(\bar{c},w)=\bar{c}^\alpha/\alpha,\alpha\in(0,1)$，对某常数 K 成立，自然就可以推测 $J(w)=Kw^\alpha/\alpha$。再辅之以简单的计算，该候选价值函数 J 的贝尔曼方程(9.30)式可以导出 $K=\gamma^{\alpha-1}$，其中：

$$\gamma=\frac{\rho-r\alpha}{1-\alpha}-\frac{\alpha\lambda^{\mathrm{T}}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}\lambda}{2(1-\alpha)^2} \tag{9.32}$$

相应的消费—证券组合方针 (c^*,φ^*) 由 $\varphi_t^*=(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}\lambda/(1-\alpha)$ 和 $c_t^*=\gamma W_t^*$ 给出，其中 W^* 是由 (c^*,φ^*) 产生的财富过程。为了验证这一方针的最优性，必须检验横截性条件(9.31)式是否满足，而结果是：只要 $\gamma>0$，该条件就满足。这一验证就留为作业给读者完成。

9.5 鞅公式

现在的目的是要把第6章中的鞅论成果作为求解默顿问题(9.13)式的一种新方法的基础，我们先来陈述计量标准不变性的延伸(引理6.3)。

引理9.1 令 Y 为任意缩子，若给定初始财富 $w\geqslant 0$ 和价格过程 X，当且仅当

$$\theta_t \cdot X_t^Y = wY_0 + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s^Y - \int_0^t Y_s c_s \mathrm{d}s \geqslant 0, \quad t \in [0,T] \tag{9.33}$$

和

$$\theta_T \cdot X_T^Y \geqslant ZY_T \tag{9.34}$$

策略 (c,Z,θ) 是预算可行的。

为了简单起见，我们假设 $N=d$，由基尔萨诺夫定理(附录D)，对紧缩过的并由 $\hat{X}_t = e^{-rt}X_t$ 定义的价格过程 $\hat{X}$，存在等价鞅测度 Q，并且 Q 由密度过程 ξ 根据下式定义：

$$E_t^Q(Z) = \frac{1}{\xi_t} E_t^P(Z\xi_T) \tag{9.35}$$

其中，Z 为任意满足 $E^Q(|Z|)<\infty$ 的随机变量：

$$\xi_t = \exp\left(-\eta^{\top} B_t - \frac{t}{2}\eta^{\top}\eta\right), \quad t\in[0,T] \tag{9.36}$$

其中 η 是由下式定义的 $\hat{X}$ 的风险市场价格：

$$\eta = \sigma^{-1}\lambda \tag{9.37}$$

[σ 的倒数的存在性可以由我们早些时候的假设，即 σ 的行为线性独立可知。等价鞅测度的定义要求，ξ 满足诺维可夫(Novikov)条件，以及 $\mathrm{var}(\xi_T)<\infty$，这些事实作为习题很容易被证明。]正如命题6.2所阐述的那样，相关的状态价格缩子 π 由 $\pi_t = \xi_t e^{-rt}$ 定义。

命题9.1 给定 D 中的消费选择 (c,Z)，以及初始财富 w，那么，存在交易策略 θ，使得当且仅当

$$E\left(\pi_T Z + \int_0^T \pi_t c_t \mathrm{d}t\right) \leqslant w \tag{9.38}$$

(c,Z,θ) 为预算可行。

证明：假设 (c,Z,θ) 是预算可行的。应用前述计量标准不变定理于状态价格缩子 π，并运用事实 $\pi_0=\xi_0=1$，我们有：

$$w + \int_0^T \theta_t \mathrm{d}X_t^{\pi} \geqslant \pi_T Z + \int_0^T \pi_t c_t \mathrm{d}t \tag{9.39}$$

因为 X^{π} 是 P 下的鞅，因此，由 $M_t = w + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s^{\pi}$ 定义的过程 M 是 P 下的局域鞅。由(9.33)

式可知，M 为非负，因此，它是上鞅(附录 D)。对(9.39) 式取期望，即得(9.38) 式。

反之，假设(c,Z) 满足(9.38) 式，并令 M 为由下式定义的Q 鞅：

$$M_t = E_t^Q\left(e^{-rT}Z+\int_0^T e^{-rs}c_s\mathrm{d}t\right),\quad t\in[0,T]$$

由基尔萨诺夫定理(附录 D)，$\mathbb{R}^d$ 中Q 下有一个由 $B_t^Q=B_t+\eta_t$ 定义的标准布朗运动 B^Q，并且 B^Q 具有鞅表述特征。因此，我们知道，存在某 $\varphi=(\varphi^{(1)},\cdots,\varphi^{(d)})$，其元素在 $\mathscr{L}^2$ 中，使得：

$$M_t = M_0+\int_0^t \varphi_s\mathrm{d}B_s^Q,\quad t\in[0,T]$$

其中 $M_0\leqslant w$。对由 $Y_t=e^{-rt}$定义的缩子 Y，我们也知道，$\hat{X}=X^Y$ 是Q 鞅。由风险市场价格 η和B^Q 的定义有：

$$\mathrm{d}\hat{X}_t^{(i)}=\hat{X}_t^{(i)}\sigma^{(i)}\mathrm{d}B_t^Q,\quad 1\leqslant i\leqslant N$$

因为 σ 是有倒数的，并且 $\hat{X}$ 是严格为正的，具有连续样本路径，我们可以选择适应过程 $(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(N)})$使得：

$$(\theta_t^{(1)}\hat{X}_t^{(1)},\cdots,\theta_t^{(N)}\hat{X}_t^{(N)})\sigma=\varphi_t^{\top},\quad t\in[0,T]$$

这意味着：

$$M_t = M_0+\sum_{i=1}^N\int_0^t\theta_s^{(i)}\mathrm{d}\hat{X}_s^{(i)}$$

我们也可令：

$$\theta_t^{(0)} = w+\sum_{i=1}^N\int_0^t\theta_s^{(i)}\mathrm{d}\hat{X}_s^{(i)}-\sum_{i=1}^N\theta_t^{(i)}\hat{X}_t^{(i)}-\int_0^t e^{-rs}c_s\mathrm{d}s \tag{9.40}$$

因为φ的元素是在 $\mathscr{L}^2$中，我们可知 $\theta=(\theta^{(0)},\cdots,\theta^{(N)})$ 是在 $\mathscr{L}(\hat{X})$ 中。由福比尼(Fubini) 定理(9.38) 式，以及 $\xi_t=\pi_t e^{rt}$ 的密度过程这一事实，我们有：

$$M_0 = E^Q\left(e^{-rT}Z+\int_0^T e^{-rt}c_t\mathrm{d}t\right)\leqslant w \tag{9.41}$$

由(9.40) 式，对任意 $t\leqslant T$，运用从(9.41) 式得到的事实 $w\geqslant M_0$，有：

$$\begin{aligned}\theta_t\cdot\hat{X}_t &= w+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}\hat{X}_s-\int_0^t e^{-rs}c_s\mathrm{d}s\\ &= w+M_t-M_0-\int_0^t e^{-rs}c_s\mathrm{d}s\\ &= w-M_0+E_t^Q\left(\int_t^T e^{-rs}c_s\mathrm{d}s+e^{-rT}Z\right)\geqslant 0\end{aligned}$$

根据缩子 $Y_t=e^{-rt}$ 重新表述上述不等式，我们有(9.33) 式。我们也可用当 $t=T$ 时同样的不等式以及事实 $E_t^Q(e^{-rT}Z)=e^{-rt}Z$ 得到(9.34) 式。因此，根据引理 9.1 中的计量标准不变

性形式，(c,Z,θ) 是预算可行。 □

推论 9.1 给定 D 中的消费选择 (c^*,Z^*)，以及某初始财富 w，那么，当且仅当 (c^*,Z^*) 可以解问题

$$\sup_{(c,Z)\in D} U(c,Z) \text{ 满足约束 } E\left(\int_0^T \pi_t c_t \mathrm{d}t + \pi_T Z\right) \leqslant w \tag{9.42}$$

时，存在交易策略 θ^* 使得 (c^*,Z^*,θ^*) 可以解默顿问题(9.13)式。

9.6 鞅 解

对默顿问题(9.13)式的等价表述形式(9.42)式，我们现在已经能够获得一个较明晰的解。

由鞍点定理(可在附录 B 中找到)以及 u 或 F 的严格单调性，我们知道，(c^*,Z^*) 可以解(9.42)式，当且仅当存在拉格朗日乘子系数 $\gamma^*>0$，使得：首先，(c^*,Z^*) 可以解下述无约束问题：

$$\sup_{(c,Z)\in D} \mathscr{L}(c,Z;\gamma^*) \tag{9.43}$$

其中，对任意 $\gamma \geqslant 0$，

$$\mathscr{L}(c,Z;\gamma) = U(c,Z) - \gamma E\left(\pi_T Z + \int_0^T \pi_t c_t \mathrm{d}t - w\right) \tag{9.44}$$

其次，互补性松弛条件满足：

$$E\left(\pi_T Z^* + \int_0^T \pi_t c_t^* \mathrm{d}t\right) = w \tag{9.45}$$

应用推论 9.1，我们可按下述命题总结我们在默顿问题上的进步。

命题 9.2 给定 D 中某个 (c^*,Z^*)，存在交易策略 θ^* 使得 (c^*,Z^*,θ^*) 可以解默顿问题(9.13)式，当且仅当存在常数 $\gamma^*>0$ 使得 (c^*,Z^*) 可以解(9.43)式，以及 $E(\pi_T Z^* + \int_0^T \pi_t c_t^* \mathrm{d}t) = w$。

为了获得解(9.43)式的直觉信息，我们从任意 $\gamma>0$ 开始，并认为“E”和“$\int$”是有限的，从而直观地处理 $U(c,Z) = E\left[\int_0^T u(c_t,t)\mathrm{d}t + F(Z)\right]$。在这种情况下，假定 u 和 F 可微，问题 $\sup_{(c,z)} \mathscr{L}(c,Z;\gamma)$ 的解 $(c^*,Z^*) \gg 0$ 的最优一阶条件为：

$$u_c(c_t^* - t) - \gamma \pi_t = 0, \quad t \in [0,T] \tag{9.46}$$

和

$$F'(Z^*) - \gamma \pi_T = 0 \tag{9.47}$$

解上述两式，我们有：

$$c_t^* = I(\gamma\pi_t, t), \quad t \in [0,T] \tag{9.48}$$

和

$$Z^* = I_F(\gamma\pi_T) \tag{9.49}$$

其中，我们知道，$I(\cdot,t)$ 是 $u_c(\cdot,t)$ 的反函数，以及如果 $F=0$，$I_F=0$。否则，I_F 是 F' 的反函数。我们将在下述定理中证实所猜测到的解的形式(9.48)式和(9.49)式。在 u 或 F 的严格凹性下，反函数 $I(\cdot,t)$ 和 I_F 均为连续且严格递减。因而，递减函数 $\hat{w}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 由下式定义：

$$\hat{w}(\gamma) = E\left[\int_0^T \pi_t I(\gamma\pi_t, t)dt + \pi_T I_F(\gamma\pi_T)\right] \tag{9.50}$$

(我们还没有排除期望可能是$+\infty$的可能性。)给定需求的初始投资 $\hat{w}(\gamma)$ 等于禀赋初始财富，所有这些都意味着(9.48)式～(9.49)式中的(c^*,Z^*)使得 $\mathcal{U}(c,Z;\gamma)$取最大值。这使得存在方程 $\hat{w}(\gamma)=w$，因而可以解出正确的拉格朗日乘子 γ^*，并由此得到默顿问题的最佳消费政策显示解。

为了保证 $\hat{w}(\gamma)=w$ 存在惟一解 $\gamma^*>0$，我们可以更加系统地说明 u 和 F 的特征。假定严格凹性递增函数 $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，如果有 $\inf_x F'(x)=0$ 和 $\sup_x F'(x)=+\infty$，那么，它在$(0,\infty)$上可微，并且满足英纳达(Inada)条件。如果 F 满足这些英纳达条件，那么，F'的反函数 I_F 是定义于$(0,\infty)$上的严格减连续函数，其映射为$(0,\infty)$。

条件 A 要么 F 是零，要么 F 在$(0,\infty)$上可微、严格凹性且满足英纳达条件。要么 u 等于零，要么对所有的 t，$u(\cdot,t)$在$(0,\infty)$上可微、严格凹性且满足英纳达条件。对任意 $\gamma>0$，$\hat{w}(\gamma)$是有限的。

我们已经假设 u 和 F 两者中至少有一个是非零。在效用(函数)规则性条件下，注释中引用的资料说明，$\hat{w}(\cdot)$的有限性假设可以得到阐明。

定理 9.1 在条件 A 下，对任意 $W>0$ 和惟一的 $\gamma\in(0,\infty)$，默顿问题(9.13)式有解(c^*,Z^*,θ)，其中(c^*,Z^*)由(9.48)式～(9.49)式给出。

证明：在条件 A 下，控制收剑定理意味着 $\hat{w}(\cdot)$是连续的。因为 $I(\cdot,t)$和 $I_F(\cdot)$两者之一或者同时都有映射$(0,\infty)$，并且严格递减，$\hat{w}(\cdot)$继承了这两个特征。据此，给定任意初始财富 $w>0$，存在惟一的 γ^* 满足 $\hat{w}(\gamma^*)=w$。令(c^*,Z^*)由(9.48)式～(9.49)式定义，且取 $\gamma=\gamma^*$。命题 9.1 告诉我们存在交易策略 θ^*，使得(c^*,Z^*,θ^*)是预算可行的。令(θ,c,Z)为任意预算可行的选择。命题 9.1 也意味着(c,Z)满足(9.38)式。对任意(w,t)，一阶条件(9.46)式和(9.47)式可以充分保证 $c^*(w,t)$和 $Z^*(w)$分别在下述问题中的最优性：

$$\sup_{\bar{c}\in[0,\infty)} u(\bar{c},t) - \gamma^*\pi(\omega,t)\bar{c}$$

和

$$\sup_{\bar{Z}\in[0,\infty)} F(\bar{Z}) - \gamma^*\pi(\omega,T)\bar{Z}$$

因此，

$$u(c_t^*,t)-\gamma^*\pi_t c_t^* \geqslant u(c_t,t)-\gamma^*\pi_t c_t,\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{9.51}$$

和

$$F(Z^*)-\gamma^*\pi_T Z^* \geqslant F(Z)-\gamma^*\pi_T Z \tag{9.52}$$

从0到T对(9.51)式积分，加上(9.52)式，然后再取期望，最后应用互补性松弛条件(9.45)式和预算约束(9.38)式，就得出$U(c^*,Z^*)\geqslant U(c,Z)$。由于$(c,Z,\theta)$是任意的，这就意味着$(c^*,Z^*,\theta^*)$的最优性。 □

因为这一结果能对默顿问题给出相对明确的消费解，所以人们在很多方面对它进行了推广，包括放松条件A中的效用规则性条件，甚至推广可加型效用使得其能够容许习惯养成或递归效用，正如注释中所指明的那样。在下节中我们将说明，在一定的技术条件下，我们甚至可以把它推广到容许一般伊藤证券价格过程。

举个具体例子，让我们再次只考虑期终消费，令对$F(w)=w^\alpha/\alpha$和$\alpha\in(0,1)$，$u\equiv 0$。那么$c^*=0$，而且上述计算意味着$\hat{w}(\gamma)=E[\pi_T(\gamma\pi_T)^{1/(\alpha-1)}]$。求解$\hat{w}(\gamma^*)=w$中的$\gamma^*$，有：

$$\gamma^*=\omega^{\alpha-1}E(\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)})^{1-\alpha}$$

作为习题，要求读者检验(9.49)式可以被明确地缩减成：

$$Z^*=I_F(\gamma^*\pi_T)=W_T$$

其中

$$\mathrm{d}W_t=W_t(r+\bar{\varphi}\cdot\lambda)\mathrm{d}t+W_t\bar{\varphi}^{\mathsf{T}}\sigma\mathrm{d}B_t;\quad W_0=w$$

式中，$\bar{\varphi}=(\sigma\sigma^T)^{-1}\lambda/(1-\alpha)$是在前述贝尔曼方程中找到的固定最佳证券组合分数向量。

9.7 推 广

我们把证券价格过程$X=(X^{(0)},X^{(1)},\cdots,X^{(N)})$推广到具有下述形式的情形：

$$\mathrm{d}X_t^{(i)}=\mu_t^{(i)}X_t^{(i)}\mathrm{d}t+X_t^{(i)}\sigma_t^{(i)}\mathrm{d}B_t,\quad X_0^{(i)}>0 \tag{9.53}$$

其中$\mu=(\mu^{(0)},\cdots,\mu^{(N)})$，$\sigma$是取值为$\mathbb{R}^{N\times d}$型的适应过程，$\sigma^{(i)}$为该矩阵的第$i$行，其过程均为有界适应过程。我们假设$\sigma^{(0)}=0$，因此，$r=\mu^{(0)}$是短期利率过程。为了简单起见，我们假设$N=d$。风险证券的超额期望回报率被定义为取值为$\mathbb{R}^N$型的过程$\lambda$，并且$\lambda_t^{(i)}=\mu_t^{(i)}-r_t$，紧缩价格过程$\hat{X}$被定义为$\hat{X}_t=X_t\exp(-\int_0^t r_s\mathrm{d}s)$。我们假设$\sigma$是(几乎处处)有倒数的，而且由$\eta_t=\sigma_t^{-1}\lambda_t$定义的$\hat{X}$的风险市场价格过程$\eta$是有界的。由第6章的内容我们可知，市场是完备的(至少是在命题6.4的意义上)，并且不存在第6章意义上的常规套利。

在此种模式下，下式定义了状态价格缩子：

$$\pi_t = \exp\left(-\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right)\xi_t \tag{9.54}$$

其中

$$\xi_t = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \eta_s \cdot \eta_s \mathrm{d}s - \int_0^t \eta_s \mathrm{d}B_s\right)$$

由命题 9.2 给出的默顿问题的重新表述以及解(如果存在的话)的表达式(9.48)式～(9.49)式仍然适用,只是需要将(9.54)式的状态价格缩子 π 代入。我们再次看到,需要克服的困难只是求解 $\hat{w}(\gamma^*)=w$ 中的 γ^*,其中 $\hat{w}$ 由(9.50)式定义。由上一节可知,只要条件 A 满足,其解就必然存在。根据定理 9.1 的证明,使得我们有下述推广。

命题 9.3 假设 μ 和 σ 为有界适应过程,而且几乎处处有秩 $\mathrm{rank}(\sigma)=d$,以及 $\eta=\sigma^{-1}\lambda$ 是有界的。在条件 A 下,对任意 $w>0$,默顿问题存在由(9.48)式～(9.49)式给出的对应惟一系数 $\gamma>0$ 的最佳消费政策。

尽管这一方法能够使最佳消费政策的解明确到只有未知系数 γ,但它对最佳交易策略的形式并没有提及什么,只是指出了它的存在。注释中的参考资料说明,最佳交易策略可以根据莫里亚文微分(Malliavin Calculus)表示。原有的马尔可夫模式下的随机控制方法根据价值函数的导数给出最佳交易策略的显示解。虽然很少有例子能使我们明确知道这些导数,但我们可以用汉密尔顿—雅可比—贝尔曼方程对它们进行数值近似处理。这种处理方法是本书第 12 章所给出的有限差分方法的推广。

9.8 效用梯度法

至少在一定的技术条件下,鞅方法可以通过第 2 章中的效用递度法进行简化,虽然从概念上讲很容易,但这一理论只有在严格的条件下才能推导出一些定理,而且这些定理的证明超出了本书的范围。因此,在这里我们只是描述一下基本思路。注释中给出了提供更多证明和细节的参考资料。

我们令 L_+ 表示满足可积条件 $E(\int_0^T c_t \mathrm{d}t)<\infty$ 的非负消费适应过程集合。我们再取一个凹性效用函数 $U: L_+ \to \mathbb{R}$,它不一定是下述可加形式:

$$U(c) = E\left[\int_0^T u(c_t,t)\mathrm{d}t\right] \tag{9.55}$$

我们假定证券价格过程 X 为第 9.7 节所给出的那样,再假定初始财富为 w。如果存在某交易策略 θ 使得:

$$\theta_t \cdot X_t = w + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s - \int_0^t c_s \mathrm{d}s \geqslant 0, \quad t \in [0,T]$$

且 $\theta_T \cdot X_T = 0$，我们说 L_- 中的消费过程 c 是预算可行的。如果预算可行消费过程 c 是下述问题的解：

$$\sup_{c \in \mathcal{A}} U(c)$$

其中 A 表示预算可行消费过程集合，那么，它就是最优的。如果 c^* 是预算可行的，并且 U 在 c^* 处的梯度 $\nabla U(c^*)$（定义在附录 B 中给出）存在，那么，根据附录 B 中的最优化梯度法，最优化的一阶条件为：

$$\nabla U(c^*; c - c^*) \leqslant 0, \quad c \in \mathcal{A}$$

我们假设 c^* 是预算可行的，以及 $\nabla U(c^*)$ 存在，且有利茨（Riesz）表述 π 为伊藤过程，即有：

$$\nabla U(c^*; c - c^*) = E\left[\int_0^T (c_t - c_t^*)\pi_t \mathrm{d}t\right], \quad c \in \mathcal{A}$$

我们在附录 G 中将说明，在自然条件下，取 $\pi_t = u_c(c_t^*, t)$，上式对可加型效用(9.55)式成立。附录 G 也给出了其他形式的效用函数的梯度利茨表述，诸如习题 2.8 和习题 2.9 中探讨过的习惯养成和递归效用的连续时间版本。

基于命题 2.2 和第 9.7 节的内容，我们很自然会猜测当且仅当梯度 $\nabla U(c^*)$ 的利茨表述 π 事实上是一个状态价格缩子时，c^* 是最优的。为了探索这一猜测，我们假定 π 确实是一个状态价格缩子，即 X^π 是一个鞅。计量标准不变性意味着当且仅当存在某交易策略 θ，并满足

$$\theta_t \cdot X_t^\pi = w\pi_0 + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s^\pi - \int_0^t c_s\pi_s \mathrm{d}s \geqslant 0, \quad t \in [0, T] \tag{9.56}$$

且 $\theta_T \cdot X_T^\pi = 0$ 时，c 是预算可行的。对任意预算可行的策略 (c, θ)，由于 $\int \theta \mathrm{d}X^\pi$ 是局域鞅且有下界，因而它是一个上鞅，(9.56)式意味着：

$$E\left(\int_0^T c_t\pi_t \mathrm{d}t\right) \leqslant w\pi_0$$

把它应用于 c^* 的情形，上式就会（在高技术条件下）以严格的等式成立，因此，我们有：

$$\nabla U(c^*; c - c^*) = E\left[\int_0^T \pi_t(c_t - c_t^*)\mathrm{d}t\right] \leqslant 0, \quad c \in \mathcal{A} \tag{9.57}$$

这样，通过一系列技术性条件的假设，我们说明了预算可行选择 c 的最优性一阶条件实质上是要求效用在 c 处的梯度的利茨表述 π 是一个状态价格缩子（这正好是我们在第 2 章中有限维情形下所找到的结果）。然后，我们也很想看看如何从一阶条件(9.57)式推导出最佳消费选择 c^*。下面将给出用这种方法决定 c^* 的步骤。首先，由第 6 章可知，我们给定一个状态价格缩子 π，在规则性条件下，由下式给出：

$$\pi_t = \pi_0 \exp\left(-\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right)\xi_t \tag{9.58}$$

其中 ξ 是某等价鞅测度的密度过程，而且对 $\hat{X}$ 的风险市场价格过程 η，有 $\mathrm{d}\xi_t = -\xi_t\eta_t \mathrm{d}B_t$。

其次，U 可以是某一时间的效用函数，这样我们可以据此计算出 U 在 c 处的梯度 $\nabla U(c)$。最后，通过梯度 $\nabla U(c^*)$ 的利茨表述等于某个可依据(9.58)式计算的状态价格缩子，我们可以设法找出最佳消费 c^* 的反函数。

例如，在可加型效用的情形下，如果 c^* 是最佳的，那么，状态价格缩子 π 可以被选定使得对某系数 $k>0$，由 $k\pi_t = u_c(c_t^*, t)$，有 $c_t^* = I(k\pi_t, t)$，其中 $I(\cdot, t)$ 是 $U_c(\cdot, t)$ 的反函数。最后，我们需要选择 k 使得 c^* 是预算可行的。对于完备市场的情形，由早些时候提过的计量标准不变性论点，则有：

$$\pi_0 w = E\left(\int_0^T c_t^* \pi_t \mathrm{d}t\right) = E\left[\int_0^T I(k\pi_t, t)\pi_t \mathrm{d}t\right] \tag{9.59}$$

假定对所有的 t，$I(\cdot, t)$ 的区域为 $(0, \infty)$，那么，第 9.6 节中的论点可以用来说明存在满足(9.59)式的某个系数 $k>0$。例如，只需风险市场价格过程 η 是有限的，以及 I 在其第一个自变量上满足均匀(一一致)增长条件。注释中也将举例说明，某些非可加型的效用函数 U，对通用类中的任意缩子 π，你也可以通过 π 是 $\nabla U(c^*)$ 的利茨表述的方法，得到惟一的消费过程 c^*。在一定的规则性条件下，习惯养成和递归效用函数均具有上述特征。

对不完备市场的情形[在此情形下，秩 $\mathrm{rank}(\sigma)=d$ 几乎处处不成立]，在无套利的条件下，上述所有步骤同样可以进行，只是可能不存在交易策略 θ^* 资助的候选解 c^*。注释中引用的参考文献对这一问题采用的方法如下所述。对于完备市场，存在一族不同的风险市场价格过程。其目标就是选择风险市场价格过程 η^*，使得令效用梯度的利茨表述等于 $k\eta^*$ 时，我们可以选择适当的 k，从而使 c^* 可获融资。若给定一定的技术条件，这一点是可以做到的。

习 题

9.1 对由(9.22)式右边给出的候选最佳证券组合控制 $\varphi_t^* = \bar{\varphi}$，验证(9.28)式的确是一个鞅。

9.2 解下列场合下的默顿问题，并引入你认为适当的规则性条件：

(A)令 T 为有限，$F=0$ 和 $u(c,t)=e^{-\beta t}c^\alpha/\alpha$，　$\alpha\in(0,1)$。

(B)令 T 为有限，$F=0$ 和 $u(c,t)=\log c$。

(C)令 $T=+\infty$ 和 $u(c,t)=e^{-\beta t}c^\alpha/\alpha$，　$\alpha\in(0,1)$。验证由 $c_t^* = \gamma W_t^*$ 和 $\varphi_t^* = (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}\lambda/(1-\alpha)$ 给出的解，其中 γ 由(9.32)式给出。验证所谓的横截性条件(9.31)式，并且 $\gamma>0$。

9.3 把第 9.4 节中的例子[令 $v(c,w)=c^\alpha/\alpha$]推广到没有无风险证券的情形，并引入适当的规则性条件。

9.4 假定生产技术的资本量增长率由下述随机微分方程的解，即随机冲击过程 Y 决定：

$$\mathrm{d}Y_t = (b-\kappa Y_t)\mathrm{d}t + k\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}B_t;\quad Y_0 = y\in\mathbb{R}_+,\quad t\geqslant 0$$

其中 b、κ 和 k 是严格为正的系数，并且 $2b>k^2$；B 是标准布朗运动。令 $\mathscr{C}$ 为非负的适应消费过程，满足对所有的 $T\geqslant 0$，$\int_0^T c_t\mathrm{d}t<\infty$ 几乎肯定成立。对 $\mathscr{C}$ 里的每一个 c，资本量过程 K^c 由下式定义：

$$\mathrm{d}K_t^c = (K_t^c hY_t - c_t)\mathrm{d}t + K_t^c \epsilon\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}B_t;\quad K_0^c = x>0$$

其中 h 和 ϵ 是满足 $h>\epsilon^2$ 的严格为正的系数。考虑下述控制问题：

$$V(x,y)=\sup_{c\in\mathcal{C}}E\left[\int_0^T e^{-\rho t}\log(c_t)\mathrm{d}t\right]$$

对所有的 $t\in[0,T]$ 成立，其约束为 $K_t^c\geqslant 0$。

(A) 令 $C:\mathbb{R}_+\times[0,T]\to\mathbb{R}_+$ 由下式定义：

$$C(x,t)=\frac{\rho x}{1-e^{-\rho(T-t)}}$$

再令 K 为下述 SDE 的解：

$$\mathrm{d}K_t=[K_t hY_t-C(K_t,t)]\mathrm{d}t+K_t\epsilon\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}B_t;\quad K_0=x>0$$

最后，令 c^* 是由 $c_t^*=C(K_t,t)$ 定义的消费过程。证明 c^* 是惟一最佳消费控制。提示：验证 $V(x,y)=J(x,y,0)$，其中 J 是具有下述形式的表达式：

$$J(x,y,t)=A_1(t)\log(x)+A_2(t)y+A_3(t),\quad (x,y,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times[0,T]$$

其中 A_1、A_2 和 A_3 为时间 t 的确定型的实数函数。请给出函数 A_1 和 A_2、A_3 的微分方程。

(B) 请给出价值函数和无限时间情形下的最佳消费，并引入适当的规则性条件。

9.5 行为人的目标是让 $E[u(W_T)]$ 最大化，其中 W_T 表示在未来某一时间 T 的财富，$u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是递增和严格凹性的函数。财富 W_T 是固定证券组合的市场价值和如下所阐述的期货交易策略的保证金(margin account)账户的期限价值的和。这是概括最佳期货对冲应用规避特征的问题之一。第一项财富是给定证券组合 $p\in\mathbb{R}^M$ 的现货市场价值。这一证券组合 p 由 M 个不同的证券组成，这些证券的价格过程 $S^{(1)},\cdots,S^{(M)}$ 满足下述微分方程：

$$\mathrm{d}S_t^{(m)}=\mu_m(t)\mathrm{d}t+\sigma_m(t)\mathrm{d}B_t;\quad t\geqslant 0,\quad S_0^{(m)}=1,\quad m\in\{1,\cdots,M\}$$

其中，对每一个 m，$\mu_m:[0,T]\to\mathbb{R}$ 和 $\sigma_m:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ 是连续函数。现有 K 项资产的期货协约，交付时间是 $\tau>T$，期货价格过程 $F^{(1)},\cdots,F^{(K)}$ 满足下述随机微分方程：

$$\mathrm{d}F_t^{(k)}=m_k(t)\mathrm{d}t+v_k(t)\mathrm{d}B_t;\quad t\in[0,T],\quad 1\leqslant k\leqslant K$$

其中 m_k 和 v_k 是从 $[0,T]$ 分别到 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^d$ 的连续函数。为了简单起见，我们假设借、贷短期利率为常数。人们只要能做到使保证金账户盯市(mark to market)，就可以进入市场取得头寸(position)。从概念上说，盯市的意思是，如果你持有多头(正的)头寸，譬如 10 个特定证券的期货合约，而且期货合约的价格上涨 1 美元，那么，你(的保证金账户)从合约的空头方就收到 10 美元(事实上，合约就会因此而免除空头方违约的危险，从建模的目的来说，我们一般可以把这些期货合约看成是没有违约风险的)。如果保证金账户中的余额是正的，那么，就按无风险利率获取利息。(或者说，如果保证金账户的余额是负的，那么，就按无风险利率损失利息。)我们忽略保证金追加传票制度或借款限度。正如第 8.3 节中所正规描述的那样，期货价格过程实际上是期货合约的累积券息过程；其真实价格过程则是零。给定描述该行为人的期货头寸过程的任意有界适应过程 $\theta=(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(K)})$，那么，该行为人在时间 T 的财富为 $p\cdot S_T+X_T$，其中 X 是按下述定义的描述该行为人的保证金账户的伊藤过程：$X_0=0$ 和 $\mathrm{d}X_t=rX_t\mathrm{d}t+\theta_t\mathrm{d}F_t$。

(A)请在连续时间随机控制的框架下，构造行为人选择期货头寸过程的动态对冲应用问题。请给出贝尔曼方程和一阶(导数)条件。推导出涉及(未知)价值函数的最佳期货头寸 θ_t 的明晰表达式，并给出诸如可微和非奇性的规则性假设。提示：令 $W_t=p\cdot S_t+e^{r(T-t)}X_t$，$t\in[0,T]$。

(B)求解 $m\equiv 0$ 的情形下(意味着没有期望价格变化)的最佳政策 θ。引入证明最优化所需要的规则性条件。

(C) 对 $u(w)=-e^{-aw}$(其中 $a>0$ 为风险厌恶系数)的情形,请给出该问题的明晰解,并证明最优化。

9.6 在第 9.2 节的场景下,考虑下述效用函数的特殊情形:

$$U(c,Z)=E\left[\int_0^T \log(c_t)\,dt+\sqrt{Z}\right]$$

请给出默顿问题(9.13)式的闭形(closed-form)解。提示:效用函数中的对数函数和指数函数的混合,使得此种情形下的鞅法比贝尔曼法更有优势(此时如果用贝尔曼法,可能很难推测出价值函数)。一旦找出最佳消费政策,那么,还不要忘了计算最佳证券组合交易策略。

9.7 (效用梯度案例)假设 B 是标准布朗运动,并且存在价格过程 S 和 β 由下式给出的两个证券:

$$dS_t=\mu_t S_t\,dt+\sigma_t S_t\,dB_t,\qquad S_0>0$$
$$d\beta_t=r_t\beta_t\,dt,\qquad \beta_0>0$$

其中 μ、σ 和 r 为有界适应过程,对所有的 t,$\mu_t>r_t$。我们取无限时间视野的情形,并令效用函数定义为:

$$U(c)=E\left(\int_0^\infty e^{-\rho t}c_t^\alpha\,dt\right)$$

其中 $\alpha\in(0,1)$和 $\rho\in(0,\infty)$。采用第 9.8 节中的效用函数梯率方法,当且仅当

$$E\left(\int_0^\infty \pi_t c_t^*\,dt\right)=w$$

原则上 c^* 就是最佳选择。其中$\nabla U(c^*)$具有利茨表述 π,S^π 和 β^π 为鞅。假设解 c^* 是满足下式的伊藤过程:

$$dc_t^*=c_t^*\mu_t^*\,dt+c_t^*\sigma_t^*\,dB_t$$

那么,对过程 μ_π 和 σ_π,我们有:

$$d\pi_t=\pi_t\mu_\pi(t)\,dt+\pi_t\sigma_\pi(t)\,dB_t$$

μ_π 和 σ_π 可以根据 μ^* 和 σ^* 从伊藤公式和事实 $\pi_t=\alpha e^{-\rho t}(c_t^*)^{\alpha-1}$ 明晰地求解出来。假设 S^π 和 β^π 的确是鞅,请明晰地解出 μ^* 和 σ^*。

9.8 证明:正如(9.35)式和(9.36)式所定义的那样,Q 的确是等价鞅测度,包括特征 $\mathrm{var}(\xi_t)<\infty$。

9.9 (受约束的投资行为)证券市场的特征由价格过程 $S=(S^{(1)},\cdots,S^{(N)})$和 β 概括,它们分别满足:

$$d\beta_t=\beta_t r_t\,dt,\qquad \beta_0>0$$

对有界适应过程 r 成立和

$$dS_t^{(i)}=S_t^{(i)}\mu_t^{(i)}\,dt+S_t^{(i)}\sigma_t^{(i)}\,dB_t$$

其中,对每个 i,$\mu^{(i)}$ 和 $\sigma^{(i)}$ 分别为 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^d$ 中的有界适应过程。我们还假设 $\Gamma_t=(\sigma_t\sigma_t^{\mathrm{T}})^{-1}$ 是具有良好的定义和有界的。令取值为 $\mathbb{R}^N$ 型的有界适应过程 φ(满足$\int_0^T \varphi_t\cdot\varphi_t\,dt<\infty$)描述一个交易策略,再给定一个非负消费过程 c,那么,投资者的财富过程 $W^{(\varphi,c)}$,可以定义如下:

$$dW_t^{(\varphi,c)}=[W_t^{(\varphi,c)}(\varphi_t\cdot\lambda_t+r_t)-c_t]\,dt+W_t^{(\varphi,c)}\varphi_t^{\mathrm{T}}\sigma_t\,dB_t;\quad W_0^{(\varphi,c)}=w$$

其中 $\lambda_t=\mu_t-r_t$ 和 $w>0$ 是给定的常数。如果对所有的 t,$W_t^{(\varphi,c)}\geqslant 0$,那么,投资消费策略$(\varphi,c)$是可行的。考虑具有下述效用标准的投资者:

$$U(c)=E\left[\int_0^T e^{-\rho t}\log c_t\,dt\right]$$

其中 $\rho>0$ 是常数,c 是从非负适应过程集中选出以致使 $U(c)$具有良好定义。

(A)(不受约束的情形)令 $\mathscr{C}^*(r,\mu,\sigma)$表示该投资者下述最优化问题的解集：

$$\sup_{(\varphi,c)\in\mathscr{C}(w)} U(c)$$

其中$\mathscr{C}(w)$是可行策略集，请计算 $\mathscr{C}^*(r,\mu,\sigma)$。

(B)(杠杆型约束)令 $\mathscr{C}(w,\epsilon)=\{(\varphi,c)\in\mathscr{C}(w)：\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\leqslant\epsilon_t\}$，其中$\ell$是能给出投资策略杠杆上限的非负有界适应过程。投资者现在的问题是：

$$\sup_{(\varphi,c)\in\mathscr{C}(w,\ell)} U(c)$$

请求解上述带杠杆型约束的问题。提示：通过对利率 r(反映杠杆约束的影子价格)的调整，把问题简化到无约束的情形，这样就可以使问题以无约束的形式得到有效地解决。

(C)(杠杆与卖空型约束)令

$$\mathscr{C}(w,\ell,b)=\{(\varphi,c)\in\mathscr{C}(w,\ell)：\varphi_t\geqslant -b_t\}$$

式中ℓ如上所述，$b=(b^{(1)},\cdots,b^{(N)})$，其中 $b^{(i)}$(对每个 i)为非负有界适应过程，它给出的是卖空价值证券组合价值的百分数限制。现在请求解：

$$\sup_{(\varphi,c)\in\mathscr{C}(w,\ell,b)} U(c)$$

提示：应再次把问题简化为不受约束的情形。但这次是通过适当地调整所有回报系数(r,μ)以反映约束的影子价格。

9.10 (跃进式情形下的投资和价格行为)本习题的目的是要把消费投资模型和资产定价模型的基本成果推广到证券风险和期望回报率可以因"政体"状态过程的改变而突然变化。正如附录 F 所示，政体状态过程是由二项状态马尔可夫链定义。当政体发生换届时，价格可能也会发生跳跃，例如，出于反映均衡状态下资产价值收益分布的突然变化。

我们锁定某个概率空间，并定义一个 $\mathbb{R}^d$ 型的标准布朗运动 B 和二项状态[状态 0 和状态 1 过度强度为 $\lambda(0)$和 $\lambda(1)$]连续时间马尔可夫链 Z(如附录 F 中所定义的那样)。我们令 M 表示 Z 的补偿版本。

假设 $X=(X^{(0)},X^{(1)},\cdots,X^{(N)})$是描述 $N+1$ 个证券的价格适应过程($\mathbb{R}^{N+1}$型)。对于每个 $i\geqslant 1$，我们假设：

$$\mathrm{d}X_t^{(i)}=\mu_i(Z_t)X_t^{(i)}\mathrm{d}t+X_t^{(i)}\sigma^{(i)}(Z_t)\mathrm{d}B_t+X_{t-}^{(i)}\beta_i(Z_{t-})\mathrm{d}M_t,\quad X_0>0$$

其中，对每个 $j\in\{0,1\}$，

$\sigma^{(i)}(j)$是 $\mathbb{R}^{N\times d}$型常数矩阵 $\sigma(j)$的第 i 行。

$\mu_i(j)$是常数。

$\beta_i(j)$是绝对值严格小于 1 的常数。

特别地，这意味着在一种政体下，每一过程 $X^{(i)}$的行为类似于期权定价布莱克—斯科尔斯模型中用过的几何布朗运动。当政体改变时，价格过程发生跳跃，其漂流和扩散参数也发生改变。例如，当政体状态从 0 变到 1 时，风险证券 i 的价格就以乘子系数$\beta_i(0)$跳跃。当政体从 1 变到 0 时，风险证券 i 的价格就以乘子系数$-\beta_i(1)$跳跃。

给定短期利率过程$\{R(Z_t)：t\geqslant 0\}$，并对给定的常数 $R(0)$和 $R(1)$，以短期利率滚动的投资的市场价值过程 $X^{(0)}$由下式定义：

$$\mathrm{d}X_t^{(0)}=R(Z_t)X_t^{(0)}\mathrm{d}t;\quad X_0^{(0)}>0$$

由(B,Z)产生的族集过滤被空集增补后，定义了投资者具有的信息。交易策略是可预测的取值为

$\mathbb{R}^{N+1}$ 型并使得随机积分 $\int\theta\mathrm{d}X$ 存在的过程 θ。(注意,可预测交易策略的信息限制正如附录 F 中所定义的那样。仅选择适应交易策略,基于跳跃结果相关的信息的头寸在时间 t 可能被采取。)

如果

$$\theta_t \cdot X_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

那么,交易策略是自融资的。

(A)(完备市场和等价鞅测度) 找出关于定义资产回报率的,能够充分保证缩小后的价格过程 $X_t/X_t^{(0)}$ 有惟一等价鞅测度 Q 存在的原始函数 $(\sigma,\mu,r,\beta,\lambda)$(不要假设 λ 和 β 是无关紧要的)。证明:在这些条件下,对任意有界 $\mathcal{F}_T$ 可测随机变量 Y,存在满足下述条件的自融资交易策略 θ: $\theta_t \cdot X_t$ 有界,$\theta_T \cdot X_T = Y$,以及

$$\theta_0 \cdot X_0 = E^Q\left[\exp\left(\int_0^T -R(Z_s)\mathrm{d}t\right)Y\right]$$

而且,给定等价鞅测度的存在,证明对所有的 t,满足 $\theta_t \cdot X_t \geqslant 0$ 的任意自融资交易策略 θ 不可能是套利。

提示:对给定等价概率测度 Q,令

$$\xi_t = E_t\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right), \quad t \leqslant T$$

因为 ξ 是鞅,对适应过程 α_t 和 β_t,它有下述形式的鞅表述:

$$\mathrm{d}\xi_t = \xi_t\sigma_t(t)\mathrm{d}B_t + \xi_t\,\beta_t(t)\mathrm{d}M_t$$

要想使 Q 成为标准缩子 $X^{(0)}$ 下的等价鞅测度,P 鞅必须由价值(在时间 t) 为下式的过程来定义:

$$\frac{\xi_t X_t^{(0)}}{X_t^{(0)}}$$

运用附录 F 中此种形式过程积情形下的伊藤公式,计算用原始参数表述的关于 α_t 和 β_t 的限制,然后给出能使 ξ 和 Q 具有良好定义的关于资产收益系数函数 μ、r、σ、λ 和 β 的限制。请不要忘了 ξ 应具有有限方差。

(B)(鞅法最优法) 效用被定义在满足限制 $\int_0^T c_t\mathrm{d}t < \infty$ 的非负适应消费过程空间 L_+ 上。特别地,$U: L_+ \to \mathbb{R}$ 被定义为:

$$U(c) = E\left[\int_0^T e^{-\rho t}u(c_t)\mathrm{d}t\right]$$

对于这部分问题,T 是确定的有限时间,$u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是严格凹性且递增的函数。

给定初始财富 $w > 0$,如果 $c \in L_+$ 且 $\theta \in \mathcal{L}(X)$ 是满足下述条件的交易策略:

$$\theta_t \cdot X_t = w + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}X_s - \int_0^t c_s\mathrm{d}s \geqslant 0, \quad t \in [0,T]$$

那么,我们就说 (c,θ) 是预算可行的,记为 $(c,\theta) \in A(w)$。其中 $w > 0$ 是给定的常数,以及

$$\theta_T \cdot X_T \geqslant 0$$

对任意初始财富 w 和任意初始政体状态 $i \in \{0,1\}$,我们现在有下述优化问题:

$$J(i,w,0) = \sup_{(c,\theta)\in A(w)} U(c) \tag{9.60}$$

请运用鞅法计算与未知拉格朗日乘子相关的最佳消费过程。请论证你的结论的正确性,并给出必要的技术假设。

(C)(参数举例) 我们对(B) 稍作改动,令 $T = +\infty$,并考虑 $u(c) = c^\alpha$[对 $(0,1)$ 中的某个 α] 的特别情

形。消费过程 c 是非负适应过程，并且对任意 $t>0$，有 $\int_0^t c_s\mathrm{d}s<\infty$。为了进一步简化问题，我们还假设对所有的 i，有 $\beta_i=0$，意思是政体改变不会引起资产价格跳跃，但是会导致期望回报率、风险和相关性的变化。请给出(9.60)式的解，并通过把(9.60)式所定义的最大价值函数 J 简化到两个未知的、对应着每一种政体的系数 k_0 和 k_1 来证明解的最优性，再运用此种情形下最优控制的汉密尔顿—雅可比—贝尔曼方程推广形式导出关于这两个未知系数的两个非线性限制关系。假设关于 k_0 和 k_1 的方程系统有解。请计算最佳消费和证券组合比例政策的候选方案，并且做到尽可能地明晰。然后，请在其他关于原始参数以及 k_0 和 k_1 的明晰规则性条件下，验证你的候选解。给定 k_0 和 k_1，请特别小心地给出最优性的完整的证明。

(D)(鲁宾逊孤岛情形) 令 $d=1$(一维布朗运动)。在任意时间 t，鲁宾逊必须从满足下述生产函数的消费品实物库存 K_t 中选择消费一定数量：

$$\mathrm{d}K_t=[\eta(Z_t)K_t-c_t]\mathrm{d}t+K_t\zeta(Z_t)\mathrm{d}B_t+K_{t-}\delta(Z_{t-})\mathrm{d}Z_t \tag{9.61}$$

其中 η、ζ 和 δ 是定义在 $\{0,1\}$ 上的实数函数，c 是鲁宾逊选择的非负适应消费过程。我们假设 $|\delta|<1$。鲁宾逊的消费效用函数定义如下：

$$U(c)=E\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}c_t^q\mathrm{d}t\right]$$

对给定的常数 $q\in(0,1)$ 成立。鲁宾逊的优化问题是：

$$\sup_{c\in\mathscr{A}}U(c) \tag{9.62}$$

其中 $\mathscr{A}$ 是包含所有消费过程 c 使得解(9.61)式的商品库存量 K_t 对所有 t 一直保持非负的空间。请解(9.62)式。提示：猜测价值函数的形式。对任意初始状态 $i\in\{0,1\}$，现在考虑第一次过渡到另一种状态的停止时间 τ。可先计算停止时间为 τ 的条件下解的未知系数。

(E)(非完全信息和过渡) 我们现在来考虑单一风险资产($N=1$)的一种特殊情形。在这种情形下，对每一次政体的改变，没有风险资产价格的跳跃(即 $\beta=0$)，没有利率变化[即 $R(1)=R(0)=r$，r 为常数]，也没有风险跃进[即 $\sigma(1)=\sigma(2)=q$，q 为常数]。但是对应着每一次政体改变，平均回报率系数都有变化。也就是说，$\mu(1)\neq\mu(0)$。为了简单起见，我们将假设对常数 $\bar{\lambda}>0$，$\lambda(0)=\lambda(1)=\bar{\lambda}$，以便使得政体变化带来的强度在两种状态下是一样的。

但我们假设投资者不能观察到政体状态过程 Z，而只能观察到风险资产的价格过程 $S=X^{(1)}$。这意味着，描述投资者拥有信息的族集的相关过滤为 $\{\mathscr{F}_t=\sigma(\{S_u:u\leqslant t\})\}$。

现在请求出具有下述效用标准的投资者的最佳证券组合投资策略：

$$U(c)=E\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\log c_t\mathrm{d}t\right]$$

其中 $\rho>0$ 是常数，c 在非负适应过程集中取值且能使 $U(c)$ 具有良好定义。提示：给定能够得到的有限信息，可能会对你有所帮助的方法是构造并求解资产价格行为的随机微分模型。为此，给定在时间 t 观察到的资产价格，令 $p_t=P(Z_t=1\mid\mathscr{F}_t)$ 表示 $Z_t=1$ 的条件概率。对 S 的随机微分表达式两边同时加减，我们有：

$$\mathrm{d}S_t=S_tm(p_t)\mathrm{d}t+S_tq\mathrm{d}\bar{B}_t$$

其中

$$\mathrm{d}\bar{B}_t=\frac{1}{q}[\mu(Z_t)-m(p_t)]\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t$$

若给定未知政体是1的概率为 α，那么，对任意 $\alpha \in [0,1]$，

$$m(\alpha) = \alpha\,\mu(1) + (1-\alpha)\mu(0)$$

定义了风险资产平均回报率的条件期望。可以证明，对概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 以及投资者具有的有限的(信息)过滤 $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$，$\bar{B}$ 是标准布朗运动。而且有：

$$dp_t = \bar{\lambda}(1-2p_t)dt + kp_t(1-p_t)d\bar{B}_t$$

其中 $k = [\mu(1)-\mu(0)]/q$。初始条件 p_0 为投资者对 $Z(0)=1$ 的事先概率估计。这样，我们成功地把原有的投资问题简化成了具有完整观察的问题，其随机平均回报率 $m(p_t)$ 是由另一单独的马尔可夫过程 p 决定，而 p 又满足其自身的随机微分方程。

注 释

卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve, 1998) 给出了本章话题全面详细的处理。其他总结性的文献还有昆奈兹(Quenez, 1992)，以及卡拉特查斯(Karatzas, 1989)。

(第9.1节) 此情形下随机控制的标准处理由下述文献给出：弗莱明和瑞歇尔(Fleming and Rishel, 1975)，克莱洛弗(Krylov, 1980)，贝索沙恩(Bensoussan, 1983)，莱恩斯(Lions, 1981, 1983)，以及弗莱明和索纳(Fleming and Soner, 1993)。弗莱明和索纳(Fleming and Soner, 1993) 一书探讨了汉密尔顿—雅可比—贝尔曼方程的粘性解(Viscosity Solution)。这种方法的优点之一就是它允许我们把连续时间随机控制问题概括成第3章中考虑过的那类离散马尔可夫控制问题的极限。运用粘性解方法的其他研究成果还有本斯、卡尔生和莱克凡姆(Benth, Karlsen, and Reikvam, 1999)。

(第9.2节～第9.4节)默顿(Merton, 1969, 1971) 也许是最先成功地将随机控制方法应用于经济问题的著作。它描述和解决了第9.2节中的问题。[早期的另一范例是米尔里斯(Mirrlees, 1974)，默顿的成果的推广和改进可以在下述文献资料中找到：阿瑟(Aase, 1984)，弗莱明和查利弗普洛(Fleming and Zariphopoulou, 1991)，卡拉特查斯、莱何兹克、赛斯和施莱弗(Karatzas, Lehoczky, Sethi, and Shreve, 1986)，莱何兹克、赛斯和施莱弗(Lehoczky, Sethi, and Shreve, 1983, 1985)，赛斯和塔克萨(Sethi, and Taksar, 1988)，费兹帕曲克和弗莱明(Fitzpatrick and Fleming, 1991)，理查德(Richard, 1975)，杰卡(Jacka, 1984)，奥肯和卡拉特查斯(Ocone and Karatzas, 1991)(应用 Malliavin 策积分法)，以及默顿(Merton, 1990)。

(第9.5节～第9.7节)第9.5节中描述的最佳投资鞅法是由一系列的论文研发出来。这些论文的主要代表有考克斯和黄(Cox and Huang, 1989)，以及卡拉特查斯、莱何兹克和施莱弗(Karatzas, Lehoczky, and Shreve, 1987)。其他文献资料包括：考克斯(Cox, 1983)，普利斯卡(Pliska, 1986)，考克斯和黄(Cox and Huang, 1991)，拜克(Back, 1986)，拜克和普利斯卡(Back and Pliska, 1987)，黄和佩吉(Huang and Pagès, 1992)，雷科纳和施拉德(Lakner and Slud, 1991)，佩吉(Pagès, 1987)，杰安伯兰克和彭迪尔(Jeanblanc and Pontier, 1990)，里查德森(Richardson, 1989)，以及许和施莱弗(Xu and Shreve, 1992a, b)。关于对偶技术和其他非完备市场约束多期投资方法的应用，请参见布洛迪、科威坦尼克和索纳(Broadie, Cvitanić, and Soner, 1998)，库克(Cuoco, 1997)，科威坦尼克(Cvitanić, 1995, 1997, 1999)，科威坦尼克和卡拉特查斯(Cvitanić and Karatzas, 1992, 1993, 1995, 1996a, b)，科威坦尼克、卡拉特查斯和索纳(Cvitanić, Karatzas, and Soner, 1998)，德威兹(Derviz, 1996)，贺和佩吉(He and Pagès, 1993)，贺和皮尔森(He and Pearson, 1991a, b)，卡拉特查斯、莱何兹克、施莱弗和许(Karatzas, Lehoczky, Shreve, and Xu, 1991)，伊尔

卡洛伊和昆奈兹(El Karoui and Quenez,1991),鲁格(Ruegg,1996),以及特普拉(Tepla,1996)。

关于非完备市场的其他研究成果,请参见阿德勒和迪特姆普勒(Adler and Detemple,1988),库克(Cuoco,1994),科威坦尼克和卡拉特查斯(Cvitanić and Karatzas,1992,1995),科威坦尼克、施卡切梅尔和王(Cvitanić,Schachermayer,and Wang,1999),达菲、弗莱明、索纳和查利弗普洛(Duffie,Fleming,Soner,and Zariphopoulou,1997),达菲和查利弗普洛(Duffie and Zariphopoulou,1993),迪比威格(Dybvig,1989),伊尔卡洛伊和杰安伯兰克(El Karoui and Jeanblanc,1998),贺和佩吉(He and Pagès,1993),古(Koo,1998,1999),芒克(Munk,200b),佩吉(Pagès,1987),施埃恩克曼和韦斯(Scheinkman and Weiss,1986),以及史文森和沃纳(Svensson and Werner,1993)。

有关卖空约束和其他形式的证券组合约束的情况,请参见拜克和普利斯卡(Back and Pliska,1986),布莱南、施瓦茨和拉格那多(Brennan,Schwartz,and Lagnado,1997),库克(Cuoco,1994),科威坦尼克和卡拉特查斯(Cvitanić and Karatzas,1992,1995),迪比威格(Dybvig,1995),弗莱明和查利弗普洛(Fleming and Zariphopoulou,1991),贺和佩吉(He and Pagès ,1993),辛迪(Hindy,1995),施拉卡瓦(Shirakawa,1994),维拉和查利弗普洛(Vila and Zariphopoulou,1997),许和施莱弗(Xu and Shreve,1992a,b),以及查利弗普洛(Zariphopoulou,1992,1994)。

(第9.8节)第9.8节中的最佳投资效用梯度方法是基于下述文献的研究工作:哈瑞森和克莱普斯(Harrison and Kreps,1979),克莱普斯(Kreps,1981),黄(Huang,1985c),弗德斯(Foldes,1978a,b,1990,1991a,b,1992,1996),拜克(Back,1991),以及达菲和思凯达斯(Duffie and Skiadas,1994)。而且该方法在上述文献资料中被推广到具有更一般信息和效用函数的抽象情形。附录G给出了关于效用梯度存在和计算的更多信息资料。

额外话题 关于连续时间情形下平均值—方差的准则问题,请参见安瑟尔和司基克(Ansel and Stricker,1994a),巴乔克斯—贝斯莱罗和波泰特(Bajeux-Besnainou and Portait,1993),布沙兹和希尔朗(Bossaerts and Hillion,1997),布罗和拉姆伯登(Bouleau and Lamberton,1989),达菲和杰克逊(Duffie and Jackson,1990),达菲和里查德森(Duffie and Richardson,1991),弗莫和施维茨(Föllmer and Schweizer,1990),弗莫和桑德曼恩(Föllmer and Sondermann,1986),高瑞洛克斯、劳伦特和法姆(Gourieroux,Laurent,and Pham,1998),雷科纳(Lakner,1994a),劳伊(Lioui,1995),施维茨(Schweizer,1994a,b,c,d),以及赛肯(Sekine,1998)。

关于多种习惯形成效用函数的最优化问题,请参见查普曼(Chapman,1997),康斯坦丁尼德斯(Constantinides,1990),迪特姆普勒和查帕特罗(Detemple and Zapatero,1992),英格索(Ingersoll,1992),瑞德和希尔(Ryder and Heal,1973),施洛德和思凯达斯(Schroder and Skiadas,1999),以及桑达尔森(Sundaresan,1989)。

涉及消费局部替代的模型由下述文献研发出来:辛迪和黄(Hindy and Huang,1992,1993a),以及辛迪、黄和克莱普斯(Hindy,Huang,and Kreps,1992),班克和理德尔(Bank and Riedel,1999),以及希恩迪、黄和朱(Hindy,Huang,and Zhu,1997)。

伊克恩(Ekern,1993)是不可逆转投资模型的一个例子。迪科斯特和平迪克(Dixit and Pindyck,1993)回顾和评述了在不确定性条件下运用随机控制方法的许多其他最佳生产模型。读者也可参见本书第11章及其注释。

关于连续时间情形下递归效用函数(称为随机微分效用函数)的发展,请参见达菲和爱普斯坦恩

(Duffie and Epstein,1992b)。关于包括证券组合和消费选择的相关研究工作,请参见亚恩(Ahn,1993),贝尔格曼(Bergman,1985b),达菲和爱普斯坦恩(Duffie and Epstein,1992a),达菲和莱恩斯(Duffie and Lions,1990),达菲和思凯达斯(Duffie and Skiadas,1994),达菲、施洛德和思凯达斯(Duffie,Schroder,and Skiadas,1997),伊尔卡洛伊、彭和昆奈兹(El Karoui,Peng,and Quenez,1997),费希尔和基勒斯(Fisher and Gilles,1998b),拉兹雷克和昆奈兹(Lazrak and Quenez,1999),马(Ma,1991,1993a,b),施洛德和思凯达斯(Schroder and Skiadas,1999),史文森(Svensson,1989),以及尤扎瓦(Uzawa,1968)。关于向后随机微分方程(BSDE)的相关问题的原创性的研究工作,请参见帕多克和彭(Pardoux and Peng,1990),以及彭(Peng,1993b)。其随后的发展研究,请参见阿瓦瑞茨和托林(Alvarez and Tourin,1996),巴利(Bally,1995),巴勒斯、布克丹和帕多克(Barles,Buckdahn,and Pardoux,1997),巴勒斯和理辛(Barles and Lesigne,1997),布克丹(Buckdahn,1995a,b),科威坦尼克,卡拉特查斯和索纳(Cvitanić,Karatzas,and Soner,1998),达林(Darling, 1995),伊尔卡洛伊(El Karoui,1997),伊尔卡洛伊和黄(El Karoui and Huang,1997),伊尔卡洛伊、卡普迪简、帕多克、彭和昆奈兹(El Karoui,Kapoudjian,Pardoux,Peng,and Quenez,1997),伊尔卡洛伊、彭和昆奈兹(El Karoui,Peng,and Quenez,1997),基格特—帕特和帕多克(Gegout-Petit and Pardoux,1996),帕多克和彭(Pardoux and Peng,1994),帕多克(Pardoux,1997),彭(Peng,1993a),彭迪尔(Pontier,1997),以及昆奈兹(Quenez,1997)。关于向前—向后随机微分方程(FBSDE)的发展和应用,请参见安东尼里(Antonelli,1993),科威坦尼克和马(Cvitanić and Ma,1996),达菲、基奥法德和思凯达斯(Duffie,Geoffard,and Skiadas,1994),马、普罗特和雍(Ma,Protter,and Yong,1994),以及马和雍(Ma and Yong,1995,1999)。

关于允许比例交易成本的默顿问题的一个出色推广,请参见戴维斯和诺曼(Davis and Norman,1990)。交易成本情况下最佳投资问题的其他研究成果有雅科安、麦纳尔迪和舒勒姆(Akian,Menaldi,and Sulem,1996),雅科安、舒勒姆和塔克萨(Akian,Sulem,and Taksar,1999),阿瓦瑞茨(Alvarez,1991),阿恩辰(Arntzen,1994),阿维兰尼达和帕拉斯(Avellaneda and Parás,1994b),巴都兹和林奇(Balduzzi and Lynch,1997,1999),卡登尼拉斯和普利斯卡(Cadenillas and Pliska,1999),张(Chang,1993),克鲁罗和霍德格斯(Clewlow and Hodges,1996),康斯坦丁尼德斯(Constantinides,1986),库克和刘(Cuoco and Liu,2000),戴维斯和潘纳斯(Davis and Panas,1991),达菲和孙(Duffie and Sun,1990),杜马斯和卢希安诺(Dumas and Luciano,1989),伊迪瑞希、奈克和尤泊尔(Edirisinghe,Naik,and Uppal,1993),弗莱明、格罗斯曼、维拉和查利弗普洛(Fleming,Grossman,Vila,and Zariphopoulou,1989),黄(Huang,1999),乔尼和卡拉(Jouini and Kallal,1993a,b),林奇和巴都兹(Lynch and Balduzzi,1998),普利斯卡和赛尔拜(Pliska and Selby,1994),施洛德(Schroder,1993),施莱弗和索纳(Shreve and Soner,1994),施莱弗、索纳和许(Shreve,Soner,and Xu,1991),塔克萨、克拉丝和阿沙夫(Taksar,Klass,and Assaf,1988),范亚诺斯和维拉(Vayanos and Vila,1999),维拉辛格(Weerasinghe,1998),以及查利弗普洛(Zariphopoulou,1992)。读者也可参见本书第6章注释中的参考文献。

关于与给定资产价格一致的可加型或其他特别形式的效用函数的存在性问题(有时称为"可积性"问题或"逆问题"),请参见比克(Bick,1986),库克和查帕特罗(Cuoco and Zapatero,2000),贺和黄(He and Huang,1994),贺和理兰德(He and Leland,1993),霍德格斯和卡夫希尔(Hodges and Carverhill,1992),以及王(Wang,1993b)。关于转盘模型,请参见考克斯和黄(Cox and Huang,1991,1992),迪比威格,罗杰斯和拜克(Dybvig,Rogers,and Back,1999),以及黄和查利弗普洛 (Huang and Zariphopoulou,

1999)。关于非完全信息情形(通常要求状态过滤)下的问题,请参见迪特姆普勒(Detemple,1986,1991),迪特姆普勒和莫什(Detemple and Murthy,1994a),多斯安和费尔德曼(Dothan and Feldman,1986),基诺迪(Gennotte,1986),达菲、施洛德和思凯达斯(Duffie,Schroder,and Skiadas,1997),弗莫和施维茨(Föllmer and Schweizer,1990),本田(Honda,1997c),卡拉特查斯(Karatzas,1991),卡拉特查斯和薛(Karatzas and Xue,1990),库瓦纳(Kuwana,1994,1995),雷科纳(Lakner,1994b,1995),奥肯和卡拉特查斯(Ocone and Karatzas,1991),皮克弗斯基和卡拉特查斯(Pikovsky and Karatzas,1996),以及施维茨(Schweizer,1994b)。习题 9.10 是基于本田(Honda,1997b,c)。关于存在政体转换的证券组合选择的更多研究,请参见本田(Honda,1996,1997b)。关于习题 9.10 中用过的关于过滤的研究成果,请参见利普斯特和肖叶弗(Lipster and Shiryaev,1977)。

存在"提前信息"(即基于过滤扩大)的最佳投资,请参见阿蒙丁格、伊姆凯勒和施维茨(Amendinger,Imkeller,and Schweizer,1998),以及皮克弗斯基和卡拉特查斯(Pikovsky and Karatzas,1996)。

具有随机回报分布的证券组合和消费选择,请参见刘(Liu,1999),以及施洛德和思凯达斯(Schroder and Skiadas,1999)。

习题 9.4 来自考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985b)。习题 9.9 是基于科威坦尼克和卡拉特查斯(Cvitanić and Karatzas,1992,1995),以及特普拉(Tepla,1996)。

关于"大投资者"(即考虑其交易对价格的影响)的最佳行为,请参见库克和科威坦尼克(Cuoco and Cvitanić,1998),以及瑟卡(Sircar,1996)。

关于证券组合保险,请参见格罗斯曼和周(Grossman and Zhou,1996)。关于对数可加型效用的最佳投资选择,有着很长的历史。最近的一般性处理由格尔和卡奥森(Goll and Kallsen,1999)给出。关于相关的增长最优政策,请参见伊叶格和科弗尔(Iyengar and Cover,1997)及其所引用的资料。

关于允许破产的收益政策,请参见赛斯和塔克萨(Sethi and Taksar,1992),以及赛斯、塔克萨和普莱斯曼(Sethi,Taksar,and Prisman,1992)。

10.

均衡

本章探讨连续时间情形下的证券市场均衡，并导出证券价格和期望回报的几点重要内容。这包括布黎登(Breeden)的基于消费的资本资产定价模型(在完备市场和非完备市场两种情形下)，以及考克斯—英格索—罗斯(Cox-Ingersoll-Ross)期限结构模型。

10.1 原始对象

像通常一样，我们令 $B=(B^1,\cdots,B^d)$ 表示定义于概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 $\mathbb{R}^d$ 维布朗运动，令 $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t:t\geqslant 0\}$ 表示 B 的标准过滤。消费空间是对固定时间期界 $T>0$，满足 $E(\int_0^T c_t^2\,\mathrm{d}t)<\infty$ 的适应过程集合 L。

假定有 m 个行为人。行为人 i 由非零资源禀赋过程 $e^i\in L_+$ (L_+ 为 L 中的非负过程子集) 和严格递增效用函数 $U_i:L_+\to\mathbb{R}$ 定义。

像第 6.12 节中一样，累积券息过程是形式为 $C=Z+V-W$ 的有限方差过程，其中对某个 $\theta\in\mathcal{L}(B)$，$Z=\int\theta\mathrm{d}B$。而且 V 和 W 为递增、右连续的适应过程。对任意时间 t，跳跃 $\Delta C_t\equiv C_t-C_{t-}$ 表示在时间 t 的总量支付。例如，如果证券是一个在时间 τ 到期的单位零息债券，那么，就有 $C_t=0,t<\tau$ 和 $C_t=1,t\geqslant\tau$。按照惯例，任意券息过程 C 满足 $C_{0-}=C_0=0$。例如，由 L 中的息率过程 δ、$V_t=\int_0^t\max(\delta_s,0)\mathrm{d}s$ 和 $W_t=\int_0^t\max(-\delta_s,0)\mathrm{d}s$ 定义累积券息过程 $C=V-W$。总共有 $N+1$ 个证券，编号从 0 到 N，其累积券息过程为 $D=(D^{(0)},D^{(1)},\cdots,D^{(N)})$。

主要是出于表述上的原因，我们假设所有给定的券息过程均以计价单位名义数量测量，稍后再依据同样的计价单位名义数量定义消费价格过程。

最后，为了得到第2章中基于效用的资产定价成果的连续时间版本，我们以消费价格对上述过程进行标准化。综上所述，该经济的原始对象集为：

$$\mathcal{E}=\{(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},P);B;\{(e^i,U_i):1\leqslant i\leqslant m\};D\} \tag{10.1}$$

10.2 现货证券市场均衡

对券息过程 $D=(D^{(0)},D^{(1)},\cdots,D^{(N)})$ 赋予价格过程 $X=(X^{(0)},\cdots,X^{(N)})$，使得盈利过程 $G=D+X$ 是 $\mathbb{R}^{N+1}$ 维的伊藤过程。我们令 X_t 为时间 t 的息后价格，即不包括当期息跳跃 ΔD_t 的价格。对单一消费品的价格，L 中也存在过程 p。交易策略是 $\mathcal{H}^2(G)$ 中的过程 $\theta=(\theta^{(0)},\cdots,\theta^{(N)})$。给定消费品价格过程 p，如果

$$\theta_t\cdot(X_t+\Delta D_t)=\int_0^t\theta_s\mathrm{d}G_s-\int_0^t p_s c_s\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T] \tag{10.2}$$

和

$$\theta_T\cdot(X_T+\Delta D_T)=0 \tag{10.3}$$

那么，交易策略 θ 资助消费过程 c。

(10.2)式是会计限制，它告诉我们：证券组合的市场价值等于由证券交易产生的盈利减去消费购买的成本。期终预算约束(10.3)式要求在时间 T 不再存在剩余债务。

给定证券价格过程 X 和消费—价格过程 p，行为人 i 面临问题：

$$\sup_{(c,\theta)\in\Lambda(i)}U_i(c) \tag{10.4}$$

其中 $\Lambda(i)=\{(c,\theta)\in L_+\times\mathcal{H}^2(G):\theta\text{ 资助 }c-e^i\}$。

(10.1)式中经济$\mathcal{E}$的现货证券市场均衡为集合：

$$\{X;p;(c^i,\theta^i),1\leqslant i\leqslant m\} \tag{10.5}$$

使得给定证券—价格过程 X 和消费—价格过程 p，对每一个行为人 i，(c^i,θ^i) 可以解(10.4)式，而且市场出清：

$$\sum_{i=1}^m\theta^i=0;\quad\sum_{i=1}^m c^i-e^i=0$$

10.3 阿罗—德布鲁均衡

相关的均衡概念是，在该均衡下，L 中的任意消费过程 c 可以在时间0以价格 $\Pi(c)$ 购买到，$\Pi(c)$ 是由非零线性价格函数 $\Pi:L\to\mathbb{R}$ 给出。如果 $\sum_{i=1}^m c^i\leqslant\sum_{i=1}^m e^i$，那么，类似于第2章中给出的定义，消费配置分配 $(c^1,\cdots,c^m)\in(L_+)^m$ 是可行的。阿罗—德布鲁均衡

为集合$[\Pi,(c^1,\cdots,c^m)]$，其构成为价格函数 Π 和可行分配$(c^1,\cdots,c^m)$，使得对任意 i，c^i 可以解：

$$\sup_{c\in L_+} U_i(c) \quad \text{满足约束 } \Pi(c)\leqslant\Pi(e^i) \tag{10.6}$$

阿罗—德布鲁均衡存在的条件将在第 10.7 节给出，并且在注释中注明其来源。

引理 10.1 如果 $\Pi: L\to\mathbb{R}$ 是线性且严格递增，那么，L 中存在惟一的 π，使得：

$$\Pi(c)=E\left(\int_0^T \pi_t c_t\,dt\right),\quad c\in L \tag{10.7}$$

而且，π 严格为正。

该定理实际上是引理 2.1 的连续时间版本，其证明可以在注释中找到。由于 U_i 依据假设是严格递增的，任意阿罗—德布鲁均衡价格函数 Π 也是严格递增的，而且对惟一的 $\pi\gg 0$，有形式(10.7)式的表述。这一表述也称为 Π 的利茨表述。

如果没有其他的可行配置$(b^1,\cdots,b^m)$使得对所有的 i，满足 $U_i(b^i)\geqslant U_i(c^i)$，并且至少对一个 i 而言是严格不等式，那么，配置$(c^1,\cdots,c^m)$是帕累托最优的。

第一福利定理 任意阿罗—德布鲁均衡配置是帕累托最优的。

证明：令$[\Pi,(c^1,\cdots,c^m)]$为阿罗—德布鲁均衡，再令 π 表示 Π 的利茨表述。假设$(b^1,\cdots,b^m)$是可行配置，并对所有的 i，$U_i(b^i)\geqslant U_i(c^i)$，而且对行为人 j，至少有一个严格不等式。我们需要一个悖论来完成此证明。由于 $U_i(b^i)>U_i(c^i)$，我们知道：

$$\Pi(b^i)>\Pi(c^i) \tag{10.8}$$

如果对某个 i，$\epsilon\equiv\Pi(c^i)-\Pi(b^i)>0$，我们就会令：

$$\hat{c}^i=b^i+\frac{\epsilon}{\Pi(\pi)}\pi \tag{10.9}$$

由此，$\Pi(\hat{c}^i)=\Pi(c^i)$。但是，由于 U_i 是严格递增的，并且 $\pi>0$，我们会有 $U_i(\hat{c}^i)>U_i(c^i)$，由均衡的定义可知这是不可能的。因此：

$$\Pi(b^i)\geqslant\Pi(c^i),\quad 1\leqslant i\leqslant m \tag{10.10}$$

把(10.8)式、(10.10)式和可行性合并起来，我们就有下述悖论：

$$\Pi\left(\sum_{i=1}^m e^i\right)\geqslant\Pi\left(\sum_{i=1}^m b^i\right)>\Pi\left(\sum_{i=1}^m c^i\right)=\Pi\left(\sum_{i=1}^m e^i\right) \tag{10.11}$$

引理得证。 □

下述内容在分离多面体定理中完全以引理 1.1 的形式出现。

命题 10.1 假设对所有的 i，U_i 是凹性的，那么，$(c^1,\cdots,c^m)$为帕累托最优配置，当且仅当 $\mathbb{R}^m_+$ 中存在非零向量 λ 使得$(c^1,\cdots,c^m)$可以解问题：

$$\sup_{(b^1,\cdots,b^m)}\sum_{i=1}^m \lambda_i U_i(b^i) \quad \text{满足约束 } b^1+\cdots+b^m\leqslant e^1+\cdots+e^m \tag{10.12}$$

10.4 实现阿罗—德布鲁均衡

在本节中，我们锁定阿罗—德布鲁均衡$[\Pi,(c^1,\cdots,c^m)]$，并考察关于累积券息过程D的张量条件，以致在该种条件下存在现货证券市场均衡，该均衡具有同样的消费配置。在以下的内容中，我们假定$D_t^{(0)}=0$、$t<T$和$D_T^{(0)}=1$，意即$D^{(0)}$为时间T到期的(名义)零息单位债券。如果不考虑记法上的复杂性，对这假设也可以放松。

如果M是鞅，且对任意鞅Y和某个$\theta\in\mathscr{L}(M)$，我们可以写

$$Y_t=Y_0+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}M_s$$

那么，$\mathbb{R}^k$中的伊藤过程$M=(M^1,\cdots,M^k)$(对整数$k\geqslant 1$)被称为鞅发生器。例如，潜在标准布朗B自身就是鞅发生器。据此，你可以验证，当且仅当$\mathrm{d}M_t=\eta_t\mathrm{d}B_t$时，鞅$M$是鞅发生器。其中$\eta$是取值为$\mathbb{R}^{k\times d}$型的过程，且其秩为$d$几乎处处成立。

下述关于累积券息过程D的张量条件限制性太强(注释所讨论的意义上)，但可使以下表述简化。我们将锁定$\mathbb{R}^{N+1}$中由$M(D)_t=E_t(D_T)$定义的鞅$M(D)$。

动态张量条件 $D^{(0)}$为时间T到期的名义零息单位债券，以及$M(D)$是鞅发生器。

显然，$D^{(0)}$对$M(D)$是鞅发生器没有贡献。因此，动态张量条件要求至少有$d+1$个证券。累积券息过程能使$M(D)$为鞅发生器的例子是$D_T^{(j)}=\int_0^T\sigma_t^j\mathrm{d}B_t$，其中$\sigma^{(1)},\cdots,\sigma^{(N)}$是几乎处处有秩$d$的矩阵过程$\sigma$的行。这说明$d+1$也是足够多(充分多)的证券数量。

定理 10.1 假设累积券息过程D满足动态张量条件，令$[\Pi,(c^1,\cdots,c^m)]$为阿罗—德布鲁均衡。令p为表示Π的利茨表述，再令：

$$X_t=E_t(D_T-D_t),\quad t\in[0,T] \tag{10.13}$$

如果p有界，那么，对某个$(\theta^1,\cdots,\theta^m)$，$\{X;p;(c^i,\theta^i),1\leqslant i\leqslant m\}$为现货证券市场均衡。

证明：给定由(10.13)式定义的证券价格过程X和有关D的动态张量条件，我们知道$G=X+D=M(D)$是鞅发生器。我们取任意行为人i，并令Y为由下式定义的鞅：

$$Y_t=E_T\left[\int_0^T(c_s^i-e_s^i)p_s\mathrm{d}s\right],\quad t\in[0,T] \tag{10.14}$$

由于$\Pi(c^i-e^i)=0$，并且p是Π的利茨表述，我们知道$Y_0=0$。动态张量条件意味着$M(D)=G$是鞅发生器，所以，$\mathscr{L}(G)$中存在某个$\theta=(\theta^{(0)},\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(N)})$满足：

$$Y_t=\int_0^t\theta_s\mathrm{d}G_s,\quad t\in[0,T] \tag{10.15}$$

由于p是有界的，并且c^i和e^i均在L中，$E(Y_T^2)<\infty$，因此，由命题5.1可知$\theta\in\mathscr{H}^2(G)$。由于$G^0\equiv 1$，因此，$\int\theta\mathrm{d}G$不会因重新按下式定义$\theta^{(0)}$而受影响：

$$\theta_t^{(0)} = \sum_{j=1}^{N}\left[\int_0^t \theta_s^{(j)} dG_s^{(j)} - \theta_t^{(j)}(X_t^{(j)} + \Delta D_t^{(j)})\right] - \int_0^t p_s(c_s^i - e_s^i)ds \qquad (10.16)$$

简单的代数运算与(10.14)式～(10.16)式意味着 $\theta_T \cdot (X_T + \Delta D_T) = 0$，而且：

$$\theta_t \cdot (X_t + \Delta D_t) = \int_0^t \theta_s dG_s - \int_0^t (c_s^i - e_s^i) p_s ds, \quad t \in [0,T] \qquad (10.17)$$

也就是说，θ 资助 $c^i - e^i$。

如果对某个行为人 i，$\hat{\theta}$ 是能资助 $\hat{c} - e^i$（对某消费过程 $\hat{c}$）的交易策略，那么，我们声称 $U_i(\hat{c}) \leqslant U_i(c^i)$。反之，如果 $U_i(\hat{c}) > U_i(c^i)$，那么，由阿罗—德布鲁均衡特征，我们有 $\Pi(\hat{c}) > \pi(c^i) = \Pi(e^i)$，所以 $E\left[\int_0^T (\hat{c}_t - e_t^i) p_t dt\right] > 0$。但这是与下述资助条件的要求不一致的：

$$0 = \theta_T \cdot (X_T + \Delta D_T) = \int_0^T \hat{\theta}_t dG_t - \int_0^T (\hat{c}_t - e_t^i) p_t dt \qquad (10.18)$$

对(10.18)式取期望并应用 $E(\int_0^T \hat{\theta}_t dG_t) = 0$，即可以看出这种不一致。因此，$(c^i, \theta)$ 可以解行为人 i 的问题(10.4)式。

令 θ^i 被选定使得对每一个行为人 $i > 1$，有 $\theta^1 = -\sum_{i=2}^m \theta^i$。从随机积分的性质中可以验证，$\theta^1$ 资助 $c^1 - e^1$，所以 (c^1, θ^1) 是问题(10.4)式(对行为人 1)的解。通过构造，得出 $\sum_{i=1}^m \theta^i = 0$。由 $(c^1, \cdots, c^m)$ 的可行性，我们得出结论 $\{X; p; (c^i, \theta^i), 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 是一个均衡。 □

10.5 实物证券价格

前述定理中的均衡 $\{X; p; (c^i, \theta^i), 1 \leqslant i \leqslant m\}$，存在名义证券价格过程 X，其在(10.13)式的意义上为风险中性。相对于消费品的价格或依据事实，证券价格一般来说并不是风险中性的。例如，考虑累积券息过程由 $C_t = \int_0^t \delta_s ds$（对 L 中的息率过程 δ）定义的特别证券。我们令 Y 表示这个证券的名义价格过程。由(10.13)式可知，$Y_t = E_t(\int_t^T \delta_s ds)$。那么，由 $S_t = Y_t / p_t$ 定义的真实价格过程 S 和由 $\hat{\delta}_t = \delta_t / p_t$ 定义的真实券息率过程 $\hat{\delta}$，有下述关系：

$$S_t = \frac{1}{p_t} E_t\left(\int_t^T p_s \hat{\delta}_s ds\right), \quad t \in [0,T] \qquad (10.19)$$

我们可以考虑更一般的累积券息过程 C，它是递增和右连续的，允许在不同时间点上

有一次性付款，正如同有息债券。由于对立于 C 的真实息过程 $\hat{C}$ 由 $\hat{C}_t=\int_0^t p_s^{-1}\mathrm{d}C_s$ 给出，应

允支付真实累积券息过程 $\hat{C}$ 的证券的真实价格过程 S 可由(10.13)式导出，为：

$$S_t=\frac{1}{p_t}E_t\left(\int_t^T p_s\mathrm{d}\hat{C}_s\right),\quad t\in[0,T] \tag{10.20}$$

一个简单例子是在 $(0,T]$ 之间的某一时间 τ 到期的真实零息单位债券。对于该证券，我们有 $\hat{C}_t=0,t<\tau$ 和 $\hat{C}_t=1,t\geqslant\tau$。该债券的真实价格过程可从(10.20)式导出：

$$\Lambda_{t,\tau}\equiv\frac{1}{p_t}E_t(p_\tau),\quad t<\tau \tag{10.21}$$

以及 $\Lambda_{t,\tau}=0,t\geqslant\tau$。这就定义了利率的期限结构。(10.20)式中的累积券息过程 C 可以被推广到伊藤过程，根据第6章中给出的伊藤息过程通用公式，我们就可对(10.20)式进行计算(但本书中我们不需要这样做)。

我们现在要面对的中心问题是，如何概括消费价格过程 p 的特征。例如，我们将给出 p 为伊藤过程的充分条件。在按上述方法标准化到真实价格后，这意味着 p 是第6章意义上的状态价格缩子。

10.6 最优化与可加型效用函数

在本章余下的大部分内容里，我们将探讨按下述定义的光滑可加型效用函数的特征。

定义 10.1 如果

$$U(c)=E\left[\int_0^T u(c_t,t)\mathrm{d}t\right] \tag{10.22}$$

那么，效用函数 $U:L_+\to\mathbb{R}$ 是光滑可加型的。其中 $u:\mathbb{R}_+\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 在 $(0,\infty)\times[0,T]$ 上是光滑的，并且对 $[0,T]$ 中的任意 t，$u(\cdot,t):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是递增的、严格凹性的，其导数 $u_c(\cdot,t)$ 在 $(0,\infty)$ 上是无界的。

就这一定义的目的来说，如果函数在某一开集上的任意阶导数都是连续的，那么，我们就称该函数是“光滑”的。(在我们的应用中，连续导数的阶数有时会要求高到三阶。)光滑可加型效用函数的一种特别情况就是由 $u(c,t)=e^{-\rho t}c^\alpha/\alpha(\alpha<1$ 且 $\alpha\neq0)$ 给出的函数。如果消费价格过程 p 是有界的，那么，无边界的 u_c 的英纳达条件(Inada)会保证消费严格为正。

考虑下述光滑可加型效用函数在阿罗—德布鲁均衡的选择问题：

$$\sup_{c\in L_+} E\left[\int_0^T u(c_t,t)\mathrm{d}t\right] \text{ 满足约束 } E\left(\int_0^T p_t c_t \mathrm{d}t\right)\leqslant w \tag{10.23}$$

其中，p 是均衡价格函数 Π 的利茨表述，$w>0$ 是该行为人的资源禀赋 $\hat{e}$ 的市场价值 $\Pi(\hat{e})$。给定效用函数是严格单调和凹性的，鞍点定理告诉我们，c^* 解(10.23)式的充分必要条件是存在拉格朗日乘子 $\gamma>0$，使得 c^* 可以解下述无约束问题：

$$\sup_{c\in L_+} E\left(\int_0^T [u(c_t,t)-\gamma p_t c_t]\mathrm{d}t\right) \tag{10.24}$$

和互补松弛条件 $E(\int_0^T p_t c_t^* \mathrm{d}t)=w$。

显然，你不可能比分别对每一个时间和状态使 $u(c_t,t)-\gamma p_t c_t$ 最大化做得更好。由于 $u_c(\cdot,t)$ 是无界的，这意味着，对最优的 c^*，$c^*\gg 0$ 并且：

$$u_c(c_t^*,t)=\gamma p_t, \qquad t\in[0,T] \tag{10.25}$$

实际上，这直接引出一种在第 9.7 节中描述过的解(10.23)式的方法，但此处并不需要这种方法。(10.25)式给出了第 10.4 节和第 10.5 节中研究过的现货证券市场均衡下状态价格缩子 p 的第一种特征概括，我们知道，对 $\gamma>0$，有：

$$p_t=\frac{1}{\gamma}u_c(c_t^*,t), \quad t\in[0,T] \tag{10.26}$$

假定行为人之一具有最佳消费过程 c^* 和光滑可加型效用函数。对于拉格朗日乘子 γ 是未知的，这并没有什么关系，因为对任意常数 $\gamma>0$，$\{\gamma p_t : t\in[0,T]\}$ 也是状态价格缩子。这种类型的状态价格缩子的特征概括是根据行为人个体的消费过程而得到的。下面的工作就是试图将类似的 p 的特征概括建立在宏观总量消费基础上，这从实证研究的角度看常被认为更容易一些。

10.7 均衡与可加型效用

本节在光滑可加型效用的假设下，进一步对状态价格缩子的特征进行概括。下述定理的证明可在注释中注明的参考资料中找到。

定理 10.2 假设总量资源禀赋过程 e 的下界是在零以上，以及对每一个 i，U_i 是光滑可加型的。那么，存在阿罗—德布鲁均衡$[\Pi,(c^1,\cdots,c^m)]$，在此均衡下，Π 存在有界利茨表述 p，且对所有的 i，c^i 的下界在 0 以上。

将这一成果与定理 10.1 结合起来，我们可得出光滑可加型效用假设下现货证券市场均衡存在的条件。

推论 10.1 再假设累积券息过程 D 满足动态张量条件。令 X 由(10.13)式给出。那么，存在交易策略$(\theta^1,\cdots,\theta^m)$，使得$[X;p;(c^i,\theta^i),1\leqslant i\leqslant m]$是现货证券市场均衡。

在本节余下的部分和下一节中，我们将锁定这一成果的均衡消费配置$(c^1,\cdots,c^m)$和消费价格过程p。由第一福利定理可知，$(c^1,\cdots,c^m)$是帕累托最佳配置。由命题10.1可知，存在非零"权重"向量$\lambda\in\mathbb{R}^m_+$，使得$(c^1,\cdots,c^m)$可以解问题：

$$\sup_{(b^1,\cdots,b^m)}\sum_{i=1}^m\lambda_i E\left[\int_0^T u_i(b_t^i,t)\mathrm{d}t\right]\quad\text{满足约束 } b^1+\cdots+b^m\leqslant e \tag{10.27}$$

因为效用的可加性，你可以分别对任意时间$t\in[0,T]$和状态$\omega\in\Omega$解此问题，为了说明这一点，令$u_\lambda:\mathbb{R}_+\times[0,T]\to\mathbb{R}$由下式定义：

$$u_\lambda(y,t)=\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\sum_{i=1}^m\lambda_i u_i(x_i,t)\quad\text{满足约束 } x_1+\cdots+x_m\leqslant y \tag{10.28}$$

由于$(c^1,\cdots,c^m)$可以解(10.27)式，因此对$y=e(\omega,t)$，就会有$[c^1(\omega,t),\cdots,c^m(\omega,t)]$可以解(10.28)式，除非$(\omega,t)$在空子集中。(如果$E(\int_0^T 1_A(t)\mathrm{d}t)=0$，那么，集合$A\subset\Omega\times[0,T]$为空集，其中$1_A(t)$为指示器随机变量，如果$(\omega,t)$在$A$中，那么，其取值为1，否则为0。)说明如下：假设并非如此，令$(b^1,\cdots,b^m)$为可行配置，A为$\Omega\times[0,T]$中的非空子集，使得对A中所有的(ω,t)，有：

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i u_i[b^i(\omega,t),t]>\sum_{i=1}^m\lambda_i u_i[c^i(\omega,t),t] \tag{10.29}$$

令$(a^1,\cdots,a^m)$是由下述定义的可行配置：

$$\begin{aligned}a^i(\omega,t)&=b^i(\omega,t),\ (\omega,t)\in A\\&=c^i(\omega,t),\ \text{其他情况}\end{aligned}$$

那么：

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i U_i(a^i)>\sum_{i=1}^m\lambda_i U_i(c^i)$$

这与$(c^1,\cdots,c^m)$可以解(10.27)式这一事实相悖。

应用隐函数定理可以证明(作为习题)，由下式定义的效用函数$U_\lambda:L_+\to\mathbb{R}$是光滑可加型的。

$$U_\lambda(c)=E\left[\int_0^T u_\lambda(c_t,t)\mathrm{d}t\right] \tag{10.30}$$

由于$y>0$，(10.28)式中x^*最优性的一阶条件意味着：

$$\lambda_i u_{ic}(x_i^*,t)=u_{\lambda c}(y,t),\quad i\in\{1,\cdots,m\} \tag{10.31}$$

其中下标"c"表示对该度量的导数，这意味着，几乎处处且对所有的i，有：

$$\lambda_i u_{ic}(c_t^i,t)=u_{\lambda c}(e_t,t) \tag{10.32}$$

将(10.32)式和个体最优性一阶条件(10.26)式结合起来，就意味着Π的利茨表述p，由下式给出：

$$kp_t=u_{\lambda c}(e_t,t),\quad t\in[0,T] \tag{10.33}$$

对常数 $k>0$ 成立，k 可以通过对 p 重新刻度而取 1。

这样，我们已经根据“代表性行为人的边际效用”对名义消费—价格过程 p 进行了特征概括。值得提醒的是，如果存在一个以上的均衡的话，那么，权重 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 一般依赖于原有资源禀赋 $(e^1,\cdots,e^m)$ 以及均衡本身。(均衡的惟一性由总替代条件给出，可参见注释中的说明和参考资料。) 尽管存在这些局限性，但(10.33)式只是直观基础上状态价格非常有用的表述，u_λ 的光滑性对以后伊藤公式的应用也非常重要。

再回到定理 10.1 的现货证券市场均衡，运用消费(品) 作为计量标准，我们可以把证券估值方程(10.20)式重写成下面的形式：

$$S_t=\frac{1}{u_{\lambda c}(e_t,t)}E_t\left[\int_t^T u_{\lambda c}(e_s,s)\mathrm{d}\hat{C}_s\right],\quad t\in[0,T] \tag{10.34}$$

这将令你想起第 2 章中非常熟悉的一点。

10.8 基于消费的 CAPM

在第 10.7 中，我们说明了：以在时间 T 支付一个计价单位的所谓零息债券作为计量单位，定理 10.2 中的消费价格过程 p 由 $p_t=u_\lambda(e_t,t)$ 给出，其中 u_λ 由(10.28)式定义(对固定效用权重向量 $\lambda\in\mathbb{R}^m_{++}$)。我们因此假设 e 是形式为 $\mathrm{d}e_t=\mu_e(t)\mathrm{d}t+\sigma_e(t)\mathrm{d}B_t$ 的伊藤过程，由伊藤公式和 u_λ 的光滑性可知，p 也是伊藤过程，且

$$\mathrm{d}p_t=\mu_p(t)\mathrm{d}t+\sigma_p(t)\mathrm{d}B_t \tag{10.35}$$

其中 $\sigma_p(t)=\mu_{\lambda cc}(e_t,t)\sigma_e(t)$ 和

$$\mu_p(t)=u_{\lambda cc}(e_t,t)\mu_e(t)+u_{\lambda ct}(e_t,t)+\frac{1}{2}u_{\lambda ccc}(e_t,t)\sigma_e(t)\cdot\sigma_e(t) \tag{10.36}$$

根据(10.20)式和 p 是伊藤过程这一事实，p 实际上是一个状态价格缩子[相对于消费(品)计量单位]。基于第 6.4 节的观点，对应的短期利率过程 r (有时也称为真实短期利率)，必然由 $r_t=-\mu_p(t)/p_t$ 给出。因此，我们可以把在时间 t 的真实短期利率 r_t 看成是代表性行为人的边际效用[其为 $p_t=u_\lambda(e_t,t)$]的期望下降指数(函数)率。同样根据第 6.4 节，如果给定证券的累积回报是由伊藤过程 R 给出的，那么，p 是状态价格缩子这个事实告诉我们，有：

$$\mu_R(t)-r_t=-\frac{1}{p_t}\sigma_R(t)\cdot\sigma_p(t)=\gamma_t\sigma_R(t)\cdot\sigma_e(t) \tag{10.37}$$

其中 $\gamma_t\equiv-u_{\lambda cc}(e_t,t)/u_{\lambda c}(e_t,t)$ 是 $u_\lambda(\cdot,t)$ 在 e_t 处的风险厌恶的阿罗—普拉特(Arrow-Pratt)测度。换句话说，超额期望回报是回报与总量消费变化之间的“即时协方差”的增函数，是代表行为人风险厌恶的增函数。而且，这些关系是线性的。在更强的技术条件下，第 10.10 节把基于消费的资本资产定价模型(CCAPM)推广到不完备市场。在光滑

可加型效用的限制下，CCAPM 应是相当通用的。但是，其实证支持则是很弱的，正如注释中参考资料所指出的那样。这里我们就不再进入实证分析的细节了。

我们也可以从传统的“贝塔”角度来看 CCAPM。需求的有关计算可以在第 6.4 节中找到。由于对所有的(ω,t)、$\sigma_p(\omega,t)$和$\sigma_e(\omega,t)$为“协线性”(co-linear)向量，第 6.4 节中的贝塔计算均可等价地用于 e 和 p，这些计算可导出下述公式：

$$\mu_R(t)-r_t=\beta_R(t)(\mu_t^*-r_t) \tag{10.38}$$

其中，

$$\beta_R(t)=\frac{\sigma_R(t)\cdot\sigma_t^*}{\sigma_t^*\cdot\sigma_t^*} \tag{10.39}$$

为 CAPM 中贝塔系数的即时对应项，μ^* 和 σ^* 为有下述性质的回报过程 R^* 的漂移和扩散：对严格为正的取实值的过程 k，$\sigma_t^*=k_t\sigma_e(t)$。在第 6.4 节的意义下，$R^*$ 是这样的回报过程：它与总量消费过程 e 具有完全即时相关性。

10.9 CIR 期限结构

我们将给出第 7.4 节中所介绍过的科克斯—英格索—罗斯(CIR)期限结构模型的均衡条件下的合理化说明。我们的起点是习题 9.4 的解。习题 9.4 涉及最佳消费过程 δ 和有资本量过程 K 的技术。对给定的贴现率 $\rho\in(0,\infty)$，令：

$$U(c)\equiv E\left[\int_0^T e^{-\rho t}\log(c_t)\mathrm{d}t\right],\quad c\in L_+ \tag{10.40}$$

该经济的单一行为人具有由(10.40)式定义的效用函数 $U:L_+\to\overline{\mathbb{R}}$。

为了简单起见，我们假设布朗运动 B 是一维的。重复习题 9.4 的解，最佳资本量过程 K 是由下式定义的伊藤过程：

$$\mathrm{d}K_t=(K_thY_t-\delta_t)\mathrm{d}t+K_t\epsilon\sqrt{Y_t}\mathrm{d}B_t,\quad K_0>0 \tag{10.41}$$

其中

$$\delta_t=\frac{\rho K_t}{1-e^{-\rho(T-t)}},\quad t\in[0,T] \tag{10.42}$$

Y 是下述 SDE 的解：

$$\mathrm{d}Y_t=(b-\kappa Y_t)\mathrm{d}t+k\sqrt{Y_t}\mathrm{d}B_t,\quad Y_0>0 \tag{10.43}$$

对严格为正的系数 κ、b、k、h 和 ϵ 成立，并且使得 $2b>k^2$ 和 $h>\epsilon^2$。我们可以把 Y 看成是影响资本生产率的冲击过程。过程 Y 的存在性和非负性在第 7 章的注释中作了探讨。由(10.41)式～(10.42)式定义的过程 K 的存在性可由 K_t 根据 Y 的表达式得出。而 K_t 根据 Y 的表达式可借助于伊藤公式将 $\log(K_t)$ 展开得到。

我们先假设该单一行为人的资源禀赋过程 e 就是由(10.42)式所定义的资本量的最佳"提取"率 δ。从这个观点出发，尽管有一些技术假设上的差别，但是，我们仍可重新得出本章早些时候发展的资产定价成果。

这里所提出的均衡技术假设与本章早些时候的模型框架有些不相符，因为对数型的效用函数不属于前述意义上的光滑可加型，其向下没有边界。但我们还是假设，技术条件的失败并不会使模型的本质方面失效。

对 $u_\lambda(x,t)=e^{-\rho t}\log x$ 的单个行为人($\lambda=1$)的情形，我们令状态价格缩子 p 按通常的方式定义，并由下式给出：

$$p_t=u_{\lambda c}(\delta_t,t)=\frac{e^{-\rho t}}{\delta_t},\quad t\in[0,T) \tag{10.44}$$

任意应允支付递增、右连续(实数)累积券息过程 $\tilde{C}$ 的证券的真实价格过程 S 则应由(10.20)式给出。

借助于伊藤公式，我们有：

$$\mathrm{d}p_t=(\epsilon^2-h)Y_t p_t\mathrm{d}t-p_t\epsilon\sqrt{Y_t}\mathrm{d}B_t \tag{10.45}$$

正如第 10.8 节中，短期利率过程 r 由下式给出：

$$r_t=\frac{-\mu_p(t)}{p_t}=(h-\epsilon^2)Y_t \tag{10.46}$$

由于 $\mathrm{d}r_t=(h-\epsilon^2)\mathrm{d}Y_t$，我们通过计算可得：

$$\mathrm{d}r_t=\kappa(r^*-r_t)\mathrm{d}t+\sigma_r\sqrt{r_t}\mathrm{d}B_t \tag{10.47}$$

其中 $r^*=h(h-\epsilon^2)/\kappa$ 和 $\sigma_r=k\sqrt{h-\epsilon^2}$。这是第 7.4 节中在"风险中性"模式下研究过的考克斯--英格索—罗斯期限结构模型中假定的短期利率形式。我们很快将证明这个非常方便的事实，即对(10.45)式的均衡状态价格缩子 p，短期利率过程的相关"风险中性"随机微分方程具有与(10.47)式相同的形式，只是两者的系数有所不同。

对 $r_t>r^*$，r 的漂移是负的；对 $r_t<r^*$，r 的漂移是正的。因此，我们可以把 r 看成是均值回复过程，意即回复到均值 r^*。下面我们对这一点会处理得更加精确，就像注释中所指出的那样，经过证明，$\bar{r}_t\equiv E(r_t)$ 是有限的且在 t 上连续，由福比尼定理(参见附录 C)可知，$E(\int_0^T r_t\mathrm{d}t)<\infty$。因此，由命题 5.1，随机积分 $\int_0^T\sigma_r\sqrt{r_t}\mathrm{d}B_t$ 具有零期望。那么，

$$\bar{r}_t=r_0+E\left[\int_0^t\kappa(r^*-r_s)\mathrm{d}s\right]$$

再次应用福比尼定理，可得 $\bar{r}_t=r_0+\int_0^t\kappa(r^*-\bar{r}_s)\mathrm{d}s$，这等价于下述普通微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{r}_t}{\mathrm{d}t}=\kappa(r^*-\bar{r}_t);\quad \bar{r}_0=r_0$$

其解为 $\bar{r}_t = r^* + (r_0 - r^*)e^{-\kappa t}$。因此，$E(r_t) \to r^*$ 随时间 t 而采取指数形式，并且 r^* 是短期利率的"远期中值"(long - run mean)。类似地，运用福比尼条件期望定理，我们可以说明，对时间 t 和 $s \geqslant t$，

$$E_t(r_s) = r^* + (r_t - r^*)e^{-\kappa(s-t)} \text{ 几乎肯定成立。}$$

在第7章中我们知道，为了定价期限结构证券，只需能够在等价鞅测度下表述短期利率过程 r。我们应用伊藤公式将 p 表述为下式：

$$p_t = p_0 \exp\left(\frac{h - \epsilon^2/2}{\epsilon^2 - h}\int_0^t r_s \mathrm{d}s - \frac{\epsilon}{\sqrt{h - \epsilon^2}}\int_0^t \sqrt{r_s}\,\mathrm{d}B_s\right) \tag{10.48}$$

基于方程(6.15)，在技术可积性条件下(我们只是简单的这样假设)，等价鞅测度 Q 的密度过程 ξ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\xi_t &= \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right)\frac{p_t}{p_0} \\ &= \exp\left(\frac{\epsilon^2/2}{\epsilon^2 - h}\int_0^t r_s \mathrm{d}s - \frac{\epsilon}{\sqrt{h - \epsilon^2}}\int_0^t \sqrt{r_s}\,\mathrm{d}B_s\right)\end{aligned} \tag{10.49}$$

从附录 D 中的基尔萨诺夫定理，等价鞅测度 Q 下的标准布朗运动 $\hat{B}$ 由下式定义：

$$\mathrm{d}\hat{B}_t = \mathrm{d}B_t + \frac{\epsilon}{\sqrt{h - \epsilon^2}}\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}t \tag{10.50}$$

这样，在等价鞅测度 Q 下，我们可以把短期利率过程 r 表述成下面的平方根均值回复形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}r_t &= \kappa(r^* - r_t)\mathrm{d}t + \sigma_r\sqrt{r_t}\left(\mathrm{d}\hat{B}_t - \frac{\epsilon}{\sqrt{h - \epsilon^2}}\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= [b(h - \epsilon^2) - (k\epsilon + \kappa)r_t]\mathrm{d}t + \sigma_r\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}\hat{B}_t\end{aligned}$$

特别地，$\Lambda_{t,s} = E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^s -r_u \mathrm{d}u\right)\right]$，这已经在第7.4节中被明晰地解出。第7章还给出了多因子情形的推广、衍生证券期限结构的定价应用和与 r 相关的 PIDE 基本解的明晰表达式。

10.10 不完备市场下的 CCAPM

不假设完备市场，我们可以得到消费的资本资产定价模型(CCAPM)的另一种版本，但是这将要求更多的技术假设，而且到目前为止还没有一套条件可以充分保证均衡的存在，除非是在非常简单的参数例子中。我们将跳过绝大多数技术性细节(它们将在注释中所引用的论文中作处理)，并作为假设接受个体最优化的一阶条件。

第 9.8 节已经说明，原则上，如果行为人 i 的效用在最佳消费过程 c^i 处的递度 $\nabla U_i(c^i)$ 存在，并且具有由缩子 π^i 给出的利茨表述，那么，π^i 是状态价格缩子，这一成果的离散时间对应项是命题 2.2。正像附录 G 中所显示的那样，光滑可加型效用在下界为零以上的消费过程 c 处的梯度具有由 $\pi_t=u_c(c_t,t)$ 给出的利茨表述 π。

我们假设，对每一行为人 i，效用函数 U_i 是光滑可加型的，以及均衡消费过程 c^i 是下界为零以上的伊藤过程，使得：

$$dc_t^i=\mu_c^i(t)dt+\sigma_c^i(t)dB_t$$

对适当过程 μ_c^i 和 σ_c^i 成立。$\nabla U_i(c^i)$ 的利茨表述 π^i 存在且由 $\pi_t^i=u_{ic}(c_t^i,t)$ 给出。这意味着 π^i 是伊藤过程，且 $d\pi_t^i=\mu_\pi^i(t)dt+\sigma_\pi^i(t)dB_t$。其中：

$$\mu_\pi^i(t)=u_{ic}(c_t^i,t)\mu_c^i(t)+u_{ic}(e_t,t)+\frac{1}{2}u_{icc}(e_t,t)\sigma_c^i(t)\cdot\sigma_c^i(t)$$

和 $\sigma_\pi^i(t)=u_{icc}(c_t^i,t)\sigma_c^i(t)$。

据此，第 10.8 节中关于代表性行为人的计算可以对行为人 i 重复进行一遍。这样，(10.37)式就会被下式取代：

$$\mu_R(t)-r_t=\gamma_t^i\sigma_R(t)\cdot\sigma_c^i(t) \tag{10.51}$$

其中 $r_t=-\mu_\pi^i(t)/\pi_t^i$，以及 $\gamma_t^i=-u_{icc}(c_t^i,t)/u_{ic}(c_t^i,t)$ 是行为人 i 在时间 t 的风险厌恶。如果存在满足 $\sigma_R=0$ 的回报过程 R，那么，r 是短期利率过程。不管怎样，r_t 是满足 $\sigma_R(t)\cdot\sigma_c^i(t)=0$ 的回报过程 R 的任何交易策略的期望回报。

假定确实存在短期利率过程 r，我们可对(10.51)式两边同除以 γ_t^i，然后把 m 个行为人的表达式加起来。由于 $\sigma_e(t)=\sigma_c^1(t)+\cdots+\sigma_c^m(t)$，我们有：

$$\mu_R(t)-r_t=\Gamma_t\sigma_R(t)\cdot\sigma_e(t) \tag{10.52}$$

其中

$$\Gamma_t\equiv\left(\frac{1}{\gamma_t^1}+\cdots+\frac{1}{\gamma^m}\right)^{-1}$$

被称为市场风险厌恶。因此，(10.52)式是(10.37)式的推广，表明任意证券的超额期望回报率跟回报率与总量消费增量之间的即时协方差成正比，并且正比例常系数为“市场风险厌恶”。CCAPM 的贝塔形式现在就可以被推导出来，正如第 6.4 节所要求的那样。

习 题

10.1 证明命题 10.1。

10.2 请列出验证(10.45)式～(10.50)式的计算过程。

10.3 令 $\tilde{r}=\{\tilde{r}_t:0\leqslant t\leqslant T\}$ 为任意的非负有界适应过程。请证明具有典型偏好和短期利率过程 $\tilde{r}$ 的连续时间证券现货市场均衡的存在。

首先，为了模拟偏好，假设只存在一个行为人，其效用函数是光滑可加型(u)，其中对 $\alpha\in(0,1)$，$u(x,t)=e^{-\beta t}x^\alpha$。其次，假设消费(品)资源禀赋过程 e 是由 $e_t=\exp(Z_t)$ 定义，其中

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t (a + b\,\tilde{r}_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{\tilde{r}_s}\sigma \mathrm{d}B_s \tag{10.53}$$

其中 a 和 b 为常数，σ 是 $\mathbb{R}^d$ 维的常数向量。

(A) 选择常数 a 和 b，使得均衡短期利率过程为 $\tilde{r}$。

(B) 假设有多个不同的行为人。对 $i \in \{1,\cdots,m\}$，行为人 i 的效用函数被定义如下：

$$U_i(c) = E\left(\int_0^T \exp\left[-\int_0^t \rho_i(s)\mathrm{d}s\right] c_t^\alpha \mathrm{d}t\right)$$

其中 ρ_i 为有界适应过程。行为人 i 的资源禀赋过程 e^i 满足 $e = \sum_{i=1}^m e^i$ 为如上根据 $\tilde{r}$ 定义的过程。假设动态张量均衡存在，请计算根据向量 $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ 表述的短期利率过程。向量 λ 定义了所谓的代表性行为人，具体可解释为 m 个行为人的效用函数在代表性行为人效用函数中的权重。

(C) 考虑问题(B)的一种特别情形，即对所有的 i，$\rho_i = \bar{\rho}$，其中 $\bar{\rho}$ 是常数。请重复计算问题(B)。不要假设完备市场(动态张量)，但请假设对所有的 i，资源禀赋过程 e^i 由市场价值有下界的交易策略融资。也就是说，请再次计算短期利率过程。你能通过适当地选择 a 和 b，以使得短期利率过程为 $\tilde{r}$ 吗？请论证你的答案。

10.4 本习题中的模型是第 10.9 节中的期限结构考克斯 — 英格索 — 罗斯模型的替代物。在考克斯 — 英格索 — 罗斯模型中，均衡利率中一个吸引人的特征就是均值转向(mean-reverting)。这里我们将推导出不很吸引人的期限结构模型，因为资本量调整模型比较粗糙。虽然我们必须提出一些次要的技术假设，但只有一种自然闭形(closed-form)解。

资本量 K 可以解下述随机积分方程：

$$K_t = K_0 + \int_0^t (hK_s - \delta_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \epsilon K_s \mathrm{d}B_s, \quad t \geqslant 0$$

其中 h 和 ϵ 是严格为正的系数，B 是取值为实数的标准布朗运动，$\delta = \{\delta_t : t > 0\}$ 是非负息过程。同习题 9.4 中一样，我们所研究的(单一)公司以速度 δ_t 用尽其资本量 K_t。我们取时间为无限视野的情形，并假设该公司用尽其资本量以使行为人的效用 $U(\delta)$ 最大化。$U(\delta)$ 被定义为：

$$U(\delta) = E\left(\int_0^\infty e^{-\rho t}\delta_t^\alpha \mathrm{d}t\right)$$

其中 $\rho > 0$ 是贴现率系数，$\alpha \in (0,1)$。

(A) 解决该公司的息控制问题。

消费者并不关心这家公司正在设法干什么，只是知道这家公司的股票售价为 $\mathcal{S}(K,t)$，$t \geqslant 0$。其中 $\mathcal{S}$ 是 C^2 严格递增函数，以及每股支付券息过程 δ。该消费者可自由购买任意数量的此种股票或卖空它们，也可以自由地以短期利率 r 进行借或贷，其中 r 是由 $r_t = R(K_t)$ 定义(R 为当前资本量的函数)。市场上仅有两种证券可供选择。消费者拥有一股该公司的股票作为其初始资源禀赋。令 W_t 表示该消费者在时间 t 持有的股票和债券的总财富。该消费者在任意时间 t 必须选择投资于该公司股票的财富份额(其他份额就按短期利率连续不断地投资在基金债券中)并决定以什么速度消费(消费只是计价标准)。

(B) 请简要地提炼出该消费者的证券组合 —— 消费控制问题。假定可微性和内部最优性，请导出贝尔曼方程和一阶条件。

(C) 选择股票价格函数 $\mathcal{S}$ 和利率函数 R，使得此时该消费者不持有任何债券，但持有一股该公司的股票。换句话说，陈述均衡证券价格过程和利率过程，二者均作为当前资本量 K_t 的函数。

(D) 请计算在给定时间 $\tau>0$ 支付一个单位的实际财富的零净供给债券的初始均衡市场价值。还请给出联合公债均衡市场价值。联合公债是一种纯收益债券，它持续地以每单位时间一个单位消费品的固定利率支付消费品。

(E) 证券的券息率由当前资本量的有界 C^2 函数 f(其存有界导数) 给出。请给出该证券均衡市场价值的微分方程及其边界条件。

10.5 第 4 章中我们曾探讨了马尔可夫单一行为人资产定价模型，下面我们考虑该模型的连续时间情形。令 X 是能够解下述随机微分方程的 $\mathbb{R}^N$ 维伊藤过程 S：

$$dX_t=\nu(X_t)dt+\eta(X_t)dB_t;\quad X_0=x\in\mathbb{R}^N \tag{10.54}$$

其中 $\nu:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 和 $\eta:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N\times d}$ 为表现良好的有定义的函数。总共有 N 种证券，每种证券的总供给为 1。每种证券的付息遵循有界可测函数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N_+$。也就是说，证券 n 在时间 t 的股息率为 $f_n(X_t)$。证券价格过程为 $\mathbb{R}^N$ 维的伊藤过程。该单一行为人选择非负实数有界适应消费过程 c 和有界交易策略 $\theta=(\theta^{(1)},\cdots,\theta^{(N)})$。假设该行为人的初始资源包括所有这些证券，并假设其采用的消费 — 投资(组合) 策略为 (c,θ)，那么，该行为人的财富过程 $W^{c,\theta}$ 应由下式给出：

$$W_T^{c,\theta}=\mathbf{1}\cdot S_0+\int_0^T[\theta_t\cdot f(X_t)-c_t]dt+\int_0^T\theta_t dS_t,\quad T\geqslant 0$$

其中 $\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^N$。该行为人的效用函数 U 被定义为：

$$U(c)=E\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c_t)dt\right]$$

其中 $\rho\in(0,\infty)$ 和 $u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是递增和严格凹性的函数。这种经济体系的均衡被定义为这样一种证券价格过程 S：它使得 $\sup_{c,\theta}U(c)$ 有解且其解 (c,θ) 满足 $c_t=1\cdot f(X_t)$ 和对所有的 $t\in[0,\infty)$，$\theta_t=1$。

(A) 假设证券价格过程 S 是由下式给出：对所有的 t，以及二次连续可微函数 $\varphi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$，$S_t=\varphi(X_t)$。请给出该行为人的随机控制问题的贝尔曼方程，但不要求给出验证。

(B) 基于你对本模型的理解，请给出利率期限结构的表达式。也就是说，请猜测一个 T 期纯贴现债券在时间 t 的市场价值。T 期纯贴现债券是零净供给契约，它在时间 $t+T$ 支付一个单位的消费品(计价标准)。这里也不要求给出验证过程。给出的表达式只应涉及初始状态 $x\in\mathbb{R}^N$ 下模型的原始参数 ν,η,d,u,ρ 和未来状态 $X_t,t\geqslant 0$。

(C) 在规则性条件下，运用下面无限时间版本的费恩曼－凯科(Feynman-Kac)，请给出作为均衡必要条件的任意证券市场价值的 PDE。(在下述定理中，为了简便起见，我们省略所有函数的变量 $x\in\mathbb{R}^N$。)我们不提供下述结果中提到的"强规则性条件"，因为这些假设有些烦琐，并且主要是数学的计算。

无限时间版的费恩曼—凯科公式 假设 $R:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 和 $h:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 为可测函数，并且 (ν,η,h,R) 满足"强规则性条件"。假设 $F\in C^2(\mathbb{R}^N)$ 满足增长条件，那么，当且仅当：

$$F(x)=E\left(\int_0^\infty\exp\left[-\int_0^t R(X_s)ds\right]h(X_t)dt\right),\quad x\in\mathbb{R}^N$$

F 满足偏微分方程 $\mathcal{Q}F-RF+h=0$，其中 $\mathcal{Q}F=F_x\nu+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\eta^{\mathrm{T}}F_{xx}\eta)$。

(D) 对 $N=1$ 和下述条件的特别情形，请求解利率的期限结构：

$$u(y)=\frac{y^{(\alpha+1)}-1}{\alpha+1},\quad \alpha\in(-1,0)$$

$$\nu(x)=Ax,\qquad A\in\mathbb{R}$$

$$\eta(x) = D, \qquad D \in \mathbb{R}^d$$
$$f(x) = e^{bx}, \qquad b \in \mathbb{R}$$

另外，请解出该经济体系的当前均衡利率过程 r。

(E) 本习题的最后一部分是布莱克—斯科尔斯模型的延伸。这里我们不采纳问题(D)中的参数假设。假设短期利率过程是由下式给出：对所有的 t，$r_t = R(X_t)$，其中 $R: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$；证券价格过程是由下式给出：对所有的 t，以及二次连续可微函数 $\mathcal{S}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$，$S_t = \mathcal{S}(X_t)$。请给出由下述息过程定义的另一附加证券的无套利价值：券息过程 $\{h(X_t): t \geqslant 0\}$，其中 $h: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 为有界且可测的函数。特别地，请给出使得该附加证券为冗余的规则性条件。最后，请以期望的形式给出你所提出的 PDE 的一种解，并给出相应的规则性条件。

10.6 本习题是要验证第 10.9 节中给出的期限结构考克斯—英格索—罗斯模型在可以被嵌入生产决策分散化的经济体系时的股票市场均衡。其目的是要构造具有下述性质的均衡 $[(S,\pi),\delta,(c,\theta)]$：

(a) δ 是能控制其资本量生产过程并设法使其股价最大化的公司最优实物产出率过程。

(b) π 为状态价格缩子。

(c) S 是公司的实物资本价格过程，并且被行为人认为是给定的，当给定状态价格缩子 π 时，它应等于股票价格过程。

(d) 给定 (S,δ) 为公司的价格过程和实物息率过程，$(c_t,\theta_t) = (\delta_t,1)$ 可以解行为人的最值消费和交易策略问题。(注意，在本章正文中所研究的纯交易经济里，证券的净供给是零，而此时公司股票的总净供给是 1。因此，市场清算条件是在行为人的最佳持有量在均衡时为 1 股。)

(A) 请正式地定义与上述松散描述相一致的随机均衡。另外，请准确地给出行为人的优化问题。

(B) 在习题 9.4 的情形下，请证明实物资本价格过程 $S = K$，而且资本址过程(10.41)式和(10.42)式给出的股息率 δ 与均衡是一致的。可以引入你认为必要的技术规则性条件。提示：要小心区分实物和名义值。

10.7 给定(10.54)式的马尔可夫冲击过程和定理 10.2 及其推论所概括的均衡，假设总量资源禀赋过程 e 由下式定义：$e_t = g(X_t,t)$，其中 $g \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$。将状态价格缩子 p 和短期利率 r 表述成下述形式：对定义于 $\mathbb{R}^N \times [0,T]$ 上的可测函数 φ 和 R，$p_t = \varphi(X_t,t)$ 和 $r_t = R(X_t,t)$。在技术条件下，实物证券价格的等价鞅测度 Q 的密度过程 ξ 是由下式定义：$\xi_t = \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right) p_t$。请证明对定义于 $\mathbb{R}^N \times [0,T]$ 上的取值为 $\mathbb{R}^d$ 型的函数 Θ，$\mathrm{d}\xi_t = -\xi_t \Theta(X_t,t)\mathrm{d}B_t$。证明存在 Q 下 $\mathbb{R}^d$ 维的标准布朗运动 $\hat{B}$，使得 X 能够解下述形式的 SDE：

$$\mathrm{d}X_t = \alpha(X_t,t)\mathrm{d}t + \eta(X_t,t)\mathrm{d}\hat{B}_t$$

请给出函数 α。证明在技术规则性条件下，承诺支付形式为 $\{h(X_t,t): t \in [0,T]\}$ 的实物券息率过程的证券的价格是由附录 E 中考察的柯西(Cauchy)型的 PDE 的解给出。请给出这样的 PDE。

注 释

本章的基本框架是标准的。连续时间均衡资产定价模型方面的原创性工作是由默顿(Merton，1973a)完成的。

(第 10.3 节) 第 10.3 节是标准的一般均衡理论。类似于本章中所处理的无限维情形下的阿罗—德

布鲁(Arrow - Debreu)均衡存在性问题首先在毕雷(Bewley,1972)中见到。这里处理过的可直接应用于平方可积函数的第一个成果应归功于马斯科勒(Mas - Colell,1986a)和查姆(Zame,1992)。对无限维空间一般均衡模型的发展进行了综合考察。定理 10.2 来自于达菲和查姆(Duffie and Zame,1989)。能够得出与此基本相同的结果的其他证明由下列文献给出:阿鲁约和莫泰罗(Araujo and Monteiro,1989),卡拉特查斯、雷科纳、莱何兹克和施莱弗(Karatzas,Lakner,Lehoczky,and Shreve,1991),达纳和彭迪尔(Dana and Pontier,1990),以及达纳(Dana,1993a,b)。后者专门研究了均衡的惟一性。达纳和列·凡(Dana and Le Van,1996)考察了基于偶的均衡问题。递归效用函数情形下均衡存在的推广是由达菲、基奥法德、思凯达斯(Duffie,Geoffard,Skiadas,1994)给出的。[这一问题有约束意义的表述可在阿鲁约和莫泰罗(Araujo and Monteiro,1987)以及莫泰罗(Monteiro,1994)中找到。]杜马斯、尤泊尔和王(Dumas,Uppal,Wang,2000)给出了递归(recursive)效用函数下有效配置的特征以及在资产定价中的应用。

关于无限维经济中的帕累托最优性,请参见马斯科勒(Mas - Colell,1986b)。克莱尔和贺(Colell and He,1992b)给出了与证券配置帕累托局域最优相对应的局域行为人权重。

引理 10.1 的证明如下所示。首先,L 是下述模下的巴拿赫(Banach)格子:

$$c \mapsto \left[E\left(\int_0^T c_t^2 dt\right)\right]^{1/2}$$

巴拿赫格子上的任意递增线性函数 $\Pi: L \to \mathbb{R}$ 都是连续的,正如阿利普兰蒂斯和布尔金肖(Aliprantis and Burkinshaw,1985)所显示的那样。在给定模下,L 是具有内积关系 $(p,c) \mapsto E(\int_0^T p_t c_t dt)$ 的希尔伯特(Hilbert)空间。由于 Π 是连续的,因此,L 中存在惟一的 π 使得表达式 $\Pi(c) = E(\int_0^T \pi_t c_t dt)$ 成立,原理和习题 1.17 一样。由于 Π 是严格递增的,因此 π 严格为正。

(第 10.4 节～第 10.7 节)第 10.4 节是基于达菲和黄(Duffie and Huang,1985)与达菲(Duffie,1986)。动态张量条件和以名义形式定义证券的假设可以像达菲和查姆(Duffie and Zame,1989)所解释的那样被弱化。第 10.7 节的其余部分是基于黄(Huang,1987)。科瑞斯坦生、格雷文森和米尔特森(Christensen,Graversen,and Miltersen,1996)的研究也放松了动态张量假设。

(第 10.8 节～第 10.10 节)第 10.8 节介绍布黎登(Breeden,1979)的基于消费的资本资产定价模型。这类模型早期的离散时间形式为鲁宾斯坦因(Rubinstein,1976)。这里给出的证明思路来自达菲和查姆(Duffie and Zame,1989)。第 10.10 节再次包含了布黎登基于消费的 CAPM,但这次市场是不完备的。证明的总思路来自于格罗斯曼和施勒(Grossman and Shiller,1982)和拜克(Back,1991)。而且,后者还有更通用的信息过滤。关于这一模型的更进一步的发展,请参见考奈尔(Cornell,1981)与麦当(Madan,1988)。布黎登最初的证明是基于在马尔可夫模式下,随机控制的每一行为人的价值函数都存在光滑解的假设。在这方面布黎登学习了默顿(Merton,1973a)。格罗斯曼和拉洛克(Grossman and Laroque,1990)研究了交易费用对基于消费的 CAPM 的影响。这方面的研究也可参考贺和莫迪斯特(He and Modest,1995),马歇尔(Marshall,1999),以及范亚诺斯(Vayanos,1998)。相关的研究成果也可在下述文献资料中找到:布莱克(Black,1990),德尔加多和杜马斯(Delgado and Dumas,1993),以及赫斯顿(Heston,1990)。有关基于消费的 CAPM 的实证研究,请参见布黎登、吉本斯和林特博格(Breeden,Gibbons,and Litzenberger,1989)。

(第 10.9 节)第 10.9 节是由考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985b)浓缩而成。关于考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985b)期限结构模型的实证分析,请参见陈和斯科特

(Chen and Scott,1992a,b,1993a),吉本斯和拉姆茨沃米(Gibbons and Ramaswamy,1993),皮尔森和孙(Pearson and Sun,1994)。考克斯-英格索-罗斯期限结构模型所对应的离散时间模型应归功于吉本斯和孙(Gibbons and Sun,1986)。有关马尔可夫模式下更进一步的分析,请参见考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985a)以及布黎登(Breeden,1986)。有关更多的考克斯—英格索—罗斯期限结构模型研究,以及其他相关模型的研究,请参见本书第7章。格奥德斯坦和查帕特罗(Goldstein and Zapatero,1996)引入了一个支持瓦斯塞克(Vasicek)期限结构模型的模型。

额外话题 卡拉特查斯、留科纳、莱何兹克和施莱弗(Karatzas,Lakner,Lehoczky,and Shreve,1991)以及卡拉特查斯、莱何兹克和施莱弗(Karatzas,Lehoczky,and Shreve,1990)给出了有可加型效用函数情形下均衡的相对明晰解。卡拉特查斯、莱何兹克和施莱弗(Karatzas,Lehoczky,and Shreve,1991)证明了具有"奇"价格行为(意即状态价格缩子不是伊藤过程)的均衡的存在。例如,不存在短期利率过程。

基于习惯养成效用模型的资产定价模型或相关理论是由下述研究文献给出:戴(Dai,2000),迪特姆普勒和查帕特罗(Detemple and Zapatero,1991),桑达尔森(Sundaresan,1989),康斯坦丁尼德斯(Constantinides,1990),查普曼(Chapman,1998a),以及施莱克汉德(Shrikhande,1995)。在连续时间模式下,效用函数称为随机微分效用函数模型的均衡或资产定价的含义是由下述文献资料开发出来的:达菲和爱普斯坦恩(Duffie and Epstein,1992a),达菲和思凯达斯(Duffie and Skiadas,1994),达菲、施洛德和思凯达斯(Duffie,Schroder,and Skiadas,1997),杜马斯、尤泊尔和王(Dumas,Uppal,and Wang,2000),爱普斯坦恩和麦里诺(Epstein and Melino,1995),费希尔和基勒斯(Fisher and Gilles,1997),以及马(Ma,1991)。关于失望厌恶对证券定价的影响,请参见布罗姆和加利亚(Bonomo and Garcia,1993)。陈和爱普斯坦恩(Chen and Epstein,1999)以及(离散时间情形下的)爱普斯坦恩和王(Epstein and Wang,1994)考察了面临柯尼蒂安不确定性(Knightian uncertainty)时模糊厌恶的影响和表示。希顿(Heaton,1993)考察了时间上不可分偏好和数据的时间总量的含义和影响。读者也可以参见坎贝尔(Campbell,1993)。

非完全信息或非同种信念或非对称信息情形下的模型案例可以在下述文献资料中找到:拜克、曹和维拉德(Back,Cao,and Willard,2000),迪特姆普勒(Detemple,1986,1995),迪特姆普勒和莫什(Detemple and Murthy,1994b,1997b),多斯安和费尔德曼(Dothan and Feldman,1986),基诺迪(Gennotte,1986),吉塞尔斯(Ghysels,1986),本田(Honda,1997a),皮克弗斯基和卡拉特查斯(Pikovsky and Karatzas,1998),王(Wang,1993a),以及查帕特罗(Zapatero,1993,1998)。

杜马斯(Dumas,1989)与德尔加多和杜马斯(Delgado and Dumas,1993)找到了可加型效用函数情形下案例模型均衡的明晰解。巴乔克斯--贝斯莱罗和波泰特(Bajeux-Besnainou and Portait,1997)与约翰逊(Johnson,1994)给出了根据朗恩(Long,1990)最初开发的基于对数效用的标准缩子的状态价格缩子特征。

查姆伯莱恩(Chamberlain,1988)给出了基于市场证券组合的资本资产定价模型的充分条件。

关于证券组合保险的均衡模型,请参见巴沙克(Basak,1995)。弗莫(Föllmer,1993)描述了相当于资产定价的标准一般均衡法的另一种方法。法姆和托兹(Pham and Touzi,1993)考察了与随机波动性相关的风险酬金均衡模型。关于外汇汇率方面的应用,请参见尼尔森和萨—瑞克尔(Nielsen and Saá-Requejo,1992)以及查帕特罗(Zapatero,1995)。

比克(Bick,1986),霍德格斯和卡夫希尔(Hodges and Carverhill,1992),霍德格斯和赛尔拜(Hodges and Sleby,1996)介绍了支持布莱克—斯科尔斯期权定价公式的均衡模型。

习题 10.3 部分地基于赫斯顿(Heston,1988b)。读者也可参见纳卡加瓦(Nakagawa,1999)。关于不同种类行为人情形下的利率行为,请参见王(Wang,1996)。习题 10.5 中的(D)是来自哈恩森和辛格尔顿(Hansen and Singleton,1996)。习题 10.7 基于考克斯、英格索和罗斯(Cox,Ingersoll,and Ross,1985a),黄(Huang,1987),以及达菲和查姆(Duffie and Zame,1989)。

巴沙克(Basak,1997)与弗瑞和斯特兰姆(Frey and Stremme,1997)研究了行为人知道其具有市场(控制)力的情形。巴沙克和库克(Basak and Cuoco,1999),迪特姆普勒和莫什(Detemple and Murthy,1997a),迪特姆普勒和莫什(Detemple and Murthy,1997a),迪特姆普勒和赛拉特(Detemple and Serrat,1999),萨尼托(Saito,1998),以及赛拉特(Serrat,1995)探讨了存在证券组合约束和非完备市场情况下的均衡。特别地,罗文斯坦因和维拉德(Loewenstein and Willard,1999)研究了存在有抵押物约束的情形。

国际资产市场的均衡在诸如赛拉特(Serrat,2000)中有所论述。

关于保险方面的应用,请参见阿瑟(Aase,1999)和朱安斯迪(Zuasti,1999)。

11.

公司证券

本章从公司资本结构的标准问题入手，探讨权益资本和公司债务的估价问题。然后，我们转向可违约债务的定价模型，其基础是某个假设的定义违约停止时间的随机到达强度。本章所介绍的研究工作在注释所引用的其他文献中得到了更为广泛的拓展。

在本章的前几节中，我们讨论资产、股权和债权的市场价值具有随机行为的一个极其简单的模型。起初，我们就可以认为股权和债权是针对公司总市场价值的衍生证券，并据此进行定价。然后，我们引入市场缺陷，并增加股权和债券持有人的控制程度。这样，该理论就会变得更加复杂而不再像衍生证券定价模型。由于篇幅有限，许多有趣的变化形式不能在这里一一介绍。我们的目标是让读者了解论题的性质并介绍一些标准的建模方法。

我们令 B 表示一个完整概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的一个 $\mathbb{R}^d$ 维标准布朗运动，并锁定 B 的过滤 $\{\mathcal{F}_t:t\geqslant 0\}$。然后，我们再允许信息按“泊松式到达”揭示出来。这与我们通常的布朗运动信息假设相比，又向前迈出了显著的一步。

11.1 布莱克—斯科尔斯—默顿模型

我们先简要地概括有关公司债务和权益资本估价的经典的布莱克—斯科尔斯—默顿(B—S—M)模型。假定我们所研究的公司的未来现金流在时间 t 有市场价值 A_t，对常数 φ 和 $\sigma>0$，A 是满足下式的几何布朗运动：

$$dA_t=\varphi A_t dt+\sigma A_t dB_t$$

而且，我们取基础布朗运动 B 的维数为 1。我们有时也称 A_t 为公司的资产。为了简要起见，我们假设(该)公司在某一给定时间 T 之前不产生现金流。为了使该公司的估价看上去合理，我们可以假设存在某个其他证券(或自融资交易策略)，其在时间 t 的市场价值为 A_t。

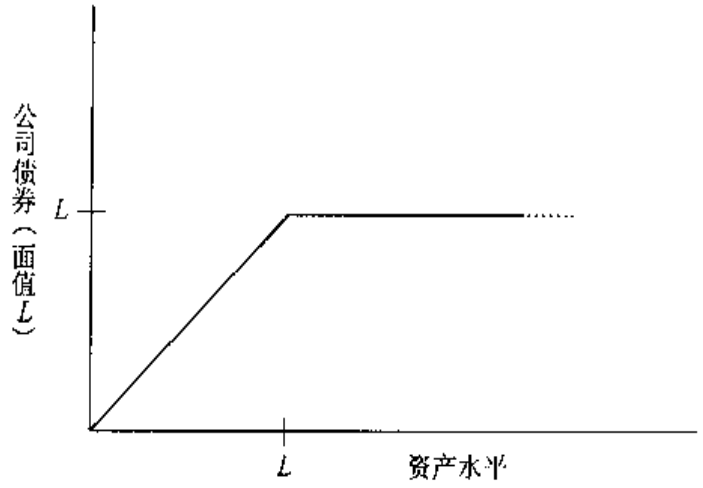


图 11.1 公司债券作为公司资产的衍生证券

我们假设，(该)公司最初的所有人选定该公司的资本结构是由纯权益资本和面值为 L、到期时间为 T 的(单一)零息债券组成。如果在债券到期时，公司的总价值 A_T 小于契约规定的必须向债权人支付的价值 L，那么，公司就不能履约，只得将价值为 A_T 的公司未来现金流交到债权人手中。也就是说，正如图 11.1 所说明的那样，债权人在时间 T 所能得到的是 $\min(L, A_T)$，权益资本所有人所能得到的是 $\max(A_T-L, 0)$。为了简单起见，我们假设对债权和权益资本再没有其他配置(例如说股息)，我们将在稍后证实下述自然的猜测：权益资本的市场价值由布莱克—斯科尔斯期权定价公式给出，公司资产价值则处理成基础证券的价格。

债券和权益资本投资者已经分别为他们各自的证券向公司最初的所有人进行付款。不存在常规套利就意味着，在时间 T，权益资本价值 S_t 和债权价值 Y_t 的总市场价值必须等于资产的市场价值 A_t。(上述结果似乎很显然，但本章习题将要求对此进行证明。)

在第 6 章的意义上，市场是完备的，使得无风险借贷的利率为 r，而且任何人均有机会实施价值过程为 A 的自融资交易策略。这意味着最多存在一个等价鞅测度。

令 $B_t^Q=B_t+\eta t$，其中 $\eta=(\varphi-r)/\sigma$，我们有：

$$dA_t=rA_t dt+\sigma A_t dB_t^Q$$

由基尔萨诺夫定理，B^Q 在由下式定义的等价概率测度 Q 下定义标准布朗运动：

$$\frac{dQ}{dP}=e^{-\eta B(T)-\eta^2 T/2}$$

根据伊藤公式，$\{e^{-rt}A_t : t\in[0,T]\}$ 是 Q 鞅。据此，我们知道，在 e^{-rt} 紧缩后，Q 是等价鞅测度。由于在这方面 Q 是惟一的，因此，在不存在“常规”套利的情况下，我们得知权益资本的惟一价格过程 S 由下式给出(正像第 6 章所解释的那样)：

$$S_t=E_t^Q[e^{-r(T-t)}\max(A_T-L,0)]$$

因此，权益资本价格 S_t 由布莱克—斯科尔斯期权定价公式计算，只需将 A_t 处理为基础证券价格，σ 为波动性系数，债务的面值 L 为执行价格，$T-t$ 为执行前还剩余的时间长度。在时间 t，债务的市场价值为剩余值 A_t-S_t。

当公司的最初所有人卖出面值为 L 的债务和权益资本时，他们所实现的总的初始市场价值为 $S_0+Y_0=A_0$，该值与债务的面值 L 的选择无关。这是莫迪格利尼—米勒(Modigliani-Miller)定理的一个方面。其实，资本结构与公司总价值的估价无关这一所谓的不相关性原理的适用范围更为广泛，与几何布朗运动没有任何关系。当然，一旦我们考虑市场非完美性，那么，资本结构的设计对公司总价值的影响将会是很重要的。

固定公司的资产当期价值 A_t，权益资本的市场价值 S_t 在资产风险参数 σ 上是递增的，这就是布莱克—斯科尔斯公式中通常所说的简森(Jensen)效应。因此，如果权益资本所有人有机会转向风险更大的技术(即具有更大资产风险参数的技术)，那么，他们就会这样做以增加他们所持有的权益资本的市场价值，从而损害债券持有人的利益。当然，条件是公司的总市场价值不会因这一转向而减少得太多。这就是有时候被称为“资产替代”的一个简单例子。

给定权益资本中的期权时间价值，债券持有人会倾向于提前债务的到期日，而权益人会倾向于推迟债务的到期日。

权益资本持有人(或者他们所定的经理人)通常有权以公司的名义做出决定，但要受到法律和契约的约束(诸如债务条款)。这一点是很自然的，因为权益资本的性质是公司现金流的剩余权利。在本章剩余部分和习题中，我们会考虑权益资本持有人有机会发行更多的债务，收回已发行的债务或改变生产技术。我们也会考虑债权人的某些权利。

11.2 内生违约时间选择

我们现在转向债务和权益资本的更加详细的情形，并考虑内生违约时间的选择。我们假设给定鞅测度 Q，在 e^{-rt} 紧缩后，其意义与第 6.13 节中的无限视野情形类似。

给定公司的资源被假定由每一时间 t 的现金流流率 δ_t 构成。我们假设 δ 是满足下述性质的适应过程：对所有的 t，$\int_0^t |\delta_t| \mathrm{d}s < \infty$ 几乎肯定成立。公司资产在时间 t 时的市场价值被定义为公司未来现金流的市场价值 A_t。也就是说：

$$A_t = E_t^Q\left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\delta_s \mathrm{d}s\right] \tag{11.1}$$

我们假定 A_t 是有良好定义的，并且对所有 t 是有限的。基尔萨诺夫定理的鞅公式部分告诉我们：

$$dA_t = (rA_t - \delta_t)dt + \sigma_t dB_t^Q \tag{11.2}$$

其中，σ 是取值为 $\mathbb{R}^d$ 型且满足下述性质的适应过程：对所有的 $T \in [0,\infty)$，$\int_0^T \sigma_t \cdot \sigma_t dt < \infty$。而且，$B^Q$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中 Q 下的标准布朗运动，Q 可以从 B 和基尔萨诺夫定理得出。

我们假设公司的最初所有人选择公司的资本结构是由单一债券和纯权益资本构成，并满足下述条件：债券和权益资本投资者早已为这些证券向公司的最初所有人付款。在我们考虑市场缺陷的影响之前，权益资本和债券的市场价值总和必须等于公司资产的市场价值 A（A 为给定过程），使得从令公司最初所有人得到的总价值最大化的观点上看，资本结构的设计是无关紧要的问题。

为了简单起见，我们假设债券允许以不变（总）券息率 c，随时间连续地支付利息，直到违约。这种债券有时也被称为联合公债。权益资本持有人在时间 t 所得到的剩余现金流为以股息率 $\delta_t - c$ 计算的股息，直到违约。违约时，公司的未来现金流被移交到债权人手中。

权益资本持有者的股息率为 $\delta_t - c$，可能会出现负的结果。但根据一般规定，权益人承担有限责任，意即他们不应该有负的现金流。我们可以通过引入权益资本稀释来安排好有限责任。也就是说，只要权益资本市场价值为正，新发行的权益资本就可以卖到市场中去从而能不断融资给负的股息现金流 $(c-\delta_t)^+$。（类似地，公司还可以通过发行债务或其他形式的证券来给自己融资，我们在习题中探讨。）当权益资本的价格达到 0 时，公司不可能再通过权益资本稀释来融资，无论如何公司只能违约，我们将很快明白这一点。权益资本稀释只能增加流通在外的股票数量，不会改变所有股票的总市场价值，因而在建立模型时也是一种相对简单的方法。并且，对单个股东来说，稀释是没有关系的，因为他要避免负现金流的话，就必须卖掉足够的股票数量从而为其负股息融资，从这两个意义上讲，这就相当于公司稀释了他的股票。这里我们忽略任何的权益资本发行或交易费用成本。这是莫迪格利尼—米勒理论的另一方面的内容，它论述股息方针政策的无关性。

权益资本持有人被假设有契约权在任意停止时间 T 宣告违约，这时，权益资本持有人将公司的所有未来现金流权利转到债权人手中，此种契约安排被称为严格优先权，有时也被称绝对优先权。我们假设在公司的价值 A 达到零之后，权益人被允许推迟清算，所以我们忽略 $A_T<0$ 的可能性。以后我们还会考虑，权益人有权选择改变公司生产技术或以某种价格买回债券。

在保护性条款下，债券契约赋予债权人以权力在任意停止时间 τ，若资产价值 A_τ 低到或低于某规定水平（现在我们假定这一水平为债券的面值 L），可以强行清算。这样，在时间 τ 时，债权人得到 A_τ，而权益人则什么也得不到。以后我们还将考虑其他条款。

假设 $A_0 > L$，我们先考虑在时间 0 时如何选择债券的总利息率 c，从而使得债券的最初市场价值正好等于其面值。这样的债券被说成是按“面值”发行，其相应的单位面值的

利息率 c/L，称为面值收益率(Par Yield)。如果债权人理性地强制执行其保护条款，那么，我们认为面值收益率必然是无风险利率 r。我们也可以认为，以总息率 $c=rL$ 付息的债券，其价格总是其面值 L，权益资本的价格则总是残值 $A-L$，直到违约发生。最后，权益人无严格偏好在时间 $\tau(L)=\inf\{t;A_t\leqslant L\}$(为保护性条款所允许的第一次)之前对含息债券宣告违约，而债权人则理性地在时间 $\tau(L)$ 强制执行清算。

如果总利息率 c 严格小于面值率 rL，那么，权益人在任意停止时间 $T(A_T\geqslant L)$ 执行宣告违约的权利(或者以面值购回债券的权利，前提是他们要有这项权利)总是不合算的，因为如果清算发生于停止时间 $U>T(A_U\leqslant L)$，那么，债券的未来现金流在时间 T 的市场价值严格小于 L。避免在时间 T 清算就会使得权益资本的市场价值严格大于 A_T-L。对 $c<rL$，债权人会在其保护性条款允许出现第一次停止时间 $\tau(L)$ 时行使清算，因为如果这样做，他们就可以在时间 $\tau(L)$ 得到债券价值 L，而如果该债券被延期，那么，其价值将会小于 L。总结一下，对于 $c<rL$，若该债券在 $\tau(L)$ 时被清算，并且在清算前的任意时间 t，以"折扣"价格交易，那么，其交易价格由下式给出：

$$Y_t=E_t^Q\left[\int_t^{\tau(L)}e^{-r(s-t)}c\,ds+e^{-r(\tau(L)-t)}L\right] \tag{11.3}$$

$$=\frac{c}{r}+E_t^Q\left[e^{-r(\tau(L)-t)}\right]\left(L-\frac{c}{r}\right)<L \tag{11.4}$$

11.3 举例：布朗运动型股息增长

作为例子，假设现金流率过程 δ 是 Q 下的几何布朗运动，即对常数 μ 和 σ，有：

$$d\delta_t=\mu\,\delta_t dt+\sigma\,\delta_t dB_t^Q$$

其中 B^Q 为 Q 下的标准布朗运动，本节中我们从头到尾假设 $\mu<r$，因此，根据(11.1)式，A 是有限的，并且

$$dA_t=\mu A_t dt+\sigma A_t dB_t^Q$$

我们计算得出，$\delta_t=(r-\mu)A_t$。

对任意给定常数 $K\in(0,A_0)$，一个在停止时间 $\tau(K)=\inf\{t:A_t\leqslant K\}$ 可以获利一个计量单位的证券在任意时间 $t<\tau(K)$ 时的市场价值为：

$$E_t^Q\left[e^{-r(\tau(K)-t)}\right]=\left(\frac{A_t}{K}\right)^{-\gamma} \tag{11.5}$$

其中

$$\gamma=\frac{m+\sqrt{m^2+2r\sigma^2}}{\sigma^2} \tag{11.6}$$

式中 $m=\mu-\sigma^2/2$。本章习题之一将提供验证(11.5)式的有关指导。在随后的内容中我

们将看到，(11.5)式是非常有用的定价公式。

为了简明起见，我们考虑债权人无保护条款的情形。那么，权益资本持有人宣告违约的时间是可以解下述权益价值最大化问题的停止时间：

$$w(A_0)\equiv\sup_{\tau\in\mathcal{S}}E^{Q}\left[\int_0^{\tau}e^{-rt}(\delta_t-c)\mathrm{d}t\right] \tag{11.7}$$

其中 $\mathcal{S}$ 是停止时间集。

我们很自然地猜测，最大化问题(11.7)式的解是具有形式 $\tau(A_B)=\inf\{t:A_t\leqslant A_B\}$ 的停止时间，其中 A_B 表示有待确定的发生违约的资产水平。给定这一猜测，我们根据伊藤公式进一步猜测由(11.7)式定义的函数 $w:(0,\infty)\to[0,\infty)$ 可以解下述 ODE：

$$\mathcal{D}\,w(x)-rw(x)+(r-\mu)x-c=0,\quad x>A_B \tag{11.8}$$

其中

$$\mathcal{D}\,w(x)=w'(x)\mu x+\frac{1}{2}w''(x)\sigma^2x^2 \tag{11.9}$$

再附上绝对优先边界条件：

$$w(x)=0,\quad x\leqslant A_B \tag{11.10}$$

最后，我们猜测平缓粘贴条件：

$$w'(A_B)=0 \tag{11.11}$$

上式基于(11.10)式和一阶导数 $w'(\cdot)$ 在 A_B 处的连续性。平缓粘贴条件(有时也可称为高阶联系条件)虽然不是最优化的一个明显要求，但以后我们将看到，它已经被证明是猜测解的富有成效的方法。

如果我们对最佳违约时间 $\tau(A_B)=\inf\{t:A_t\leqslant A_B\}$ 的猜测是正确的话，那么，给定最初资产水平 $A_0=x>A_B$，权益资本的价值必然为：

$$w(x)=x-A_B\left(\frac{x}{A_B}\right)^{-\gamma}-\frac{c}{r}\left[1-\left(\frac{x}{A_B}\right)^{-\gamma}\right] \tag{11.12}$$

权益资本的这一猜测值只不过是公司的未来总现金流的市场价值 x，减去债权人在违约时[根据(11.5式)]对 A_B 的权益的市场价值，再减去违约前对债权人所需支付的券息的市场价值。所需支付的券息的市场价值可以很容易地算出，即从时间 0 到时间 $+\infty$，以券息率 c 支付的券息现值 c/r，减去从违约时间 $\tau(A_B)$ 到 $+\infty$ 以券息率 c 支付的券息现值[注意再次运用(11.5)式]。为了完成我们的猜测，我们应用平缓粘贴条件 $w'(A_B)=0$ 于函数(11.12)式，通过计算可以得出，猜测到的引发违约的资产水平为：

$$A_B=\beta_C \tag{11.13}$$

其中

$$\beta=\frac{\gamma}{r(1+\gamma)} \tag{11.14}$$

下面我们将正式陈述并验证这一结果。

命题 11.1 违约时间选择问题(11.7)式的解 $\inf\{t:A_t\leqslant\beta c\}$，相关的权益资本的最初市场价值 $w(A_0)$ 为 $W(A_0,c)$，其中

$$W(x,c)=0,\quad x\leqslant\beta c \tag{11.15}$$

和

$$W(x,c)=x-\beta c\left(\frac{x}{\beta c}\right)^{-\gamma}-\frac{c}{r}\left[1-\left(\frac{x}{\beta c}\right)^{-\gamma}\right],\quad x\geqslant\beta c \tag{11.16}$$

债务的最初价值为 $A_0-W(A_0,c)$。

证明：首先，通过计算可以验证，$W(\cdot,c)$ 满足差分方程(11.8)式和平缓粘贴条件(11.11)式。伊藤公式适用于 C^2(两次连续可微)函数。在这种情形下，虽然 $W(\cdot,c)$ 不一定是 C^2，但它是凸性的，是 C^1，而且除了满足 $W_x(\beta c,c)=0$ 的点 βc 之外，它是 C^2 的。在这些条件下，我们可以像运用标准伊藤公式一样，得到下述结果：

$$W(A_s,c)=W(A_0,c)+\int_0^s\mathcal{D}W(A_t,c)\mathrm{d}t+\int_0^s W_x(A_t,c)\sigma A_t\mathrm{d}B_t^Q \tag{11.17}$$

其中除 $x=\beta c$ 之外，

$$\mathcal{D}W(x,c)=W_x(x,c)\mu x+\frac{1}{2}W_{xx}(x,c)\sigma^2x^2 \tag{11.18}$$

当 $x=\beta c$ 时，我们可以将 $W_{xx}(\beta c,c)$ 代之以零。伊藤公式的这一推广是基于注释中引用的有关参考资料。

对任意时间 t，令

$$q_t=e^{-rt}W(A_t,c)+\int_0^t e^{-rs}((r-\mu)A_t-c)\mathrm{d}s$$

由伊藤公式，有：

$$\mathrm{d}q_t=e^{-rt}f(A_t)\mathrm{d}t+e^{-rt}W_x(A_t,c)\sigma A_t\mathrm{d}B_t^Q \tag{11.19}$$

其中

$$f(x)=\mathcal{D}W(x,c)-rW(x,c)+(r-\mu)x-c$$

因为 W_x 是有界的，根据命题 11.1，(11.19) 式中的最后一项定义 Q 鞅。对于 $x\leqslant\beta c$，我们有 $W(x,c)=0$ 以及 $(r-\mu)x-c\leqslant 0$，所以 $f(x)\leqslant 0$。对于 $x>\beta c$，我们有(11.8)式，因而 $f(x)=0$。因此，q 的漂移总是非正的，而且对任意停止时间 T，我们有 $q_0\geqslant E^Q(q_T)$，或者等价地：

$$W(A_0,c)\geqslant E^Q\left[\int_0^T e^{-rs}(\delta_s-c)\mathrm{d}s+e^{-rT}W(A_T,c)\right] \tag{11.20}$$

对特别停止时间 $\tau(\beta c)$，我们有：

$$W(A_0,c)=E^Q\left[\int_0^{\tau(\beta c)}e^{-rs}(\delta_s-c)\mathrm{d}s\right] \tag{11.21}$$

注意运用边界条件(11.15)式和对 $x>\beta c$，$f(x)=0$。因此，对任意停止时间 T，

$$
\begin{aligned}
W(A_0,c) &= E^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^{\tau(\beta_c)} e^{-rs}(\delta_s - c)\mathrm{d}s\right] \\
&\geqslant E^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^{T} e^{-rs}(\delta_s - c)\mathrm{d}s + e^{-rT}W(A_T,c)\right] \qquad (11.22) \\
&\geqslant E^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^{T} e^{-rs}(\delta_s - c)\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}
$$

注意在最后的不等式中运用 W 的非负性。这说明了停止时间 $\tau(\beta_c)$ 的最优性，并验证了设想的解 $W(A_0,c)$ 可以解(11.7)式。 □

11.4 税和破产成本

为了明白公司最初所有人为什么有严格但却有限的动力发行债券，我们引进下面两点市场缺陷：

- 减税政策，以税率 θ 对利息成本进行税前扣除，使得公司支付的税后实际券息率为 $(1-\theta)c$。

- 破产成本，使得当在时间 t 违约时，公司的资产只能以残余价值 $\hat{A}_t \leqslant A_t$ 处理，这里 $\hat{A}$ 是给定的连续适应过程。

我们也更小心地考虑具有下述特性的均衡的表述：在该均衡下，权益人和债权人在给定对方关于均衡方针政策的正确猜测情况下，分别履行他们各自的权利，从而使得他们各自的证券市场价值最大化。因为权益资本和债券市场价值的总和不再是固定过程 A，新的考虑应当出现。

由于权益人和债权人分别只关心他们各自的证券市场价值最大化，而不考虑公司的总价值，所以非效率问题可能出现。也就是说，可能出现这样的一个均衡，在该均衡下，权益资本和债券的市场价值之和可能严格小于最大值。例如，由于违约从公司总价值最大化的角度来看是过早的。一个不受限制的中央计划者在这种情况下可以把公司的现金流在权益人和债权人之间进行分割，并使双方都取得比均衡状态下严格更大的市场价值。

在没有债务的税保护政策下(即前述第一点市场缺陷)，公司的最初所有人在时间 0 时选择最佳资本结构以使得所有公司证券的最初总市场价值最大化，从而避免了导致这种非效率的资本结构。例如，全额权益资本公司就可避免破产成本。

我们假设债券契约赋予债权人一条保护性条款，允许他们在 $A_t \leqslant K$ 时，对给定 $K \in [0,L]$，有权进行清算。债权人在其保护性条款下，在某个停止时间 τ 会强迫清算。权益人会在停止时间 T 违约。在任意时间 $t < \tau \wedge T \equiv \min(\tau,T)$，权益资本的市场价值为：

$$
\mathcal{S}_t(T,\tau) = E_t^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^{T\wedge\tau} e^{-r(s-t)}(\delta_s - (1-\theta)c)\mathrm{d}s\right)
$$

债券的价值为：

$$\mathscr{D}_t(T,\tau)=E_t^{\mathbb{Q}}\left(\int_t^{T\wedge\tau}e^{-r(s-t)}c\,ds+e^{-r((T\wedge\tau)-t)}\hat{A}(\tau\wedge T)\right)$$

一个均衡为可以解下述最佳停止问题的清算时间偶(T^*,τ^*)：

$$S_0=\sup_{T\in\mathscr{T}}\mathscr{D}(T,\tau^*)$$

和

$$Y_0=\sup_{\tau\in\mathscr{T}_K}\mathscr{D}_0(T^*,\tau)$$

其中$\mathscr{T}_K=\{\tau\in\mathscr{T}:A_\tau\leqslant K\}$。这种局面有时被称为随机博弈或更具体地称为停止博弈。一般说来，均衡不一定是惟一的，甚至可能不存在均衡。

11.5 内生资本结构

为了说明基于税保护价值和破产损失两者之间在权衡上的资本结构内生选择，我们推广第11.13节中的例子，对常数危机率(distress rate)$\alpha\in[0,1]$，假设税率为$\theta\in(0,1)$，破产所得为$\hat{A}=(1-\alpha)A$。为了简单起见，我们再次假设$K=0$，或者说没有保护性条款。

除了权益人把有效利息率处理成税后利息率$c(1-\theta)$外，权益资本的估价和最佳违约时间选择问题也与(11.7)式完全一样。因此，最佳权益资本市场价值为$W(A_0,c(1-\theta))$，其中$W(x,y)$由(11.15)式～(11.16)式给出。最佳违约时间为：

$$T^*=\inf\{t:A_t\leqslant\beta(1-\theta)c\}$$

对给定利息率c，破产危机成本率α对权益资本的价值没有影响。债券在资产水平A_0和利息率c的市场价值$U(A_0,c)$的确会受到危机成本影响，具体表现为：

$$U(x,c)=(1-\alpha)x,\quad x\leqslant\beta(1-\theta)c \tag{11.23}$$

以及对$x\geqslant\beta(1-\theta)c$，

$$U(x,c)=(1-\alpha)\beta c(1-\theta)\left[\frac{x}{\beta c(1-\theta)}\right]^{-\gamma}+\frac{c}{r}\left[1-\left[\frac{x}{\beta c(1-\theta)}\right]^{-\gamma}\right] \tag{11.24}$$

(11.24)式中的第一项是违约时运用(11.5)式而得到的破产所得的市场价值。第二项为直到时间T^*所收到的利息率c的市场价值。

能够使公司最初所有人从权益资本和债券的销售中获得市场价值最大化的资本结构，可以通过求解下述问题的利息率c^*得出：

$$\sup_c\{U(A_0,c)+W(A_0,(1-\theta)c)\} \tag{11.25}$$

上述问题中的c^*和明晰解可以在注释列举的参考资料中找到，而且允许我们很容易

地考察在税保护下的市场价值：

$$H(A_0,c)=\frac{\theta c}{r}\left[1-\left(\frac{A_0}{\beta_C(1-\theta)}\right)^{-\gamma}\right]$$

以及与破产相关的财务困境成本的市场价值：

$$h(A_0,c)=\alpha\,\beta_C(1-\theta)\left(\frac{A_0}{\beta_C(1-\theta)}\right)^{\gamma}$$

之间的权重取舍。能够解(11.25)式的利息率也就是能使"本利差"$H(A_0,c)-h(A_0,c)$最大化的利息率。尽管税保护对公司是有价值的，但它是经济中其他方面的一种转移。而破产困境成本则涉及一种净社会成本，由此可看出税收引发的一种非效率。

11.6 技术选择

假设公司并不只是面对固定的现金流率过程(直到清算)，而是可以在 m 个不同的现金流率过程集$\{\delta_1,\cdots,\delta_m\}$上不断的进行转换。从技术 i(其对应的现金过程为 δ_i)转换到另一个不同的技术 j，一次性所需的转换成本被假设为常数 $\varphi(i,j)$，且 $\varphi(i,i)=0$。

技术选择过程是一个右连续，具有左极限，并取值于$\{1,\cdots,m\}$的适应过程 ζ。假定初始技术 ζ_0 给定。对任意时间 t，$\zeta(t)\neq\zeta(t-)\equiv\lim_{s\uparrow t}\zeta(s)$，其对应的技术转换为从 $\zeta(t-)$到 $\zeta(t)$，相关的转换成本为 $\varphi(\zeta(t-),\zeta(t))$。我们可以把技术选择过程局限在某个可容许子集 Z 中。

给定可容许技术选择过程 ζ，公司的累积现金流在时间 t 时为 D_t^ζ，这里 $D_0^\zeta=0$，以及

$$\mathrm{d}D_t^\zeta=\delta_{\zeta(t)}(t)\mathrm{d}t-\varphi(\zeta(t-),\zeta(t))$$

我们假定在时间 t 公司的总未来现金流的市场价值具有良好的定义，并且由下式给出：

$$A_t^\zeta=E_t^Q\left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\mathrm{d}D_s^\zeta\right]$$

一个全额权益资本公司的最初市场价值为：

$$A_0^*=\sup_{\zeta\in Z}A_0^\zeta$$

假设债券的利息率为 c，公司税率为 θ，权益资本的最初价值为：

$$S_0=\sup_{\zeta\in Z,T\in\mathcal{T}}E^Q\left(\int_0^T e^{-rt}\mathrm{d}D_t^\zeta-\int_0^T e^{-rt}(1-\theta)c\mathrm{d}t\right)$$

给定技术选择过程 ζ，权益人的违约停止时间 T，以及违约前任意时间 t，债券的价值为：

$$Y_t=E_t^Q\left(\int_t^T e^{-r(s-t)}c\mathrm{d}s+e^{-r(T-t)}\hat{A}_T^\zeta\right)$$

其中 $\hat{A}_T^\zeta$ 表示给定了技术选择过程 ζ，违约时债券的所得价值(为了简单起见，我们没有假

定任何保护条款)。

给定债权人和权益资本持有人之间的竞争性利益关系,我们一般并不预期有效均衡。例如,非效率可以从"资产替代"中产生,所谓"资产替代"是指权益资本持有人选择一种风险更大、效率不变的技术,即一种不使债务和权益资本总市场价值最大化的技术。

经常被研究的非效率是债务推迟。所谓债务推迟,是指这样一种情形,即权益人不能将技术转移到"更有效"的技术——一种能够增加公司总市场价值的技术上去。因为在某个时间 t 的转向成本 $\varphi(\zeta(t-),i)$(此成本需要权益人立即支付)超过了采用新技术后权益资本市场价值的增加。由于存在债务推迟,当一种新技术使公司的总市场价值增加时,债务的市场价值可能会增加更多,使得权益资本所体现出来的效应是负的。有关资产替代和债务推迟更多的例子将在习题中探讨。

举一个简单例子,考虑具有 $m=2$ 种技术的情形。第一种技术是再简单不过的,其满足 $\delta_1\equiv 0$。第二种技术能在时间 t 以利息率 $\delta_{2t}=X_t$ 生息,对常数 μ 和 σ,

$$dX_t=\mu X_t dt+\sigma X_t dB_t^Q$$

公司开始是"不活动"的,在技术 $\zeta(0)=1$ 中,可以转向"活动的"技术,通过投资 $\varphi(1,2)=I>0$,而以利息率 X_t 生息。对某个触发水平 $\bar{x}$,最佳转向时间具有形式 $\inf\{t: X_t\geqslant \bar{x}\}$。一旦进行投资使得公司变成"活动的",就没有理由让全额权益公司停止生产,除非具有"挽救价值"。也就是说,除非 $\varphi(2,1)<0$。本章的习题之一就是要求求解此类投资问题以及相应的权益资本和债券的定价问题。债务的存在可能导致非效率,诸如,活动的时间可能被推迟,放弃挽救价值的时间可以是非效率的(资产替代),从而导致与全额权益公司相比更低的总价值(在无税保护的情况下)。注释中列举了多种有关此类实物期权问题的参考资料。

11.7 其他种类的市场缺陷

"完美"的债务条款会迫使权益资本所有人遵循能够使公司总市场价值最大化的生产和融资策略,包括债券的最初销售价值。这样的条款,虽然理论上能使最初所有人的总市场价值最大化,但在实践中却因成本太高而难以表述、监督和实行。本节将提供有关债务的监督和重新谈判的非正式讨论,以及我们的建模方法的推广简述。

债权人不能完美地监视公司的运作。这就意味着,在一定的概率下,偏离保护性条款对权益资本持有人来说,可能是有价值的选择(除非其他方式是被禁止的)。例如,当公司资产水平下降到保护性条款所规定的水平以下后,仍然继续运作公司。如果在付出某种代价的基础上可以改善债权人的监督能力,那么,债权人可以重新收复某些原本会由权益人"占有"的价值。但是,债务和权益资本的总市场价值由于未来监视成本的市场价值而

减少。对公司的最初所有人来说，在发行债券之前就设置一种低成本的监督系统很可能是一种明智之举，这样反而可以提高公司的总市场价值。在债券发行后的某些情况下，权益人可能会倾向于采取行动提高监督成本。

另一种普通的市场缺陷是不能强制执行严格优先权，尽管权益人从契约关系上来说无权得到任何东西。当他们不能满足债券保护性条款或按照债务合同按时偿付时，他们还是试图重新谈判这种绝对优先权。例如，权益人可能有能力影响财务成本水平，或者推迟把公司交到债权人的手中。为了诱使权益人努力降低财务困境成本，债权人可能愿意重新谈判并赋予权益人公司价值的一部分。如果权益人的任何行动均只能减少财务困境成本，那么，在合理的条件下，重新谈判从而偏离给予绝对优先权的能力可以提升债务和权益资本在违约前的市场价值（参照如果严格优先权被强制执行）。但是，如果权益人能够通过他们有权采取的行动，增加财务扭曲成本（即“毁掉”价值），那么，重新谈判的机会在牺牲债权人利益的基础上提高了权益资本的市场价值（参照如果执行严格优先权）。

到目前为止，所有模型均可以通过相对直接的形式来推广均衡的定义。既可以推广到有限到期债务或含离散债息的债券，也可以推广到允许多类债权人的情形，每类债权人有其自身的契约现金流和权利。例如，债券通常按优先权归类，从而使得在清算时，优先债券持有人依据契约有权得到优先债券总面值数额的现金流。（在总额不足时，按照优先债券的面值比例进行配置，通常不考虑到期日期。）如果最优先的那类债权人被全额支付，那么，就把清算现金流赋予次优先的债权人，如此继续，直到最低层的债务。有些债券是由某些可确认的资产保障的，或者说是有抵押的，这意味着在其他没保障的债券按优先原则配置之前，这些债券对这些资产的清算价值有优先权。在实际生活中，总的优先性结构可能相当复杂。优先性和相对到期日对债券定价的某些含义将在本章的习题中探讨。

公司债券通常在一定的时间限制内是可以赎回的。通常，公司债券可以以事先安排的转换率（给定面值转换成股票的数量）和债权人选择的转换时间转换成股票。这种可转换债券给定价问题提出了一定的挑战，注释中的参考资料对此进行了一定的探讨。有时候，公司债券是可以“赎回”的，即可以按事先安排的价格在债权人的选择下把债券再卖给发行人。

我们也可以容许资本结构的调整（通常由权益人主使），这种调整来自于证券的发行和退出（在法律的约束下），其中有些已经被包含在债务的契约之中。

11.8 基于强度的违约建模

本节将介绍违约时间作为具有给定强度过程 λ（其定义如下所述）的停止时间 τ 的模型。根据强度过程 λ、短期利率过程 r、证券的应允支付额、违约时的收复模式以及风险酬

金这些变量的联合行为表现，我们就可以概括可违约债券收益率期限结构的随机行为。

在实际应用中，违约强度可以被允许取决于与违约概率相关的一些可观测变量，诸如权益资本负债比率、资产波动性测量参数、其他会计上的负债程度测量、市场股价、债券收益率差距、行业表现测量参数以及与经济周期有关的宏观经济变量。这种依赖性从理论上说可行，但实际上通常并非内生于公司偿债能力模型。由于这里介绍的方法并不依赖于公司的个别情形，因此，正如注释中所指出的那样，它也被应用于可违约的政府债券的定价研究。

我们锁定完整概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$，以及满足通常条件的过滤$\{\mathcal{G}_t:t\geqslant 0\}$（参见附录I）。我们将第一次广泛用到这种非纯粹布朗运动的连续时间过滤（之所以这样做的理由你在下面就会清楚）。当偏离纯粹布朗运动信息（流）时，最重要的是要区分两个概念：适应过程和可预测过程。正如附录I中所规定，直观地说，可预测过程是这样一个过程：在时间S的价值仅依赖于所研究的（标的）过滤中直到（但不包含）时间S的所有信息。

正如附录I中所定义，一个非爆炸性的计数过程K（例如泊松过程）具有强度过程λ，如果λ是一个满足下述条件的可预测非负过程：对所有的t，$\int_0^t\lambda_s\mathrm{d}s<\infty$几乎肯定成立。而且，上述过程具有以下性质，即局域鞅M（所谓补偿后的计数过程）是由下式给出：

$$M_t=K_t-\int_0^t\lambda_s\mathrm{d}s \tag{11.26}$$

如果对所有的t，我们有$E(\int_0^t\lambda_s\mathrm{d}s)<\infty$，正如附录I中所阐明的那样，那么，补偿后的计数过程M是一个鞅。

如果τ是具有强度过程λ的非爆炸性计数过程的第一次跳跃时间，那么，我们说停止时间τ具有强度λ，对应的直觉是，在任意时间t和满足$t<\tau(w)$的状态w，给定Δ很小，$\tau\leqslant t+\Delta$的g_t条件概率近似地等于$\lambda(w,t)\Delta$。如果λ是有界且连续的，并且给定一些其他弱条件，那么，这一直觉可以通过导数的意义得到解释。

如果$P(\tau\in(0,\infty))>0$，那么，停止时间τ并不是没有意义的。如果停止时间τ是有意义的，以及过滤$\{\mathcal{G}_t:t\geqslant 0\}$是$\mathbb{R}^d$维布朗运动$B$的标准过滤，那么，$\tau$就不会有强度过程。我们可以从下面的事实得出上述结论，即如果$\{\mathcal{G}_t:t\geqslant 0\}$是$B$的标准过滤，那么(11.26)式所给出的相应补偿后的计数过程M（事实上，即为任意局域鞅）可以根据B表述成随机积分，因而不能跳跃，但M必须在τ点跳跃。为了具有强度（过程），停止时间（过程）必须是完全不可接近的，这一性质的定义（在注释中被注明）意味着信息的到来是“突然的”，但布朗运动过滤不具备这种突然性。

顺便说明一下，我们可以设想公司的股东或管理层具有某种布朗运动过滤，从而可以决定最佳违约时间τ（就像第11.3节中所描述的那样），但债权人的监督是不完善的，他们有其自己的过滤$\{\mathcal{G}_t:t\geqslant 0\}$，该过滤所包含信息比布朗运动过滤少。相对于其自身的

过滤来说，他们会认为 τ 具有强度过程。这种情形正是注释中所指出的一种模型要探讨的情形。

如果所研究的计数过程(其第一次跳跃时间为 τ)是具有强度 λ 的双重随机过程(参见附录 I 中的定义)，那么，我们就说 τ 是具有强度(过程)λ 的双重随机过程。双重随机性质意味着我们有：

$$P(\tau > s \mid \mathcal{G}_t) = E_t\left[\exp\left(-\int_t^s \lambda_u \mathrm{d}u\right)\right], \quad t < \min(\tau, s) \tag{11.27}$$

其中 E_t 表示 $\mathcal{G}_t$ 的条件期望。性质(11.27)式从计算上看显得很方便，因为如果把 λ 看成短期利率，把 E_t 看成风险中性，那么，评价(11.27)式中的期望相当于计算无违约风险的零息债券价格。确实，这种类比可以非常有效地帮助我们有所感知。

(11.27)式将是充分的，只要 $\lambda_t = \Lambda(X_t, t)$ 对某可测函数 $\Lambda : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 成立，其中 X 是 $\mathbb{R}^d$ 维的，并且能够解下述形式的随机微分方程：

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t, t)\mathrm{d}B_t \tag{11.28}$$

其中 B 是 $\mathbb{R}^d$ 维的 $\mathcal{G}_t$ 标准布朗运动。

更一般地，(11.27)式假设双重随机计数过程 K(其首次跳跃时间为 τ)是由过滤 $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ 驱动(其定义参见附录 I)的结果。(条件 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ 包括在定义之中，且 $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ 满足常规条件。)双重随机假设的意思是指，强度 λ 是 $\mathcal{F}_t$ 可预测的，以及(以 λ 为条件)K 是具有(有条件的确定型)随时间而变化的强度 $\{\lambda_t : t \geqslant 0\}$ 的泊松过程。特别地，对任意时间 $s > t$，在由事件 $\mathcal{G}_t \cup \mathcal{F}_s$ 产生的族集 $\mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_s$ 条件下，在时间 t 和时间 s 之间到达的数目 $K_s - K_t$ 是具有参数为 $\int \lambda_u \mathrm{d}u$ 的泊松分布型随机变量。[如果对任意非负整数 k，$P(q = k) = e^{-\beta}\beta^k/k!$，那么，随机变量 q 具有参数为 β 的泊松分布。]因此，令 A 表示满足 $K_s - K_t = 0$ 的事件，由迭代期望法则可得，对 $t < \tau$，我们有：

$$\begin{aligned} P(\tau > s \mid \mathcal{G}_t) &= E(1_A \mid \mathcal{G}_t) \\ &= E[E(1_A \mid \mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_s) \mid \mathcal{G}_t] \\ &= E[P(K_s - K_t = 0 \mid \mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_s) \mid \mathcal{G}_t] \\ &= E\left[\exp\left(\int_t^s -\lambda_u \mathrm{d}u\right) \mid \mathcal{G}_t\right] \end{aligned} \tag{11.29}$$

上式与(11.27)式相一致。上述过程仅仅是描绘了该理论的一个大概情况，注释中的参考资料将给出该理论发展的全貌。附录 I 还把概率密度的强度与所研究的停止时间的危险率联系起来。

在我们的研究过程中，我们将反复用到下述很自然的定理。本书中我们没有定义一般过滤情形下针对鞅的随机积分，但该定义可在注释中的参考资料中找到。

引理 11.1 假设 M 是一个鞅，以及 H 是有界的可预测过程。那么，随机积分 $\int H\mathrm{d}M$ 具有良好的定义并且是一个鞅。

11.9 风险中性强度过程

出于为具有对违约时间敏感的现金流量的债券和其他证券进行市场定价的目的，我们需要有一个等价鞅测度 Q 以及一个风险中性强度过程，也就是说，与概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 和给定过滤 $\{\mathcal{G}_t : t \geqslant 0\}$ 相对应的违约时间 τ 的强度过程 λ^Q。在这种情况下，我们称 λ^Q 为 τ 的 Q 强度（与通常一样，可能存在一个以上的等价鞅测度）。在本节的稍后部分我们将看到，比率 λ^Q/λ（对严格为正的 λ）是某种意义上与违约时间相关的不确定性的风险酬金乘数。注释中的参考资料提供了下述简便的成果。

命题 11.2 假设非爆炸性的计数过程 K 具有 P 强度过程，以及 Q 是等价于 P 的任意概率测度。那么，K 具有 Q 强度过程。

基尔萨诺夫定理的一种版本提供了适合计算与强度变化相关的概率测度变化（用类似布朗运动的漂移变化的方法）。假设 K 是具有强度 λ 的非爆炸性计数过程，以及 φ 是严格为正的可预测过程，并且对某固定时间视野 T，几乎肯定 $\int_0^T \varphi_s \lambda_s \mathrm{d}s$ 是有限的。那么，局域鞅 ξ 具有良好的定义，并且由下式给出：

$$\xi_t = \exp\left(\int_0^t (1-\varphi_s)\lambda_s \mathrm{d}s\right) \prod_{i:\, T(i)\leqslant t} \varphi_{T(i)}, \quad t \leqslant T$$

基尔萨诺夫定理 假设局域鞅 ξ 实际上是一个鞅。那么，等价概率测度 Q 由 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \xi(T)$ 定义。在时间区间 $[0, T]$ 的限制内，计数过程 K 具有 Q 强度 $\lambda\varphi$。

对于假设必须特别小心，因为随着等价概率测度的改变，不一定再能保持方便的双重随机性质。演示性的反例可以在注释中所列举的参考资料找到。基尔萨诺夫定理的证明已经在附录中注明，该附录还给出了 ξ 的鞅属性以及 K 在 P 和 Q 下为双重随机过程的充分条件。

在附录 I 中描绘的关于过滤 $\{\mathcal{G}_t : t \geqslant 0\}$ 的定义条件下，鞅公式特征成立；对任意等价概率测度 Q，我们可以从相应的密度过程的鞅公式中得出与 K 相应的 Q 强度。

11.10 零收复债券定价

我们锁定短期利率过程 r，以及由缩子 $\exp(\int_0^t -r_u \mathrm{d}u)$ 缩小后的某个等价鞅测度 Q。我们考虑一个在给定时间 $s > 0$ 支付 $F1_{\{\tau > s\}}$ 的证券的定价问题，其中 F 是一个 $\mathcal{G}_T$ 可测的

有界的随机变量。由于 $1_{\{\tau>s\}}$ 是一个到 s 时为止无违约则取值为 1，否则取值为 0 的随机变量，因此，我们可以把 F 看成是证券在时间 s 的协议应允支付额，但到时间 s 为止，如果有违约支付额则会变成零。可违约零息债券的情形可以通过令 $F=1$ 来处理。下一节我们将考虑违约时的收复问题。

由 Q 作为等价鞅测度的定义，该证券在任意时间 $t<s$ 时的价格 S_t 由下式给出：

$$S_t = E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^s r_u \mathrm{d}u\right)1_{\{\tau>s\}}F\right] \tag{11.30}$$

其中 E_t^Q 表示 Q 下的 $\mathcal{G}_t$ 条件期望。由(11.30)式以及 τ 是一个停止时间(过程)的事实，我们知道，对所有的 $t\geqslant\tau$，S_t 必须均为零。

在 Q 下，我们假设违约时间 τ 具有强度过程 λ^Q。

定理 11.1 假设 F、r 和 λ^Q 均是有界的，而且 τ 为 Q 下由过滤 $\{\mathcal{F}_t : t\geqslant 0\}$ 驱动的双重随机过程，使得 r 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的而且 F 是 $\mathcal{F}_s$ 可测的。若固定任意 $t<s$，对任意 $t\geqslant\tau$，我们有 $S_t=0$，以及对任意 $t<\tau$，有：

$$S_t = E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^s (r_u+\lambda_u^Q)\mathrm{d}u\right)F\right] \tag{11.31}$$

违约前价格表达式(11.31)的含义是，对于以一定强度发生的违约的贴现，类似于对利率 r 的贴现。

证明：由(11.30)式、迭代期望法则以及 r 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的和 F 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的假设，我们有：

$$\begin{aligned} S_t &= E^Q\left(E^Q\left[\exp\left(-\int_t^s r_u \mathrm{d}u\right)1_{\{\tau>s\}}F \,\middle|\, \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t\right]\middle|\mathcal{G}_t\right) \\ &= E^Q\left(\exp\left(-\int_t^s r_u \mathrm{d}u\right)FE^Q\left[1_{\{\tau>s\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t\right]\middle|\mathcal{G}_t\right) \end{aligned}$$

再由双重随机性的含义 $Q(\tau>s \mid \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t)=\exp(\int_t^s -\lambda_u^Q \mathrm{d}u)$，即可得到所需的结果。□

作为一种特别情况，假设过滤 $\{\mathcal{F}_t : t\geqslant 0\}$ 是由 B^Q 所产生，B^Q 是 Q 下 $\mathbb{R}^d$ 维的 $\mathcal{G}_t$ 标准布朗运动。考虑在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子集 D 上取值且能够解下述形式的随机微分方程的“状态”过程 X：

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t^Q \tag{11.32}$$

显然，我们可以令 λ^Q、r 和 F 按下述意义依赖于状态过程 X：

$$\lambda_t^Q = \Lambda(X_t),\quad r_t=\rho(X_t),\quad F=f(X_T) \tag{11.33}$$

其中 Λ、ρ 和 f 为在 D 上取实数的可测函数。

(11.31)式告诉我们，对 $t<\tau$，我们有 $S_t=g(X_t,t)$，对函数 $g: D\times[0,s]\to\mathbb{R}$，该函数在费恩曼—凯科技术条件(参见附录 E)下可以解下述 PDE：

$$\mathcal{D}g(x,t)-[\Lambda(x)+\rho(x)]g(x,t)=0 \tag{11.34}$$

对 $(x,t)\in D\times[0,s)$，其边界条件为：

$$g(x,T)=f(x) \tag{11.35}$$

其中对 $\sum(x)=\sigma(x)\sigma(x)^{\mathrm{T}}$，

$$\mathcal{Q}g(x,t)=g_t(x,t)+g_x(x,t)\mu(x)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sum(x)g_{xx}(x,t)]$$

为了给出在计算上容易处理的例子，我们可以假设函数 μ、$\sum$、ρ、Λ 和 $\log f(\cdot)$ 是仿射的[对于可违约零息债券，我们令 $f(x)=1$]。在这种"仿射"的情形下，就像第 7 章所阐明的那样，我们可以很容易地计算出(11.34)式～(11.35)式具有形式 $g(x,t)=e^{\alpha(t)+\beta(t)\cdot x}$ 的解，其中系数 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 是确定型的，而且要么明确地给出，要么很容易从实际中算出。

11.11 违约时有收复情形下的定价问题

下一步则是要考虑如果违约发生在证券的到期日 s 之前，随机收入 W 在违约时间 τ 时的收复。我们采纳定理 11.1 的假设，并且进一步假设 $W=w_\tau$，其中 w 是有界可预测过程，也是适应定理叙述中出现的过滤$\{\mathcal{F}_t:t\geqslant 0\}$ 的适应过程。

根据等价鞅测度 Q 的定义，任意违约收复在任意时间 $t<\min(s,\tau)$ 的市场价值应由下式给出：

$$J_t=E_t^{\mathcal{Q}}\left[\exp\left(\int_t^\tau -r_u\mathrm{d}u\right)1_{(\tau\leqslant s)}w_\tau\right] \tag{11.36}$$

双重随机假设意味着，在任意时间 $u\in[t,s]$，并且基于 $\mathcal{G}_t\vee\mathcal{F}_s$ 和事件 $\tau>t$ 的条件下，τ 在 Q 下的概率密度为：

$$q(t,u)=\exp\left(\int_t^u -\lambda_z^{\mathcal{Q}}\mathrm{d}z\right)\lambda_u^{\mathcal{Q}}$$

因此，运用与定理 11.1 的证明一样的迭代期望论点，对事件 $\tau>t$，我们有：

$$\begin{aligned}J_t&=E^{\mathcal{Q}}\left(E^{\mathcal{Q}}\left(\exp\left(\int_t^\tau -r_z\mathrm{d}z\right)1_{(\tau\leqslant s)}w_\tau\,\middle|\,\mathcal{F}_s\vee\mathcal{G}_t\right]\middle|\mathcal{G}_t\right)\\&=E^{\mathcal{Q}}\left(\int_t^s\exp\left(\int_t^u -r_z^{\mathcal{Q}}\mathrm{d}z\right)q(t,u)w_u\mathrm{d}u\,\middle|\,\mathcal{G}_t\right)\\&=\int_t^s\Phi(t,u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

运用福比尼定理，其中

$$\Phi(t,u)=E_t^{\mathcal{Q}}\left[\exp\left(\int_t^u -(\lambda_z^{\mathcal{Q}}+r_z)\mathrm{d}z\right)\lambda_u^{\mathcal{Q}}w_u\right] \tag{11.37}$$

我们将可违约证券定价理论的主要成果总结如下：

定律11.2 考虑一个在时间s，如果$\tau>s$，则支付F；否则就在时间τ支付w_τ的证券。假设w、F、λ^Q和r均是有界的。假设τ是Q下由过滤$\{\mathcal{F}_t : t\geqslant 0\}$驱动的双重随机过程，且具有特性$r$和$w$为$\mathcal{F}_t$适应的，以及$F$是$\mathcal{F}_t$可测的，那么对$t\geqslant\tau$，我们有$S_t=0$；对$t<\tau$，有：

$$S_t = E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^s (r_u+\lambda_u^Q)\mathrm{d}u\right)F\right]+\int_t^s \Phi(t,u)\mathrm{d}u \tag{11.38}$$

在上一节结尾所描述过的仿射状态空间情形下，对确定型系数$a(t)$和$b(t)$，给定w具有形式$w_t=e^{a(t)+b(t)\cdot X(t)}$，$\Phi(t,u)$可以通过我们通常的“仿射”方法计算出来。在这种情况下，本章的习题之一要求证明，在一定的技术规则性条件下，对于容易计算的确定型系数α、β、c和C，有：

$$\Phi(t,u) = e^{\alpha(t,u)+\beta(t,u)\cdot X(t)}\left[c(t,u)+C(t,u)\cdot X(t)\right] \tag{11.39}$$

这样，我们仍需计算积分$\int_t^s \Phi(t,u)\mathrm{d}u$的数值解。

为了计算允许周期性地支付息票(coupons)并在到期时支付本金的典型可违约债券的价格，我们可以把一笔支付处理成一种单独的零息债券，然后再把每一笔息票和本金的价格加起来。一个经常要用到的假设(尽管实际中可能并不适用)是，息票没有违约收复，而且不同到期日的债券具有相同的本金收复率。不管怎样，基于诸如仿射驱动过程X上的方便参数假设会导出可违约债券收益率期限结构的直接计算方法，这种方法在实际中可应用于诸如信用衍生证券的定价。信用衍生证券是被专门设计来转移信用风险的一类衍生证券。信用风险的论述可以在注释中引用的参考资料中找到。

对具有嵌入美式期权的可违约债券的情形(最通常的情况是可赎回债券或可转换债券)，通常的办法是通过计算相应动态规划问题的数值解来进行定价。

11.12 违约调整后的短期利率

在定理11.12的情形下，特别简单的定价表达式是基于由下式定义的表示违约时市场价值的损失分数的可预测过程ℓ：

$$(1-\ell_\tau)(S_{\tau-}) = w_\tau \tag{11.40}$$

通过适当的处理(被留为习题)，在定理11.2的条件下，对$t<\min(\tau,s)$，有：

$$S_t = E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^s -(r_u+\ell_u\lambda_u^Q)\mathrm{d}u\right)F\right] \tag{11.41}$$

如果我们令ℓ为给定的外生损失分数过程，定价模型(11.41)式就具有特别方便的特征，因为它允许应用标准定价方法，把收入F处理成无违约风险，但通过“违约调整后”的短期利率过程$r+\ell\lambda^Q$考虑了强度和违约损失的严重程度。调整量$\ell\lambda^Q$实际上是由于违约而

引起的市场价值损失比例的风险中性平均比率。

显然，债券价格对强度 λ^Q 和损失分数 ℓ 的依赖性只是通过它们的乘积 $\ell\lambda^Q$ 表现出来。因此，对任意有界且严格为正的可预测过程 θ，分别用 $\theta\ell$ 和 λ^Q/θ 代替 ℓ 和 λ^Q，债券价格将不变。例如，令 λ^Q 加倍和让 ℓ 减半在违约前将不会影响债券价格过程。

假设对满足(11.32)式的状态过程 X，τ 是由 X 驱动的双重随机过程，而且我们令 $r_t+\ell_t\lambda_t^Q=R(X_t)$ 和 $F=f(X_T)$。那么，在费恩曼—凯科规则性条件下，我们可以得到违约前在任意时间 t 的债券价格 $S_t=g(X_t,t)$，其中 g 是下述 PDE 的解：

$$\mathcal{D}g(x,t)-R(x)g(x,t)=0,\quad (x,t)\in D\times[0,s) \tag{11.42}$$

其边界条件为 $g(x,s)=f(x)$。注释中给出的部分参考资料以及本章的习题均提供了一些例子。作为一种特别情况，如果驱动过程 X 是仿射的，而且对 $c\in\mathbb{R}^n$，$f(x)=e^{d+c\cdot x}$ 以及对 $a\in\mathbb{R}$ 和 $b\in\mathbb{R}^n$，$R(x)=a+b\cdot x$，那么，对容易计算的确定型系数 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$，我们有 $g(x,t)=e^{\alpha(t)+\beta(t)\cdot x}$。

还有一些有趣的情形，其中一部分已经在注释中被注明。在这些情形下，λ_t^Q 或 ℓ_t（或者二者均是）很自然地依赖于违约前的债券价格本身。在马尔可夫情形下，PDE(11.42)式可以进一步推广到下述非线性形式：

$$\mathcal{D}g(x,t)-R(x,g(x,t))g(x,t)=0 \tag{11.43}$$

习 题

11.1 在第 11.1 节的情况下，假设“权益”和“负债”由任意的分享规则定义，只是需要满足可行性条件 $S_T+Y_T=A_T$。假设存在停止时间 τ 使得 $P(\tau\leqslant T)>0$ 和 $A_\tau\neq Y_\tau+S_\tau$。证明存在一个套利，其市场价值具有下界。

11.2 请说明(11.2)式由(11.1)式隐含。

11.3 在第 11.2 节的情形下，锁定资产定价过程 A，我们考虑债权人在任意停止时间 T（此时 $A_T\leqslant K$，其中 $K\leqslant L$ 为常数）强制清算的契约权。为了简单起见，我们假设 $A_0\geqslant L$。我们还假设权益资本持有人有权按债务的面值赎回债务，也就是说，在某个由权益资本人选定的停止时间点，通过向债权人支付 L 可以消除支付利息的义务。

(A)假设权益资本持有人和债权持有人对其契约条款的执行、违约和赎回决定进行最优的选时，并且互相知道对方的策略，那么，证明债券总是被 $\tau(K)$ 清算。

(B)假设 $K=L$ 和 $c\leqslant rL$。证明：相对于其面值，债券折价销售（即 $Y_t\leqslant L$）直至债权人于 $\tau(L)$ 最优地选择强行清算。因此，在 $\tau(L)$ 之前的任意时间 t，债券价格 Y_t 为：

$$Y_t=E_t^Q\left[\int_t^{\tau(L)}e^{-r(s-t)}c\,ds+e^{-r(\tau(K)-t)}L\right] \tag{11.3}$$

证明债券的票面收益率为无风险利率 r。

(C)假设 $K\geqslant L$ 和 $c>rL$，证明权益资本持有人会立即清算，而债券的价值为其面值 L。

11.4 验证(11.5)式，提示：令 $M_t=e^{-rt}(A_t/K)^\gamma$，说明 M 是一个 Q 鞅。

11.5 解决下列情形的第 11.6 节结尾处讨论过的实物期权案例：

(A)首先,对纯权益资本公司($c=0$),请计算在无挽救价值的情况下[即有 $\varphi(2,1)=0$],对"活动的"技术进行投资的最佳时间,请给出完整的验证过程。

(B)把(A)推广到有挽救价值的情况,请猜测解的参数函数形式,以及决定这些参数的条件。可以省略验证的过程。

(C)现在假设该公司有负债,负债的税后息票率为常数 c。对无挽救价值[即有 $\varphi(2,1)=0$]的情况,请给出说明什么时候投资和什么时候宣告违约的问题的解,即所谓的边界引发政策。请决定适当的边界。可以省去详细的验证过程。

(D)现在,假设"活动的"技术具有不变成本率 $k>0$,而净现金流率为 X_t-k。对纯权益资本的公司($c=0$)和无挽救价值的情形[即 $\varphi(2,1)\geqslant 0$],请概括启动和停止生息技术的最佳时间。可以省去详细的验证过程。

11.6 (次要地位的债务)假设权益资本和债权投资者均根据标准布朗运动 B 的标准过滤获得信息。无风险借贷利率为常数 $r>0$。某给定公司希克(Zinc)的资本结构由其资产的三种认领权组成:权益资本和两种不同的零息债券。第一种债券在到期日 $T_1>0$ 支付 F_1,条件是具备可配置的资产和配置次序。第二种债券在到期日 $T_2>T_1$ 支付 F_2,条件是具备可配置的资产。假设还有剩余资产,希克公司在时间 $T_3>T_2$ 清算,所有清算所得均归权益资本人所有。所有债券付款均用流动资产支付。希克公司的生产技术能使在时间 t 时任意数量的资产量 x 转换成时间 $T>t$ 时的资产量 $x\exp[m(T-t)+\sigma(B_T-B_t)]$,其中 $m>r$ 和 $\sigma>0$,并假定时间 t 和时间 T 之间没有债券付款。最初的资产水平为 $x>0$。时间 0 以后再没有其他投资。令 A_t 表示任意时间 $t>0$ 时的资产水平。在第一个到期日 T_1,公司必须偿付尽可能多的到期日为 T_1 的债券面值 F_1,因而资产会减少。也就是说,如果 $A(T_1-)\geqslant F_1$,T_1 时的资产水平就为 $A(T_1)=A(T_1-)-F_1$。这些剩下来的资产又再次投资到同样的技术中去,直到时间 T_2,如果可能的话再按同样的方法偿付第二个债券。如果第二个债券在 T_2 得到了完全偿付,那么,剩下的资产再重新投入同样的技术直到时间 T_3,此时公司就被清算并全部归权益人所有。但是,如果没有足够的资产在 T_1 支付第一个债券,那么,债券的发行人就违约。违约时,在时间 T_2 到期的第二个债券具有优先权。即,如果 $A(T_1-)<F_1$,那么,希克公司在时间 T_1 被立即清算,并立即向第二个债券(在时间 T_2 到期)支付 $\min(F_2,A(T_1-))$,剩下的 $[A(T_1-)-F_2]^+$ 支付给第一个债券(在时间 T_1 到期)。因此,第一个债券是"低级的(Junior)",因为它相对于第二个债券是居次要地位。第二个债券是"高级的(Senior)"。在这种情形下,权益资本所有人一无所获。同理,在时间 T_2,如果 $A(T_2-)<F_2$,那么,公司也应被立即清算,并且向第二种债券的持有人支付 $A(T_2-)$,权益资本所有人还是一无所获。

另外一家公司琼克(Zonk)具有完全一样的技术[即有同样的系数(m,σ),以及同样的布朗运动 B 驱动],但由纯权益资本创建(无债券),不支付任何券息,也没有收到任何新的投资,而且被清算的时间是 T_3。在此前的任意时间 T_3,权益资本的市场价值为琼克公司的资产水平。所有证券(权益和债券)均可被交易,买多卖空均可,而且没有交易费用、税金或其他市场缺陷。我们假设不存在通常意义下市场价值有下界的套利。

(A)假设希克公司的股东可以在时间 0(也只能在时间 0)购买或销售更多的资产,价格为每单位资产一个计价单位。购买这些资产的资金来源是发行更多的权益股票(这被称为"稀释")。新股票的购买人为这些股票支付"公平的市场价"。例如,假设该公司的最初总资产增加了 100 个计价单位。新的最初资产水平 $x+100$,被投资在给定的(m,σ)技术中,且在到期日 T_1 和 T_2 清偿债券之后。剩余的资产,

比如说 Z 在时间 T_3 被分成两部分，一部分 $\varphi\in(0,1)$ 归最原始的股东所有，另一部分 $1-\varphi$ 支付给在时间 0 购买新股票的人。这样就必然得出时间 T_3 时认领权 $Z(1-\varphi)$ 的市场价值为 100 个计价单位。在这种情况下，债券的总市场价值会有所增加，权益资本（新、旧合并起来）的总市场价值也会有所增加。在时间 0 时，销售资产所得将被作为股息立即分配给股东。股东在时间 0 时只需决定是购买还是销售一些资产。但债券契约具有保护性条款，该条款规定，希克公司销售资产时，不可以使流动资产减少到两种债券面值的总和 F_1+F_2。（但在时间 0 以后，如果生产技术有足够低的结果的话，资产水平可以低于 F_1+F_2。如果 $x<F_1+F_2$，那么，可以购买的资产必须是非负量，但购买后的总资产水平仍有可能小于 F_1+F_2。）请给出并严格地阐明最优（从权益资本市场价值最大化的角度）重新资本化的水平。即计算资产的购买量 C（或者销售量，如果 $C<0$）以使得最初股东所持有的股票的市场价值最大化。最初股东所持有的股票的市场价值取决于 $(x,F_1,T_1,F_2,T_2,T_3,r,m,\sigma)$，对 $x>F_1+F_2$ 的情形，条件约束为 $x+C\geqslant F_1+F_2$。

(B) 假设 (A) 中描述的保护性条款被修改成使得优先债券（T_2 到期）持有人有权重置股东在时间 0（也只能在时间 0）销售资产并派发股利，从而使资产能达到的最低水平，即优先债券持有人可以从 F_1+F_2 调整到新的最低水平 $F<F_1+F_2$。假设优先债券持有人重置保护性条款是以使其自身的债券初始市场价值最大化为目的。会出现这种情况吗？请用一句话说明为什么这是可能的，或者为什么是不可能的。如果是可能的，请举出一个例子，并给下述参数或变量以明确的数值：x、r、m、σ、(F_1,T_1)、(F_2,T_2) 和 T_3。如果你愿意，你可以令 $\sigma=0$。在你的例子中，请给出最优初始资产水平底限 F。（优先债券持有人会在修改后的保护性条款中进行选择。）假设债权人和股东均是理性投资者。特别地，债券人假设，如果他们重置保护性条款，那么，股东会在新的保护性条款约束下最优地购买或销售资产。

(C) 现在固定资产的最初水平 x，假设希克公司的股东可以用另一种技术取代目前的技术，新技术与目前的技术具有相同的平均增长参数 m，但其具有更大的风险参数 $\hat{\sigma}>\sigma$。相同的布朗运动 B 驱动资产增长。希克公司的股东会在所有情况下都选择更换技术吗？注意，由于纯权益资本创建的琼克公司仍然维持原样，因此，可能不会有公司使用风险更大的技术 $(m,\hat{\sigma})$。请从理论的高度解释你的答案，并且尽可能地准确，例如通过证明或举出反例。

11.7 （浮动利率票据）锁定一个概率空间和一个过滤。考虑无套利的市场，对任意 t 和 $s>t$，你可以在时间 t 以有限价格 $\Lambda_{t,s}$［其结果在 $(0,1)$ 内］，在该市场上购买或销售在时间 s 到期的无风险（指无违约风险）单位零息债券。给定到期日为 T，面值为 1，利差为 K_T，浮动利率票据被定义为对下列现金流的认领权：到期日 T 的面值 1，以及在一个整数期 $i\in\{1,\cdots,T\}$ 的利差 K_T 加上该整数期所确立的单期无违约风险浮动利率 L_{i-1}。而在上一期 $i-1$ 时确立的单期无违约风险浮动利率 L_{i-1} 为 $\Lambda_{i-1,i}^{-1}-1$，即单期无违约风险债券的单利率。（在实际中，给定票据的整数期间日历长度可以因场合而定。为了具体起见，你可以假设一个单位时间是一个日历年，并且允许持有零息债券和浮动利率票据的任意有界头寸。所有价格和交易策略均为适应过程。）

(A) 按面值发行的浮动利率票据。在发行日，其市场价值等于面值。证明：对任意整数到期时间 T，无套利、无违约风险、按面值发行的浮动利率利差 K_T 是惟一的且等于 0。请不要借助假设状态价格缩小短期利率过程或者等价鞅测度的存在来证明上述结果（你可以假定发行日为时间 0）。

(B) 现在，假设存在完整概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 以及满足通常条件的过滤 $\{\mathcal{G}_t\}$。再假设有适应非负短期利率过程 r 以及由 $\exp(-\int_0 r_u\,du)$ 缩小后的等价鞅测度 Q。假设桑克公司（Zank）在停止时间 τ 违约，停

止时间 τ 是 Q 下的双倍随机(驱动)变量,其强度过程为 λ^Q。

为了简单起见,我们假设,桑克公司发行的任意浮动利率票据在违约时及违约后不再有现金流。有时这被称为零回收假设。对到期时间为 T_1、给定利率为 K_T 的可违约浮动利率票据,我们可对时间 1 至时间 T 的每一笔承诺支付款额进行定价,然后再进行加总,即可得到票据的价格。为了构造一个明晰的模型,我们现在假设存在 $\mathbb{R}^n$ 维的过程 X,它在 Q 下具有下述意义的仿射关系:对任意

$$c=(a,\hat{a},b,\hat{b})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

和任意时间 t 和 $s>t$,存在系数 $\alpha(t,s,c)$ 和 $\mathbb{R}^n$ 维的系数 $\beta(t,s,c)$,使得:

$$e^{\alpha(t,s,c)+\beta(t,s,c)\cdot X(t)}=E_t^Q\left[e^{\int_t^s(a+b\cdot X(u))du}e^{\hat{a}+\hat{b}\cdot X(s)}\right]$$

这些系数 $\alpha(t,s,c)$ 和 $\beta(t,s,c)$ 在应用中通常可以从某些普通微分方程中计算,在某些场合下还是明晰的。你可以认为它们由 (t,s,c) 给定。

假设对给定系数 a 和 a^Q,以及 $\mathbb{R}^n$ 中的系数 b 和 b^Q,$r_t=a+b\cdot X(t)$ 和 $\lambda_t^Q=a^Q+b^Q\cdot X(t)$。再假定定价规则(11.31)式成立,请对在日期 i 承诺支付的券息额 $L_{i-1}+K_T$ 进行定价。最后,请给出票面利差 K_T 公式。

11.8 (存在破产可能性下的期权定价)。我们锁定完整的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 和满足通常条件的过滤 $\{\mathcal{G}_t:t\geqslant 0\}$,假设在给定经济中,存在常数短期利率 r。考虑某个公司,其股权价格过程直到其破产日均为几何布朗运动 X。我们假设存在(由 e^{-rt} 缩小后)等价鞅测度 Q,使得对给定实数参数 m 和 σ,我们有:

$$X_t=X_0\exp(mt+\sigma B_t^Q)$$

其中 B^Q 是 Q 下标准的布朗运动。破产发生的 Q 强度 λ^Q 为常数。特别是,破产发生的停止时间为 $\tau=\inf\{t:K_t=1\}$,其中 K 是 Q 下独立于 B^Q 的、具有不变强度 λ^Q 的泊松过程。当破产发生时,股权的价格立即跳至 0。

(A)请计算该股权的欧式买权(看涨期权)的价格。该期权的到期时间是 T,履约价格是 $x>0$。提示:该习题的要点是,该公司有可能在期权到期之前破产。如果公司不在到期前破产,那么,该期权就有收益,并且股权的价格在履约价格之上。

(B)计算该股权的欧式卖权(看跌期权)的价格。该期权的到期时间为 T,履约价格为 $x>0$。请不要用卖权—买权平价关系。现在你可以据此证明卖权—买权平价关系成立。

11.9 锁定概率空间和满足通常条件的过滤,考虑存在短期利率过程 r 和由 $\exp(\int_0^t -r_s ds)$ 缩小后的等价鞅测度 Q,其中 r_t 满足 $dr_t=a(t)dt+b(t)dB_t^Q$,对仅依时间变化的连续函数 a 和 b 成立,其中 B^Q 是 Q 下 $\mathbb{R}^2$ 维的标准布朗运动,因此 b 的取值也是 $\mathbb{R}^2$ 型的。

(A) 对给定到期时间 T_1,证明时间 T_1 到期的零息债券的价格过程 U 满足 $dU_t=r_tU_tdt+U(t)v(t)dB_t^Q$,$t<T_1$,并请根据 a 和 b 给出 $v(t)$ 的公式。提示:运用 $\int_0^{T_1}r_tdt$ 在 Q 下是正态分布的事实。另一种方法是运用这是仿射期限结构的事实。

(B) 考虑一家公司,其市场价值过程 A 满足 $dA_t=r_tA_tdt+A_t\sigma_AdB_t^Q$,$A_0>0$,其中 $\sigma_A\in\mathbb{R}^2$。假设没有任何形式的券息,因此漂流 r_tA_t 是由等价鞅测度的定义给出。该公司持有到期日为 T_1 的债券 L 张,每张债券承诺在到期日支付 1 个计价单位,除非该公司的价值 A_T 不足以偿还债务,在这种情况下,债券持有者将按比例分享公司的价值,即每张债券的违约支付款为 A_T/L。令 Z_0 表示在时间 0 时该种债券的价

格，请确切地计算违约风险酬金U_0-Z_0，说明它具有布莱克－斯科尔斯卖出期权的定价形式，并确切地给出各系数的表达式。提示：取U为一个缩子。

11.10 假设τ是第11.8节所述意义上的强度为λ的停止时间，并令$N_t=1_{(\tau\leqslant t)}$。证明，$N$是强度为$\{\lambda_t 1_{(\tau\geqslant t)}:t\geqslant 0\}$的非爆炸性的计数过程。提示：可以运用强度的局部鞅特征。

11.11 在定理11.2的条件和假设$w_t=(1-l_t)(S_{t-})$下，请推导基于违约调整后的短期利率的可违约债券价格的表达式(11.41)式。下面的习题取l而不是w为原始参数，这就对你提出了更多的要求。

11.12 假设l是给定的在$[0,1]$间取值的可预测过程，我们要将其看成是违约时市场价值的损失分数。假设在第11.9节的情形下，承诺的权益F、短期利率过程r以及违约时间τ的强度λ^Q均为有界，再令：

$$Y_t=E_t^Q\left[\exp\left(\int_t^s-(r_u+\ell_u\lambda_u^Q)\mathrm{d}u\right)F\right],\quad t\leqslant s \tag{11.44}$$

假设Y在τ处几乎肯定不跳跃(此点的条件类似于定理11.1的条件)。证明：存在惟一的有界适应过程S，并且S是具有下述支付特征的证券的价格过程：在τ处，如果$\tau\leqslant s$，那么，支付$(1-\ell_\tau)S_{\tau-}$；在S处，如果$\tau>s$，那么，支付F。再进一步证明：对$t<\tau$，我们有$S_t=Y_t$；对$t\geqslant\tau$，则有$S_t=0$。

11.13 某些信用衍生证券是建立在第一次违约的基础之上的，即这些衍生证券是建立在几个违约(停止)时间$\tau_1,\cdots,\tau_n$的第一个$\min(\tau_1,\cdots,\tau_n)$基础之上。在第11.8节的情形下，假设对每个$i$，停止时间$\tau_i$具有强度$\lambda_i$，并且不存在同时的违约，即对$i$和$j\neq i$，我们有$P(\tau_i=\tau_j)=0$。证明$\min(\tau_1,\cdots,\tau_n)$的强度为$\lambda_1+\cdots+\lambda_n$。

11.14 在给定的完全概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上，令N为具有不变强度γ的泊松过程。令W为独立于N的随机变量，其结果为1和0，两种结果的概率分别为p和$1-p$。令$K=NW$，再令y_t是由$\{(K_s,N_s):0\leqslant s\leqslant t\}$所生的族集的完全族集。令$\tau$为$K$的第一次跳跃时间。证明$K$是非爆炸性的计数过程，并计算其强度过程$\lambda$。计算对任意给定时间$s$的生存概率$P(\tau>s)$，以及证明(11.27)式并不适用。请特别说明，$K$不是双倍随机驱动的。

11.15 在Q下X的仿射模型以及λ^Q和r对X的仿射依赖关系下，推导(11.39)式。你可以假设(11.37)式是适用的，并可以运用所需要的可积性条件。

注 释

(第11.1节)这种负债和权益资本的定价模型基于布莱克和斯科尔斯(Black and Scholes,1973)与默顿(Merton,1970,1973b,1974)。皮兹和赛尔拜(Pitts and Selby,1983)进一步概括了隐含的信用利差期限结构形态。莫迪格利尼和米勒(Modigliani and Miller,1958)是完美资本市场中资本结构不相关性的经典探索。哥斯克(Geske,1977)运用复合期权模型把应用推广到债务存在多种到期时间的情形。

(第11.2节～第11.5节)这几节基于费希尔、海恩克和查奇诺(Fisher,Heinkel,and Zechner,1989)提出的模型，然后由理兰德(Leland,1994)明确解出适用于存在税收和破产扭曲成本的情形下，最佳违约时间的选择以及权益资本和负债的定价模型。该模型此后被广泛地进一步阐述，从而使其在理兰德和托夫特(Leland and Toft,1996)中能够处理无限期债务的券息；在理兰德(Leland,1998)以及尤瑞格－霍姆博格(Uhrig-Homburg,1998)中能够处理债务的自生唤回和再次股权融资；在达菲和兰德(Duffie and Lando,1998)中能够处理债券投资者的不完全观察具有一定违约强度的情形；以及在安德森和桑达尔森(Anderson and Sundaresan,1996)，安德森、潘和桑达尔森(Anderson,Pan and Sundaresan,1995)，范

和桑达尔森(Fan and Sundaresan,1997),麦拉—巴洛尔(Mella-Barral,1999),以及麦拉—巴洛尔和帕劳丁(Mella-Barral and Perraudin,1997)中能处理违约收复的其他方法。

第 11.3 节的最优性验证证明来自于达菲和兰德(Duffie and Lando,1998)。在这一证明中,我们运用了特殊版本的伊藤公式。这种特殊版本的伊藤公式可以应用于具有下述性质的实数函数:C^1 且除在一点之外是 C^2。在卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve,1988)一书的第 219 页,给出了一个该方面的例子。

科威坦尼克和卡拉特查斯(Cvitanić and Karatzas,1996b)和基弗(Kifer,2000)研究了一些停止策略,其中部分可应用于本章所考虑的策略。

布莱克和考克斯(Black and Cox,1976)发展了基于首先通过的违约时间(first-Passagl-based default timing)选择思想,但应用了外生违约边界。朗斯坦夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz,1995a)也发展了类似的首先通过可违约债券定价模型,该模型会带有随机无违约风险利率。[也可参见尼尔森、萨—瑞克尔和圣—卡拉诺(Nielsen,Saá-Requejo,and Santa-Clara,1993),以及科林—达弗瑞森和格奥德斯坦(Collin-Dufresne and Goldstein,1999)。]周(Zhou,2000)的定价理论是建立在跳跃扩散的首先通过基础之上。

(第 11.6 节)基于本节的转换法案例在研究文献中被反复发展和求解。适用于本节情形的标准模型是迪科斯特(Dixit,1989)模型。这方面的相关文献还有迪科斯特和平迪克(Dixit and Pindyck,1994),它总结了有时被称为实物期权的研究领域内相当数量的模型和研究。布雅琴科和列文德斯基(Boyarchenko and Levndorskii,2000b)以及马可茨(Marcozzi,2000)给出了关于永续期权的一些相关研究成果。

(第 11.7 节)关于谈判和定价,请参见安德森和桑达尔森(Anderson and Sundaresan,1996),安德森、潘和桑达尔森(Anderson,Pan and Sundaresan,1995),戴卡姆伯斯和弗瑞—格利马德(Décamps and Faure-Grimaud,1998,1999),范和桑达尔森(Fan and Sundaresan,1997),麦拉—巴洛尔(Mella-Barral,1999),以及麦拉—巴洛尔和帕劳丁(Mella-Barral and Perraudin,1997)。

黄、萨博拉曼耶姆和桑德拉姆(Huang,Subrahmanyam,and Sundaram,1999)探讨了存在再融资费用情形下的公司债务定价问题。

阿卡雅和卡宾特(Acharya and Carpenter,1999)探讨了可赎回可违约债券的定价问题。关于可转换债券的定价问题,请参见布莱南和施瓦茨(Brennan and Schwartz,1980a),戴维斯和利斯卡(Davis and Lischka,1999),罗夏克(Loshak,1996),奈博格(Nyborg,1996),以及茨凡莱尔蒂斯和弗那德斯(Tsiveriotis and Fernandes,1998)。关于可转换债券的赎回和转换时间选择,请参见伊德瑞登、卡顿和坎贝尔(Ederington,Caton,and Campbell,1997)。

关于信用衍生证券,请参见陈和索普朗扎蒂(Chen and Sopranzetti,1999),考珀和马丁(Cooper and Martin,1996),戴维斯和马洛迪斯(Davis and Mavroidis,1997),达菲(Duffie,1998b),朗斯坦夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz,1995b),以及皮尔瑞德(Pierides,1997)。

(第 11.8 节~第 11.9 节)有关计数过程的标准参考资料是布莱芒德(Brémaud,1981)。更多的参考资料可以在达雷和范瑞—琼斯(Daley and Vere-Jones,1988)以及卡诺(Karr,1991)中找到。梅尔(Meyer,1966)定义了完全不可接近停止时间。附录 I 包含有我们这里用过的计数过程的一些重要成果总结。

引理 11.1 和针对鞅定义的随机积分的定义可以在普罗特(Protter,1990)及其他一些研究资料中找

到。命题 11.2 来自阿兹那和德尔伯恩(Artzner and Delbaen,1995)。基尔萨诺夫定理是从布莱芒德(Brémaud,1981)中简化而来,正如附录 I 所总结的那样。达菲和兰德(Duffie and Lando,1998)说明了在非完全信息下第 11.3 节的模型中违约强度是如何出现的。艾利奥德、杰安伯兰克和约尔(Elliott,Jeanblanc,and Yor,1999)给出了这一强度成果的新证明,宋(Song,1998)则把这一成果推广到了多维情形。库舒卡(Kusuoka,1999b)给出了基于资产的不可观测漂流这一强度成果的一个案例。

库舒卡(Kusuoka,1999b)还给出了说明在测度变化的情况下,双重随机属性不再保持的案例。

(第 11.10 节)阿兹那和德尔伯恩(Artzner and Delbaen,1990a,1992,1995),兰德(Lando,1994,1998),以及加罗和腾布尔(Jarrow and Turnbull,1995)倡导使用基于强度的可违约债券的定价模型。定理 11.1 是基于达菲、施洛德和思凯达斯(Duffie,Schroder,and Skiadas,1996)和兰德(Lando,1998)的研究成果。有关这方面更多的研究成果可以参见别内基和路特克威斯基(Bielecki and Rutkowski,1999a,b,2000),考珀和麦洛(Cooper and Mello,1991,1992),达斯和桑德拉姆(Das and Sundaram,2000),达斯和图法诺(Das and Tufano,1995),戴维德夫、林特斯凯和罗茨(Davydov,Linetsky,and Lotz,1999),达菲(Duffie,1998a),达菲和黄(Duffie and Huang,1996),达菲和辛格尔顿(Duffie and Singleton,1999),艾利奥德、杰安伯兰克和约尔(Elliott,Jeanblanc,and Yor,1999),哈尔和怀特(Hull and White,1992,1995),加罗和余(Jarrow and Yu,1999),加罗、兰德和余(Jarrow,Lando,and Yu,1999),杰安伯兰克和路特克威斯基(Jeanblanc and Rutkowski,1999),麦当和尤奈尔(Madan and Unal,1998),以及尼尔森和罗恩(Nielsen and Ronn,1995)。

基于信用评级中随机过滤的基于强度的债券定价模型是由下述研究文献开发出来:阿凡提斯、格莱哥利和劳伦特(Arvantis,Gregory,and Laurent,1999),加罗、兰德和腾布尔(Jarrow,Lando,and Turnbull,1997),基玛和克姆瑞巴牙斯(Kijima and Komoribayashi,1998),基玛(Kijima,1998),以及兰德(Lando,1998)。

(第 11.11 节)这些研究成果基于达菲、施洛德和思凯达斯(Duffie,Schroder and Skiadas,1996),以及兰德(Lando,1994,1998)。肖恩布切尔(Schönbucher,1998)将其拓展到可以处理收复 W 的情形,这里的 W 不具有可预测过程 w 的形式 w_τ,但允许收复并且正好在违约时间 τ 时被提示。

(第 11.12 节)基于违约风险调整的短期利率过程的债券定价模型是由达菲和辛格尔顿(Duffie and Singleton,1999)研发出来,该研究成果的先驱为派伊(Pye,1974),以及利特曼和伊恩(Litterman and Iben,1991)。关于违约风险调整的短期利率实证研究工作,有关公司债券的应用请参见达菲(Duffie,1999a),有关政府债券的应用请参见达菲、佩德森和辛格尔顿(Duffie,Pedersen,and Singleton,2000),以及佩吉(Pages,2000)。关于更多的政府债券的定价研究资料,请参见基伯森和桑达尔森(Gibson and Sundaresan,1999),麦瑞克(Merrick,1999)。

由非线性 PDE(11.43)式决定的、价格依赖的、违约风险调整后的短期利率模型应用还包括可违约的互换,正如达菲和黄(Duffie and Huang,1996)中所论述的那样。关于更多可违约互换的定价研究,请参见阿布肯(Abken,1993),阿兹那和德尔伯恩(Artzner and Delbaen,1990a),考珀和麦洛(Cooper and Mello,1991),加罗和腾布尔(Jarrow and Turnbull,1997b),李(Li,1995),胡季和兰德(Huge and Lando,1999),以及索瑞森和布利尔(Sorenson and Bollier,1995)。关于可违约互换的制度背景,请参见林特博格(Litzenberger,1992)。关于信用风险对衍生证券定价的影响,请参见马丁(Martin,1997)。

额外话题 高斯利率下公司债券的定价习题基于戴卡姆伯斯和罗切特(Decamps and Rochet,

1997)，以及施姆科、特基玛和范--蒂凡特(Shimko, Tejima, and Van-Deventer, 1993)。关于非流动性对可违约债券价格的影响，请参见爱瑞克森和雷诺特(Ericsson and Renault, 1999)。违约相关模型和有抵押物债券的定价模型包括戴维斯和罗(Davis and Lo, 1999, 2000)，达菲和加利鲁(Duffie and Gârleanu, 1999)，以及菲格(Finger, 2000)。

贝索沙恩、克劳希和格莱(Bensoussan, Crouhy, and Galai, 1995a, b)分析了复合期权和复杂期权，其中的案例包括股权期权，而股权又可看成是公司资产的期权。施雷尔(Galai and Schneller, 1978) 与施瓦茨(Schwartz, 1997)研究了认股权证(Warrant)的定价问题。

12.

数值方法

本章将探讨连续时间情形下证券定价的三种数值方法："二项"近似法、蒙特卡罗模拟法和偏微分方程的有限差分解。

12.1 中心极限定理

大家都知道，正态随机变量可以表示成一系列贝努利试验（即一系列 $i.i.d$ 二项随机变量）经标准化后总和的极限。这一观点，即中心极限定理的另一种版本，使得我们可以把布莱克—斯科尔斯期权定价公式[(5.11)式]概括成当每单位时间的交易期数趋于无限时的二项期权定价公式[(2.16)式]的极限。除了给出离散和连续时间情形中令人感兴趣的联系外，这也提示我们计算连续时间无套利衍生证券价格的一种数值方法。

如果对任意有界连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们有 $E[f(X_n)]\to E[f(X)]$，那么，随机变量序列 $\{X_n\}$ 从分布上收敛于随机变量 X，记为 $X_n\Rightarrow X$。我们可以允许 X 和 $X_1,X_2,\cdots$ 中的每一个变量定义于不同的概率空间。下面的几行文字叙述了中心极限定理的一个标准版本。如果某随机变量具有标准正态累积分布函数，那么，该随机变量是标准正态的。

中心极限定理 假设 $Y_1,Y_2,\cdots$ 为某概率空间上的 $i.i.d$ 随机变量的序列，每个随机变量的期望值为 μ，有限方差为 $\sigma^2>0$。对每个 n，令 $Z_n=Y_1+\cdots+Y_n$。那么，对任意标准正态随机变量 X，有：

$$\frac{Z_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\Rightarrow X$$

定理的证明可以在注释中的参考资料中找到。对于处理习题 2.1 中二项期权定价公式收敛于布莱克—斯科尔斯公式，这一版本的中心极限定理则不能适用。为了将其推广成普遍适用的形式，如果对任意 $n,Y_1^n,\cdots,Y_{k(n)}^n$ 为某概率空间上的独立分布随机变量，那

么，当 $n\to\infty$ 时，满足 $k(n)\to\infty$ 的集合：

$$Y=\{Y_1^n,Y_2^n,\cdots,Y_{k(n)}^n:n\in\{1,2,\cdots\}\}$$

是三角数组，下述版本的中心极限定理就我们的目的而言，已经是很充分了，并且容易证明它是附录 C 中林德伯格—费勒(Linderberg-Feller)中心极限定理的推论。

命题 12.1 假设 Y 是随机变量的三角数组，使得 $Y_1^n,\cdots Y_{k(n)}^n$ 在绝对值上以 y_n 为界，并且 $y_n\to 0$。令 $Z_n=Y_1^n+\cdots+Y_{k(n)}^n$。如果 $E(Z_n)\to\mu$ 和 $\mathrm{var}(Z_n)\to\sigma^2>0$，那么，$Z_n$ 从分布上收敛于均值为 μ 方差为 σ^2 的正态分布随机变量。

12.2 从“二项”至布莱克—斯科尔斯公式

现在来回忆一下第 5.5 节中给出的欧式看跌期权定价的布莱克—斯科尔斯模型的主要内容：

- 某概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，在其上有标准布朗运动 B；
- 对常数 α、σ 和 γ，由 $S_t=x\exp(\alpha t+\sigma B_t)$ 定义的股票价格过程 S 和由 $\beta_t=\beta_0 e^{rt}$ 定义的债券价格过程 β；
- 看跌期权收益 $(K-S_T)^+$，T 为到期时间，K 为执行价格。

第 6 章意义上的无套利看跌期权价格解为：

$$\varphi=E^Q[e^{-rT}(K-xe^{X_T})^+] \tag{12.1}$$

其中对任意 $t\leqslant T$，$X_t=(r-\sigma^2/2)t+\sigma B_t^Q$。$B^Q$ 是等价鞅测度 Q 下的标准布朗运动。

在习题 2.1 的二项模式下，每一时期的股票都有两种可能回报 D 和 $U>D$，而无风险债券具有不变回报 $R\in(D,U)$。类似于第 2 章中的看涨期权价格，看跌期权价格的风险中性概率表述为：

$$E^Q[R^{-T}(K-xe^{\rho})^+] \tag{12.2}$$

其中 $\rho=Y_1+\cdots+Y_T$，并且 $Y_1,\cdots,Y_T$ 为 Q 下的 $i.i.d.$ 二项随机变量(称为贝努利试验)，每一变量的可能结果为 $u=\log(U)$ 和 $d=\log(D)$，其对应的风险中性概率分别为 $p=(R-D)/(U-D)$ 和 $1-p$。我们可以根据连续时间股票和债券价格过程，按如下方式校准二项股票回报 U 和 D，以及债券回报 R。显然，我们可以令债券回报为 $R=e^r$。对于股票回报 U 和 D，则需要进一步思考。为了保持连续时间和二项模型之间在概率上的类似性，我们将明确地模拟“上调回报”U 的外生给定概率 q，并选择 U 和 D 使得连续计算复利股票回报的“实际”(在 P 下)均值和标准差在两种情形下都一样。概率 q 与由回报构造的风险中性概率 p 不能混淆起来。让我们任意地选取 $q=0.50$，然后再选择 $u=\alpha+\sigma$ 和 $d=\alpha-\sigma$。做出这些安排后，离散和连续时间两种情形下的连续复利股票回报(在 P 下)的单位时间的均值均为 α，方差均为 σ^2。q、u 和 d 的许多其他取值亦应可行。

令“模型 n”表示每单位时间有 n 个交易期数，每个交易期的回报分别为 U_n、D_n 和 R_n 的二项模型。我们将令 n 趋于无限，并总是按照上述方法，将二项回报校准为连续时间回报。为了维持单位时间的总回报的均值和方差(在 P 下)分别在连续复利水平 α 和 σ^2 上，我们将每个交易期的连续复利回报 $u_n=\log(U_n)$ 和 $d_n=\log(D_n)$ 重置为 $u_n=\alpha/n+\sigma/\sqrt{n}$ 和 $d_n=\alpha/n-\sigma/\sqrt{n}$。我们令 q_n 固定在 0.50。由于回报率为 $i.i.d$，因此，连续复利回报的单位时间风险中性均值和方差分别为：

$$n[q_n u_n+(1-q_n)d_n]=\alpha$$

和

$$nq_n(1-q_n)(u_n-d_n)^2=\sigma^2$$

它们恰好是所要求的。每个交易期的债券回报为 $R_n=e^{r/n}$。T 个单位的日历时间所对应的交易期数为 Tn。因此，我们可以为模型 n 而把看跌期权价格公式(12.2)写成：

$$\varphi_n=E^Q(e^{-rT}[K-x\,e^{\rho(n)}]^+) \tag{12.3}$$

其中 $\rho(n)=Y_1^n+\cdots+Y_{Tn}^n$，并且 $Y_1^n,\cdots,Y_{Tn}^n$ 是结果为 u_n 和 d_n 的 $i.i.d.$ 二项随机变量，两种结果所对应的风险中性化(Q)的概率分别为 p_n 和 $1-p$，其中：

$$p_n=\frac{R_n-D_n}{U_n-D_n} \tag{12.4}$$

回报的每单位时间风险中性化的均值和方差分别为：

$$M_n=n[p_n u_n+(1-p_n)d_n]$$

和

$$V_n=np_n(1-p_n)(u_n-d_n)^2$$

某个习题可以说明 $M_n\to r-\sigma^2/2$ 和 $V_n\to\sigma^2$。因此，$E^Q[\rho(nT)]\to(r-\sigma^2/2)T$ 和 $\mathrm{var}_Q[\rho(nT)]\to\sigma^2T$，其中 var_Q 表示在 Q 下的方差。因为 u_n 和 d_n 均收敛于 0，由命题 12.1 所给出的中心极限定理版本意味着 $\rho(n)\Rightarrow X_T$。因为由 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义的函数 $h(y)=(K-x\,e^y)^+$ 是有界且连续的，因此，当每单位时间的交易期数趋于无限时，二项分布的看跌期权价格 φ_n 收敛于(12.1)式中的布莱克—斯科尔斯看跌期权价格 φ。

上述看跌期权收益函数特征仅为其连续性和有界性。因此，应用同样的方法可以使我们得出结论，对任意有界连续函数 g，在二项分布情形下(每单位时间有 n 个交易期)，对 $g(S_{Tn})$ 的要求权的无套利价格收敛于其相应的由费恩曼—凯科(Feynman-Kac)公式得出的连续时间无套利价格 $E^Q[e^{-rT}g(Z_T)]$，其中 $Z_T=x\exp[(r-\sigma^2/2)T+\sigma B_T^Q]$。

由买卖权平价关系可知，二项买权定价公式亦在同样的意义上收敛于布莱克—斯科尔斯买权定价公式。也就是说，买卖权平价关系意味着存在下述两式：

$$C_n=x+\varphi_n-e^{-rT}K$$

和

$$C(x,0)=x+\varphi-e^{-rT}K$$

由于 $\varphi_n \to \varphi$，我们有 $C_n \to C(x,0)$。

12.3 无界衍生证券收益的二项分布收敛

现在，你也许已经清楚我们为什么以卖权例子作为开始，然后通过买卖权平价原理来处理买权的情况。其原因是买权的收益函数 $x \mapsto (e^x - K)^+$ 是没有边界的。通过另一种更困难的方法(应用下面的成果)，我们也可以直接说明买权价格公式的收敛性，而不需要应用买卖权平价关系。本节并没有实质的重要性，因此，读者在第一次阅读时可以略过本节内容。均匀可积随机变量将在附录 C 中定义。

连续映射定理 假设 $X_n \Rightarrow X$，并且 g 为连续函数。那么，$g(X_n) \Rightarrow g(X)$。

命题 12.2 假设 $X_n \Rightarrow X$。如果 $\{X_n\}$ 是均匀可积的，那么，$E(X_n) \to E(X)$。反之，如果 X、X_1 和 X_2 是非负的并具有有限期望，以及 $E(X_n) \to E(X)$，那么，$\{X_n\}$ 均匀可积。

可以证明(留作习题)，对于上一节所定义的 $\rho(n)$，买权收益序列 $\{[x\,e^{\rho(n)} - K]^+\}$ 是均匀可积的。由此，上述两种结果直接意味着，二项分布买权定价公式收敛于布莱克—斯科尔斯公式。

更一般地，考虑任意衍生证券的收益函数 g，它使得 $\{V_n\}$ 均匀可积，其中 $V_n = g\lfloor x\,e^{\rho(n)}\rfloor$。再假设 g 是连续的，并且满足附录 E 中所定义的多项式增长条件，使得费恩曼—凯科定价公式(5.26)可以适用。那么，我们则有二项分布价格 $E^Q(e^{-rt}V_n)$ 收敛于连续时间价格 $E^Q[e^{-rT}g(Z_T)]$，其中：

$$Z_t = x\,\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t^Q\right], \quad t \leqslant T \tag{12.5}$$

12.4 资产价格过程的离散化

衍生资产价格的费恩曼—凯科解(5.40)通常是很难明确地计算的。本节和接下来的两节将探讨(5.40)式的数值解，应用的方法是随机微分方程(5.41)的离散时间近似蒙特卡罗模拟法。

我们先锁定概率空间和由它定义的 $\mathbb{R}^d$ 维标准布朗运动 B，以及其标准过滤。假设需近似的 SDE 具有下述形式：

$$dX_t = a(X_t,t)dt + b(X_t,t)dB_t \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^N \tag{12.6}$$

其中 $a: \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^N$ 和 $b: \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^{N\times d}$，对任意 k 存在有界的 k 阶导数。根据附录 E，这足以保证 $\mathbb{R}^N$ 中存在惟一的伊藤过程 X 满足(12.6)式。近似(12.6)式的

一种自然方法是欧拉近似法：对单位时间的 n 个交易期，令 $\hat{X}^n$ 为定义在某(可能是不同的)概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上取值为$\mathbb{R}^N$型的离散时间过程，并且：

$$\hat{X}^n_{k+1}-\hat{X}^n_k=\frac{1}{n}a\left(\hat{X}^n_k,\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}b\left(\hat{X}^n_k,\frac{k}{n}\right)\epsilon_{k+1};\quad \hat{X}^n_0=x \tag{12.7}$$

其中$\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots$是取值为$\mathbb{R}^d$型的标准正态向量 $i.i.d.$ 序列。这就称为(12.6)式的欧拉近似。

我们的目标是给出 $E[f(X_T)]$形式的近似表达式，其中 T 为固定时间，X 为(12.6)式的解，以及 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$满足多项式增长条件(在附录 E 中有定义)且具有任意阶的导数。我们试探性地近似 $f_n=E[f(\hat{X}^n_{T_n})]$。问题是：这一近似究竟好到什么程度？令 $e_n=E[f(X_T)]-f_n$ 表示近似误差。可以证明 $e_n\to 0$，更令人满意的是，我们可以给出收敛的阶数。如果 $y_n n^k$ 以 n 为界，那么，序列$\{y_n\}$具有 k 阶收敛性。如果 e_n 具有一阶收敛性，那么，欧拉近似被认为是一阶方案。更准确地说，存在常数 C 使得 e_n+C/n 具有二阶收敛性。误差系数 C 可以是正的，也可以是负的，并由此给出近似的偏差。尽管 C 通常是未知的，但 C 本身也可以由 $C_n=2(f_n-f_{2n})$来进行一阶近似。

注释中给出了关于这些欧拉近似特征和具有二阶误差的更复杂的方案的参考资料。例如，对于 $N=1$ 和在一定的技术条件下，二阶方案由米尔斯坦(Milshtein)近似给出。给定 $C^2(\mathbb{R})$中的 μ 和 σ，并使得对所有的 t，有 $a(x,t)=\mu(t)$和 $b(x,t)=\sigma(x)$，那么，μ 近似地由下式给出：

$$\begin{aligned}\hat{X}^n_{k+1}-\hat{X}^n_k=&\frac{1}{n}\left[\mu(\hat{X}^n_k)-\frac{1}{2}\sigma(\hat{X}^n_k)\sigma'(\hat{X}^n_k)\right]\\&+\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(\hat{X}^n_k)\epsilon_{k+1}+\frac{1}{2n}\sigma(\hat{X}^n_k)\sigma'(\hat{X}^n_k)\epsilon^2_{k+1}\\&+\frac{1}{n^{3/2}}\upsilon(\hat{X}^n_k)\epsilon_{k+1}+\frac{1}{n^2}\eta(\hat{X}^n_k)\end{aligned} \tag{12.8}$$

其中

$$\upsilon(x)=\frac{1}{2}\mu(x)\sigma'(x)+\frac{1}{2}\mu'(x)\sigma(x)+\frac{1}{4}\sigma(x)^2\sigma''(x)$$

以及

$$\eta(x)=\frac{1}{2}\mu(x)\mu'(x)+\frac{1}{4}\mu''(x)\sigma(x)^2$$

12.5 蒙特卡罗模拟

当然，我们一般并不知道近似 $E[f(\hat{X}^n_{T_n})]$，但我们可以用蒙特卡罗模拟法来估计这

一数量。大数定理告诉我们：如果 $Y_1, Y_2, \cdots$ 为有限期望的随机变量的 *i. i. d.* 序列，那么，$(Y_1+\cdots+Y_k)/k \to E(Y_1)$ 几乎肯定成立。

令 $Y_i = f(\hat{X}^n_{Tn})$ 的定义如上所述。这是需要计算均值的随机变量的第一次模拟。对于任意 i，以同样的方式定义 Y_i，需要注意的是我们需要将 $\mathbb{R}^d$ 中的标准正态向量序列 $\{\epsilon^{(i)}\}$ 代替(12.7)式中原有的标准正态向量 $\epsilon = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{Tn})$。我们令 $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \cdots$ 本身为 *i. i. d.*。因此，序列 $Y_1, Y_2, \cdots$ 也是 *i. i. d.*，并且符合应用大数定理的条件，从而有：

$$f(n,k) \equiv \frac{Y_1+\cdots+Y_k}{k} \to E[f(\hat{X}^n_{Tn})] \quad \text{几乎肯定成立.} \tag{12.9}$$

在实际应用中，我们通常运用某种决定型方案，用准随机数值来代替 $\{\epsilon^{(i)}\}$。许多种所谓的降低方差技术，诸如重要性取样，都可以用来提高蒙特卡罗模拟的收敛特征。例如，除了选择令 $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \cdots$ 为 *i. i. d.* 之外，对偶数 i，我们可用 $\epsilon^{(i)}$；而对奇数 i，可令 $\epsilon^{(i)} = -\epsilon^{(i-1)}$。在一定条件下，这种正反取样法会提高模拟的收敛特征。更多的降低方差的方法可以在注释中的参考资料中找到。

现在我们知道，(12.9)式给出的 $E[f(X_T)]$ 的近似 $f(n,k)$ 是基于伊藤过程 X（每单位时间有 n 个交易期）的离散时间近似 $\hat{X}^n$，以及对过程 $\hat{X}^n$ 进行 k 次模拟。计算 $f(n,k)$ 所需要的加法运算次数大致和 N^2Tnk 成正比。由于 N 和 T 对于给定问题假设是固定的，我们主要关心的是 nk 的大小（给定有限的计算时间）。中心极限定理将给我们指出每单位时间的时间点数 n 和模拟样本路径数量 k 之间的互换代价。下一节就是以注释中的参考资料为基础来专门阐述这一问题。

12.6 有效 SDE 模拟

考虑关于从分布上收敛于某随机变量 Z 的随机变量序列 $\{Z(1), Z(2), \cdots\}$ 的下列条件。对于 $E[f(X_T)]$ 的计算问题，我们可以把 $Z(n)$ 看成 $f(\hat{X}^n_{Tn})$，把 Z 看成 $f(X_T)$。

条件 A 令 $\alpha = E(Z)$ 和 $\alpha(n) = E[Z(n)]$。

(ⅰ) 当 $n \to \infty$ 时，$Z(n) \Rightarrow Z$。

(ⅱ) 当 $n \to \infty$ 时，$E[Z^2(n)] \to E(Z^2) < \infty$。

(ⅲ) 当 $n \to \infty$ 时，$\alpha(n) = \alpha + \beta n^{-p} + o(n^{-p})$，其中 $\beta \neq 0$ 和 $p > 0$。

条件(ⅰ)和条件(ⅱ)是极限定理应用的充分条件。在我们的应用中，p 是离散方案收敛的阶数，β 是估计函数 $\alpha(n)$ 的偏差系数。对于非零实数序列 x_n，记法“$o(x_n)$”的意思是当 n 趋于无限时，$o(x_n)/x_n$ 收敛于零。在我们的应用中，n 是每一个样本路径的时间期数。

考虑由下式给出的 $E(Z)$ 估计变量：

$$a_n = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} Z_i(n)$$

其中 $Z_1(n), Z_2(n), \cdots$ 是具有与 $Z(n)$ 同分布的随机变量的 *i. i. d.* 序列，k_n 是可能与 n 有关的正整数。在我们的应用中，用来计算 a_n 的计算机资源量与 nk_n 成正比。下面的成果说明，只要我们有足够的计算机资源，给定的 k_n 就像 n^{2p} 一样随着 n 的增长而增长，近似误差 $z_n = a_n - a$ 具有极限正态分布。如果 k_n 不以此速度增长，那么，极限分布是"无限的"就意味着效率损失。例如，对于欧拉方案($p=1$)来说，时间期数每增加一倍，模拟次数应增加两倍(至少极限地)。就拿(12.8)式这样的二阶方案来说，模拟次数关于极限分布的更好的结果可以在注释中的原始参考资料中找到。

定理 12.1 假设条件 A 成立。

(A)如果 $k_n/n^{2p} \to +\infty$ 或者当 $nk_n \to \infty$ 时，$k_n/n^{2p} \to 0$，那么，

$$(k_n n)^{p/(1-2p)} |a_n - a| \Rightarrow +\infty \tag{12.10}$$

(B)如果当 $nk_n \to \infty$ 时，k_n/n^{2p} 收敛于非零常数 c，那么，

$$(k_n n)^{p/(1+2p)}(a_n - a) \Rightarrow \frac{\sigma}{C^{1/2}} W + \beta C^p \tag{12.11}$$

其中 $C = c^{1/(1+2p)}$，W 是标准正态分布，并且 $\sigma^2 = \mathrm{var}(Z)$。

证明：已知：

$$a_n - a = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \hat{Z}_i(n) + \alpha(n) - a$$

其中 $\hat{Z}_i(n) = Z_i(n) - \alpha(n)$。因此，

$$(k_n n)^{p/(1+2p)}(a_n - a) = (k_n n)^{p/(1+2p)} k_n^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^{k_n} \frac{\hat{Z}_i(n)}{\sqrt{k_n}}\right) + (k_n n)^{p/(1+2p)}(\alpha(n) - a)$$

条件 A 中的(ⅰ)和(ⅱ)允许我们应用林德伯格—费勒(Lindeberg-Feller)中心极限定理(参见附录 C)。因此，当 $n \to \infty$ 时，

$$\sum_{i=1}^{k_n} \frac{\hat{Z}_i(n)}{\sqrt{k_n}} \Rightarrow \sigma W$$

其中 W 是方差 $\sigma^2 = \mathrm{var}(Z)$ 的标准正态分布。再应用条件 A 中的(ⅲ)，并且进行适当的代数运算，即可完成所需做的证明。 □

12.7 费恩曼—凯科的应用

考虑由(5.40)式给出的在时间 T 支付 $g(S_T)$ 的衍生资产的价格 $C(x,0)$，其中 S 由

(5.34)式定义，时间 t 的短期利率由 $r(S_t,t)$ 给出。如前所述，我们有：

$$C(x,0)=E[Y_T g(Z_T)] \tag{12.12}$$

其中 $Y_t=\exp[\int_0^t -r(Z_s,s)\mathrm{d}s]$ 并且

$$\mathrm{d}Z_t=r(Z_t,t)Z_t\mathrm{d}t+\sigma(Z_t,t)\mathrm{d}B_t;\quad Z_0=x$$

由于 $\mathrm{d}Y_t=-r(Z_t,t)Y_t\mathrm{d}t$，取值为 $\mathbb{R}^{N+1}$ 型的由 $X_t=(Y_t,Z_t)$ 定义的过程 X 可以解形式如同(12.6)式的 SDE。我们假设相应的系数函数 a 和 b 满足由第 12.4 节中的(12.6)式提出的技术规则条件。这便要求 r 是有界的，并且其每一阶的导数均为有界，以及 σ 的每一阶的导数均为有界。费恩曼—凯科解(12.12)式可以写成 $E[f(X_T)]$，其中 $f:\mathbb{R}^{N+1}\to\mathbb{R}$ 是由 $f(y,z_1,\cdots,z_N)=yg(z_1,\cdots,z_N)$ 定义。如果 g 的每阶导数均是有限的，那么，衍生资产价格 $C(x,0)$ 可以用上一节的方法来近似(更弱的条件已经够用)。

期权的情况需再作特别处理。由 $g(x)=(x-K)^+$ 定义的买权收益函数 g 甚至不是一阶可微的。我们只需克服在 K 处的“扭折”问题。函数 g 可以令人满意地由 g_α 来近似，其中对任意 $\alpha>0$，

$$g_\alpha(x)=\frac{x-K+\sqrt{(x-K)^2+\alpha}}{2} \tag{12.13}$$

确实，g_α 具有任意阶的连续导数，满足某个增长条件，并且当 $\alpha\to 0$ 时，一致单调地向上收敛于 g。由控制收敛定理可知，当 $\alpha\to 0$ 时，相应的费恩曼—凯科解因而也收敛于 $C(x,0)$。

12.8 有限差分方法

本节将探讨与资产价格相关的 PDE 的简单有限差分法。我们先叙述一下基本思路，然后再给出基于考克斯—英格索—罗斯期限结构模型的例子。

我们将首先处理柯西(Cauchy)问题：给定在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上取实数的函数 r、g、h、μ 和 σ，并且在 $C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$ 中找出可以解下述方程的函数 f：

$$\mathcal{D}f(x,t)-r(x,t)f(x,t)+h(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T) \tag{12.14}$$

其边界条件为：

$$f(x,T)=g(x,T),\quad x\in\mathbb{R} \tag{12.15}$$

其中

$$\mathcal{D}f(x,t)=f_t(x,t)+f_x(x,t)\mu(x,t)+\frac{1}{2}\sigma(x,t)^2 f_{xx}(x,t)$$

就像我们在第 5 章中所看到的一样，我们可把(12.14)式～(12.15)式的解 f 解释成在时间 t 的付息率为 $h(x,t)$(当状态为 x)和在时间 T 的终值为 $g(x,t)$(当状态为 x)的证券的

无套利市场价值。当状态为 x 时，短期利率在时间 t 为 $r(x,t)$，"原始"证券的价格和股息以第 5 章中所描述的方式决定函数 μ 和 σ。另外，μ 和 σ 也可以按第 10 章中的均衡法直接决定(参见习题 10.7)。确保解的存在和惟一性的规则性条件将在附录 E 中探讨，该附录中也将探讨概率费恩曼—凯科解。

求解(12.14)式～(12.15)式有限差分的方法的基本思路是选择栅格：

$$\{(x_i,t_j)\,:\,i\in\{1,\cdots,N\},j\in\{1,\cdots,M\}\}\subset\mathbb{R}\times[0,T]$$

并且找到(12.14)式～(12.15)式的形式为 $N\times M$ 矩阵的近似解 F，其 (i,j) 元素 F_{ij} 为 $f(x_i,t_j)$ 的一个近似。我们总是取 $t_1=0$ 和 $t_M=T$。我们取常数 Δx 和 Δt 来定义栅格的网孔尺寸(mesh sizes)，使得对所有的 $i>1$，$x_i-x_{i-1}=\Delta x$，以及对所有的 $j>1$，$t_j-t_{j-1}=\Delta t$。正如图 12.1 中所描绘的那样。原则上，增加空间点数 N 或时间点数 $M=T/\Delta t$，都会增加近似的精确度，尽管有限差分方法的收敛性和稳定性特征可以是很微妙的问题。多种有限差分方法可以适合柯西问题，当然这要取决于 (μ,σ,r,h,g) 的特征。我们只是描述其中的一种方法，这种方法有时被称为科朗克—尼科尔森方法(Crank-Nicholson)，它具有合理的特征。至于该方法的精确性和稳定性特征，以及其他有限差分方案，可以参见注释中的参考资料。

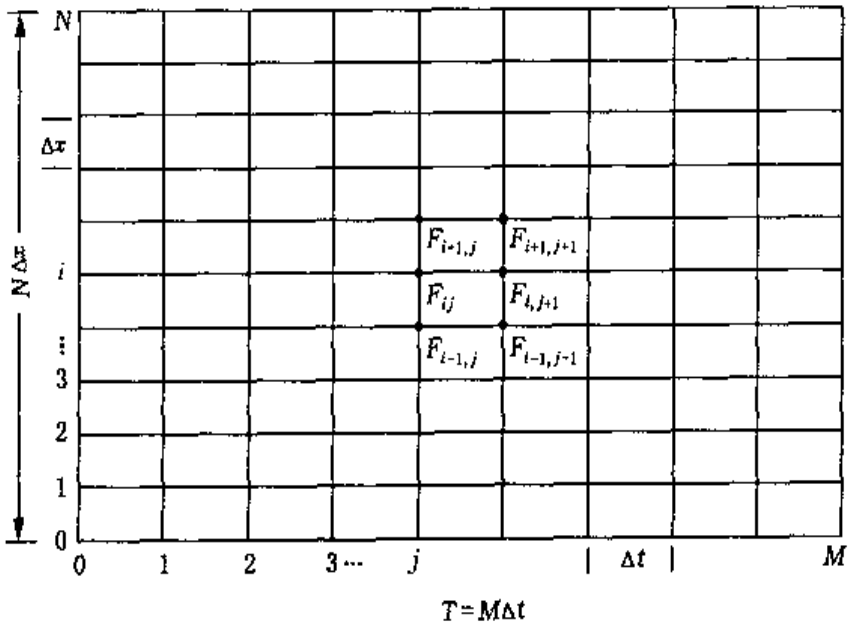


图 12.1 有限差分栅格

科朗克—尼科尔森方法的基础是 f 的导数的下述近似，给定 F：

$$f_t(x_i,t_j)\sim\frac{F_{i,j+1}-f_{ij}}{\Delta t}$$

$$f_x(x_i,t_j)\sim\frac{F_{i+1,j+1}-F_{i-1,j+1}+F_{i+1,j}-F_{i-1,j}}{4\Delta x}$$

$$f_{xx}(x_i,t_j)\sim\frac{F_{i+1,j+1}-2F_{i,j+1}+F_{i-1,j+1}+F_{i+1,j}-2F_{ij}+F_{i-1,j}}{2(\Delta x)^2}$$

读者将看到，科朗克--尼科尔森方法实际上是取$(F_{i,j+1}+F_{i,j})/2$为$f(x_i,t_j)$的近似。相应地，我们将这些f的导数的近似代入(12.14)式中，这样对$1<i<N$，在(x_i,t_j)处，我们得到表达式：

$$a_{ij}F_{i-1,j}+b_{ij}F_{ij}+c_{ij}F_{i+1,j}=-a_{ij}F_{i-1,j+1}+\beta_{ij}F_{i,j+1}-c_{ij}F_{i+1,j+1}+e_{ij} \tag{12.16}$$

其中

$$a_{ij}=-\frac{\mu(x_i,t_j)}{4\Delta x}+\frac{\sigma(x_i,t_j)^2}{4(\Delta x)^2}$$

$$b_{ij}=-\frac{r(x_i,t_j)}{2}-\frac{1}{\Delta t}-\frac{\sigma(x_i,t_j)^2}{2(\Delta x)^2}$$

$$c_{ij}=\frac{\mu(x_i,t_j)}{4\Delta x}+\frac{\sigma(x_i,t_j)^2}{4(\Delta x)^2}$$

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{\Delta t}+\frac{\sigma(x_i,t_j)^2}{2(\Delta x)^2}+\frac{r(x_i,t_j)}{2}$$

$$e_{ij}=-h(x_i,t_j)$$

当然，(12.16)式在$i=1$或$i=N$时没有定义。这时，我们用下述形式的方程来代替(12.16)式：

$$b_{1j}F_{1j}+c_{1j}F_{2j}=d_{1j};\quad a_{Nj}F_{N-1,j}+b_{Nj}F_{Nj}=d_{Nj} \tag{12.17}$$

对于合适的系数$b_{1j},c_{1j},d_{1j},a_{Nj},b_{Nj}$和$d_{Nj}$成立，这些系数可能与需要处理的具体问题有关。

我们可以结合(12.16)式和(12.17)式而得到F的列$F_1,F_2,\cdots,F_M$的向后差分方程，即：

$$A_jF_j=d_j \tag{12.18}$$

上式的期终边界条件为：

$$F_{iM}=g(x_i,T),\quad i\in\{1,\cdots,N\} \tag{12.19}$$

其中A_j为由下式给出的三角形矩阵：

$$A_j=\begin{bmatrix} b_{1j} & c_{1j} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2j} & b_{2j} & c_{2j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{3j} & b_{3j} & c_{3j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{4j} & b_{4j} & c_{4j} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{N-1,j} & b_{N-1,j} & c_{N-1,j} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{Nj} & b_{Nj} \end{bmatrix} \tag{12.20}$$

以及$d_j\in\mathbb{R}^N$为某个向量，其第i个元素为：

$$d_{ij}=-a_{ij}F_{i-1,j-1}+\beta_{ij}F_{i,j-1}-c_{ij}F_{i+1,j+1}+e_{ij} \tag{12.21}$$

能够解三角对角线形式(12.18)式的线性方程的标准"阶梯"算法可以在公开出售的程序软件中找到(程序编码将在附录J中提供)。这些算法通常利用 A_j 的特殊结构,并且回避了其逆矩阵的困难计算问题。

综上所述,基本的有限差分算法(12.18)式～(12.19)式可以从根据期终边界条件(12.19)式固定 F_M 开始,然后由(12.21)式从 F_M 中计算 d_{M-1},接着通过解三角对角线方程(12.18)式(令 $j=M-1$)来计算 F_{M-1}。随后,从 F_{M-1} 中计算 d_{M-2},再由(12.18)式求解 F_{M-2},如此继续,直到解出 F_1 为止。如果函数 μ、σ 和 r 不依赖于时间参数,那么,矩阵 A_j 不依赖于 j,并且可以在向后差分方程传衍之前就一次性地计算出来。由(12.17)式给出的边界方程通常要求特殊处理。

注释中的参考资料也给出了处理一个以上状态变量的有限差分方法。计算量随状态变量的增加而呈指数增长,这与蒙特卡洛(Monte Carlo)方法中计算量的线性增长相反。有限差分方法的实现也会更加困难,其收敛性也会是更加微妙的问题。但是,对于一个或两个状态变量的问题,为了获得类似的精确性,有限差分方法所需的总计算量通常比蒙特卡洛方法所要求的更少。

12.9 期限结构举例

考虑由下述随机差分方程给出的短期利率 r 模型:

$$\mathrm{d}r_t=\mu(r_t,t)\mathrm{d}t+\sigma(r_t,t)\mathrm{d}\hat{B}_t,\quad r_0\geqslant 0 \tag{12.22}$$

其中 $\hat{B}$ 是等价鞅测度下的标准布朗运动,以及 μ 和 σ 满足规则性条件。

现在来考虑如何求解期限结构的问题。对给定时间 T 和任意 $t<T$,我们想要求解在时间 T 支付价值为一个计量单位的证券在当期时间为 t,以及当期短期利率为 x 时的价格 $f(x,t)$。

由于短期利率本身是状态变量 x,而且我们不考虑期中利息,因此,PDE(12.14)式变成:

$$\mathscr{D}f(x,t)-xf(x,t)=0 \tag{12.23}$$

上式的边界条件为:

$$f(x,T)=1,\quad x\in\mathbb{R} \tag{12.24}$$

如果函数 μ 和 σ 都不依赖于 t,那么,我们也可以把 $f(x,t)$ 看成是到期时间为 $T-t$ 的单位债券在时间0时的价格,因此,(12.23)式～(12.24)式概括了直至到期时间 T 的整个期限结构。

直接实现有限差分算法应是相当容易的，尽管实际考虑经常建议状态变量的改变。例如，假设 μ 和 σ 是连续的，对所有的 t，我们有 $\mu(0,t)\geqslant 0$ 和 $\sigma(0,t)=0$。那么，(12.22)式的解是非负的，就像第 7 章的注释所指出的那样。在那种情况下，我们可以把原始的状态空间处理成$[0,\infty)$，并考虑改变状态变量。注释中的文献资料所应用的一种方法是由函数 Y 给出：$[0,\infty)\to(0,1]$，并且对 $\gamma>0$，

$$Y(x)=\frac{1}{1+\gamma x},\quad x\in[0,\infty) \tag{12.25}$$

换句话说，短期利率 x 对应于新状态变量 $y=Y(x)$。

通过把 $Y(+\infty)$处理成 0，我们可以把 Y 的区域拓展成$[0,1]$。在新的状态变量中，具有固定网孔尺寸 Δy 的栅格：

$$\{(y_i,t_j)\,:\,i\in\{1,\cdots,N\},j\in\{1,\cdots,M\}\}\subset[0,1]\times[0,T]$$

对应的解在旧状态变量(短期利率)x 上的网孔尺寸是可变的，并且在较低利率水平处的网点集中度更大，具体密集方式与系数 γ 有关。这或许是改变状态变量所希望的特征。我们取 $y_1=0$ 和 $y_N=1$。

由(12.25)式，我们可以把短期利率写成新状态变量的函数，即：

$$X(y)=\frac{1-y}{\gamma y},\quad y\in(0,1]$$

如果我们令对所有的 y 和 t，$\hat{f}(y,t)=f[X(y),t]$，那么，PDE(12.23)式～(12.24)式可以写成：

$$\hat{\mathcal{D}}\hat{f}(y,t)-X(y)\hat{f}(y,t)=0,\quad \hat{f}(y,T)=1 \tag{12.26}$$

其中：

$$\hat{\mathcal{D}}\hat{f}(y,t)=\hat{f}_y(y,t)\hat{\mu}(y,t)+\hat{f}_t(y,t)+\frac{1}{2}\hat{\sigma}(y,t)^2\hat{f}_{yy}(y,t)$$

在上式中，运用伊藤公式：

$$\hat{\mu}(y,t)=Y'[X(y)]\mu[X(y,t)]+\frac{1}{2}Y''[X(y)]\sigma[X(y),t]^2$$

$$\hat{\sigma}(y,t)=Y'[X(y)]\sigma[X(y),t]$$

价值方程(12.26)式也适用于其他表现良好的、由 C^2 函数 Y(其反函数 X 亦存在)给出的变量改变。注释中引用的参考资料提出了一种特别的变量改变，其具有特征 $\hat{\sigma}\equiv 1$，这会带来计算上的一些便利。

现在可以很容易地由对应于(12.26)式的科朗克—尼科尔森解(12.18)式～(12.19)式来实现债券价格 $f[X(y_i),t_i]$的近似解 F_{ij}。为了与利率为无穷大时的债券价格为 0 相对应，我们从头至尾均取 $F_{1j}=0$。这决定着当 $i=1$ 时的边界方程(12.17)。对于 $i=N$，我们运用事实 $\sigma(0,t)=0$，并且在 $y=1(x=0)$处令(12.26)取值，这样便有：

$$\hat{f}_y(1,t)\hat{\mu}(1,t)+\hat{f}_t(1,t)=0$$

再用下述非对称近似代替 $\hat{f}_y(y_N,t_j)$ 通常的科朗克—尼科尔森近似：

$$\hat{f}_y(y_N,t_j)\sim\frac{F_{N,j}-F_{N-1,j}}{\Delta y}$$

边界条件(12.17)式则由下述系数来描述：$b_{1j}=1, c_{1j}=0, d_{1j}=0$ 和

$$a_{Nj}=\frac{\hat{\mu}(1)}{\Delta y};\quad b_{Nj}=-\frac{1}{\Delta t}+\frac{\hat{\mu}(1)}{\Delta y};\quad d_{Nj}=-\frac{1}{\Delta t}F_{N,j-1} \tag{12.27}$$

对于付息债券(coupon bond)或任意其他在期间$[0,T]$承诺一次性支付的证券，有限差分方程(12.18)式应改写为：

$$F_j=F_{j+}+D_j;\quad A_jF_{j+}=d_j \tag{12.18'}$$

其中 D_j 是 $\mathbb{R}^N$ 中的向量，如果状态是在 $x_i-\Delta x/2$ 和 $x_i+\Delta x/2$ 之间，那么，其中第 i 个元素即为在时间 t_j 支付的总量股息，这样我们就可以把 F_{j+} 看成是息后近似，而把 F_j 看成是含息近似。如果总量支付并不按栅格点所建议的方式发生，那么，我们就能以明显的方式对其进行线性近似。

表 12.1　　科朗克—尼科尔森算法的数值误差(以百万分之一计)

状态点数	时间点数		
	40	80	160
40	176	186	188
80	35	44	46
120	8	18	20
160	−1	9	11
200	−5	4	6
240	−7	2	4

说明：需要确定价格的证券是票息为7%(面值的3.5%，每半年支付一次利息)的10年期无违约风险债券。计算方法是课文中所描述的科朗克—尼科尔森算法。CIR短期利率模型中的系数被设为 $A=0.5$, $\bar{x}=0.071\,9$, $C=0.166\,4$。被选定的初始短期利率使得该债券的价格按面值定价。选定的参数则使得，从即时意义上进行测度时，收益的初始波动性为15%。表格中所显示的数据是债券价格数值估计和理论价格之差与理论价值的比率，单位是百万分之一。

对于CIR例子：

$$\mu(x,t)=A(\bar{x}-x);\quad \sigma(x,t)=C\sqrt{x} \tag{12.28}$$

其中 A、$\bar{x}$ 和 C 均为正的常数，表12.1说明的是零息债券价格的这种有限差分方案的精确性。该表说明准确解(这种情形下的明晰解已在第7章中给出)和近似解之间的差别。这种近似误差，作为准确解的分数(百万分之一)可以在表12.1中找到。这一解的计算机代码可以在附录J中找到。

12.10 可提前执行期权的有限差分算法

假设价格有待确定的证券具有可以提前执行的特性，从而使得在任意时间 t，如果状态是 x，那么，该证券执行并获得收入 $g(x,t)$。例如，如果状态 x 表示一种原始证券的价格，所研究的衍生证券是执行价格为 K 的美式期权，那么，对所有 x 和 t，$g(x,t)=(K-x)^+$，正如第 8.9 节和第 8.5 节中所讨论的那样。由于具有提前执行的特性，我们很自然地可以猜测，上一节中给出的有限差分算法可以通过下式来代替向后差分步骤(12.18)式：

$$F_{ij}=\max[\hat{F}_{ij},g(x_i,t_j)] \quad i\in\{1,\cdots,N\} \tag{12.29}$$

其中 $\hat{F}_j$ 是可以解 $A_j\hat{F}_j=d_j$ 的 $\mathbb{R}^N$ 维向量。换句话说，在每一步中，美式证券的价值都是取其执行后的价值和未执行的价值两者中的较大者，这与第 3.7 节中的分析是一致的。基于这种计算方法的债券期权价格计算机代码将在附录 J 中给出。

一个微妙而有趣的问题是，使用(12.29)式的计算方法来概括美式证券真实无套利价值的相关连续时间最佳停止问题(参见第 8.9 节)的解的收敛性和收敛率。本章的注释中给出了探讨这一收敛问题的部分参考资料。

12.11 状态价格的数值解

回到证券定价的 PDE(12.14)式～(12.15)式的情形，假设有许多不同的证券需要定价，这些证券均基于同样的 r、μ 和 σ 函数。只是 h 和 g 函数因证券的不同而不同。在这种情况下，给定由网孔尺寸 Δx 和 Δt 定义的栅格$\{(x_i,t_j)\}$，有必要找到在时间 t，当事件的状态介于 $x_i+\Delta x/2$ 和 $x_i-\Delta x/2$ 之间时，应允许支付 $1/\Delta x$ 个计量单位的证券在时间 0 时的市场价值的近似值 Ψ_{ij}。这样，我们就自然地用下式来近似该证券在时间 0 的市场价值：

$$V(h,g)\equiv\Delta t\Delta x\sum_{j=1}^{M}[\sum_{i=1}^{N}\Psi_{ij}h(x_i,t_j)]+\Delta x\sum_{i=1}^{N}\Psi_{iM}g(x_i,T) \tag{12.30}$$

其中 h 是代表利息率的收入函数，g 表示期终价值的收入函数。

我们将阐明如何修改第 12.8 节中用来计算 F 的有限差分法，以便用来计算由 Ψ 描述的近似状态价格。其基础是附录 E 中重温过的 PDE(12.14)式的基本解。在一定的技术条件下，对 $\mathbb{R}$ 中的每一种初始状态 x^*，存在具有下述(几乎等价)性质的函数 $\psi\in C^{2,1}(\mathbb{R}\times(0,T])$：

(a)ψ 满足：

$$\mathscr{D}^*\psi(x,t)-r(x,t)\psi(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T] \tag{12.31}$$

其中

$$\mathscr{D}^*\psi(x,t)=-\psi_t(x,t)-\frac{\partial}{\partial x}[\psi(x,t)\mu(x,t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma(x,t)^2\psi(x,t)]$$

其边界条件要求 $\psi(\cdot,t)$ 是某测度的密度，当 $t\to 0$ 时，该测度收敛于某概率测度 υ，并且 $\upsilon(\{x^*\})=1$。

(b)对于满足一定技术条件的任意 (g,h)，PDE(12.14)式～(12.15)式的解 f 满足：

$$f(x^*,0)=\int_0^T\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,t)h(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,T)g(x,T)\mathrm{d}x \tag{12.32}$$

这是(12.30)式所给出的和的积分对应项。

PDE(12.31)式有时被称为福克—普朗克(Fokker-Planck)方程，或者称为向前柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)方程，以便区分于向后柯尔莫哥洛夫方程(12.14)。对于 $r\equiv 0$ 的情况，我们可以把 $\psi(\cdot,t)$ 处理成 X_t 的概率密度，而 X 是基础随机微分方程 $\mathrm{d}X_t=\mu(X_t,t)\mathrm{d}t+\sigma(X_t,t)\mathrm{d}B_t$ 的解，并且 $X_0=x^*$。就像注释中的参考资料所指出的那样，关于这一点我们还可以说很多。上面所给出的(12.31)式的初始边界条件自然地对应于 ψ 的这种解释。考克斯—英格索—罗斯模型(12.28)式中 ψ 的明晰解已经在第 7.7 节中给出。

现在，给定(12.32)式以及(a)和(b)之间的等价性，为了解出 $f(x^*,0)$，我们想用 PDE(12.31)式的有限差分解 Ψ 来近似 ψ。可以应用同样的科朗克—尼科尔森法来生成 Ψ 的列 $\Psi_1,\Psi_2,\cdots,\Psi_M$ 的向前差分方程：

$$A_j^*\Psi_j=d_j^* \tag{12.33}$$

对于给定的初始状态 $x_k=x^*$，其边界条件为：

$$\Psi_{k1}=\frac{1}{\Delta x};\quad \Psi_{i1}=0,\quad i\neq k \tag{12.34}$$

其中三角矩阵 A_j^* 和向量 d_j^* 可以运用依据 Ψ 的 ψ 导数的科朗克—尼科尔森近似来计算每一个 j 的对应值，方法与求解向后差分方程一样。特别地，如果 σ 对 x 两次连续可微，而且 μ 对 x 连续可微，那么，我们有：

$$d_{ij}^*=-a_{ij}^*\Psi_{i-1,j-1}+\beta_{ij}^*\Psi_{i,j-1}-c_{ij}^*\Psi_{i+1,j-1} \tag{12.35}$$

和

$$A_j^*=\begin{bmatrix} b_{1j}^* & c_{1j}^* & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{2j}^* & b_{2j}^* & c_{2j}^* & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{3j}^* & b_{3j}^* & c_{3j}^* & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{4j}^* & b_{4j}^* & c_{4j}^* & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{N-1,j}^* & b_{N-1,j}^* & c_{N-1,j}^*\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{Nj}^* & b_{Nj}^* \end{bmatrix} \tag{12.36}$$

其中

$$a_{ij}^{*}=\frac{\mu(x_i,t_j)-2\sigma(x_i,t_j)\sigma_x(x_i,t_j)}{4\Delta x}+\frac{\sigma(x_i,t_j)^2}{4(\Delta x)^2}$$

$$b_{ij}^{*}=-\frac{1}{\Delta t}-\frac{\sigma(x_i,t_j)^2}{2(\Delta x)^2}-\frac{r(x_i,t_j)+\mu_x(x_i,t_j)-\sigma_x(x_i,t_j)^2-\sigma_{xx}(x_i,t_j)\sigma(x_i,t_j)}{2}$$

$$c_{ij}^{*}=\frac{2\sigma(x_i,t_j)\sigma_x(x_i,t_j)-\mu(x_i,t_j)}{4\Delta x}+\frac{\sigma(x_i,t_j)^2}{4(\Delta x)^2}$$

$$\beta_{ij}^{*}=\frac{r(x_i,t_j)+\mu_x(x_i,t_j)-\sigma_{xx}(x_i,t_j)\sigma(x_i,t_j)-\sigma_x(x_i,t_j)^2}{2}-\frac{1}{\Delta t}+\frac{\sigma(x_i,t_j)^2}{2(\Delta x)^2}$$

对于 $i=1$ 和 $i=N$ 的两种情况，需要我们再次给予特别的关注。

给定依据 Ψ_{j-1} 给出的 d_j^{*}，我们从 Ψ_1 的初始条件(12.34)式开始，然后把解向前推移，通过(12.33)式计算出每一步的 Ψ_j(在实际应用中，解的稳定性可以更为容易地通过不“集中”在由(12.34)式给出的初始条件上的初始条件获取，比如说在时间 Δt 以后的初始条件——由参数建议的低方差高斯密度。看来，在任何情况下均有“技巧”来获得合理的近似解)。

给定 Ψ，具有利息率 h 和期终价值 g 的任意证券的近似值均由(12.30)式给出。如果只有一个证券需要定价，那么，与向后法相比，(12.30)式还涉及一部分额外的计算。如果有多个证券需要定价，那么，“向前法”可以明显地带来计算量的减少。

机敏的读者会注意到，如果我们在(12.30)式和(12.34)式中分别省去规模因子 Δx 和 $1/\Delta x$，那么，Ψ 就会是 $\Delta x\psi$ 的近似，而不再是 ψ 的似近。

12.12 定价半群的数值解

在三角系统(12.33)式～(12.35)式中，对下述三角矩阵我们有 $d_j^{*}=C_j^{*}\Psi_{j-1}$：

$$C_j^{*}=\begin{bmatrix}
\beta_{1j}^{*} & -c_{1j}^{*} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
-a_{2j}^{*} & \beta_{2j}^{*} & -c_{2j}^{*} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & -a_{3j}^{*} & \beta_{3j}^{*} & -c_{3j}^{*} & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & -a_{4j}^{*} & \beta_{4j}^{*} & -c_{4j}^{*} & \cdots & 0\\
\vdots & & & & \ddots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{N-1,j}^{*} & \beta_{N-1,j}^{*} & -c_{N-1,j}^{*}\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -a_{Nj}^{*} & \beta_{Nj}^{*}
\end{bmatrix}$$

因此，(12.33)式可以重新表述成下述迭代形式：

$$\Psi_j=\prod_j\Psi_{j-1} \tag{12.37}$$

其中 $\Pi_j=(A_j^*)^{-1}C_j^*$。因此，对任意 j 和 $k\geqslant j$，有：

$$\Psi_k=\Pi_{jk}\Psi_j \tag{12.38}$$

其中

$$\Pi_{jk}=\Pi_{j+1}\Pi_{j+2}\cdots\Pi_k \tag{12.39}$$

上式中 Π_{jj} 表示同等矩阵。$N\times N$ 矩阵的集合 $\Pi=\{\Pi_{jk}:1\leqslant j\leqslant k\leqslant M\}$ 是一个半群，因为它具有下述特征：只要 $j\leqslant k\leqslant m$，我们有 $\Pi_{jm}=\Pi_{jk}\Pi_{km}$。我们现在来描述该半群 Π 的某些有用特征。

首先，对栅格中的任意初始状态 x_k，相关的近似状态价格矩阵 Ψ 由下式给出：

$$\Psi_j=\Pi_{1j}\Psi_1 \tag{12.40}$$

其中 Ψ_1 是由(12.34)式给出。这意味着，给定半群 Π，并不需要反复借助三角方程(12.37)的解就可以得到与任意给定初始状态相对应的状态价格。

其次，给定任意收入函数 h 和 g，近似(12.14)式～(12.15)式的解 f 的 $N\times M$ 矩阵 F^* 可以很容易地概括如下：对任意 j 和 $k\geqslant j$，我们有：

$$F_j^*=\Pi_{jk}F_k^*+\sum_{m=j+1}^{k}\Pi_{jm}H_m \tag{12.41}$$

其中 H_j 是 $\mathbb{R}^N$ 维向量，其第 i 个元素为 $h(x_i,t_j)\Delta t$。而且，(12.41)式适用于当 $k=M$ 和边界条件为 $F_M^*=g(x_i,T)$ 的情形。

尽管求解半群 Π 可能需要大量的计算，但也会具有明显的回报。对 μ、σ 和 r 不依赖于 t 的情形，矩阵 A_j^* 和 C_j^* 不依赖于 j，所以只有一个矩阵 $\overline{\Pi}$ 需要计算，即对所有的 j，$\Pi_j=\overline{\Pi}$。

(12.41)式和马尔可夫链定价方程(3.17)之间的紧密类似并不是偶然的。我们确实可以用在时期 $j\in\{1,\cdots,M\}$ 具有由下式给出的过渡矩阵 $q^{(j)}$ 的 N 状态马尔可夫链的解来近似 SDE $dX_t=\mu(X_t,t)dt+\sigma(X_t,t)dB_t$ 的解 X：

$$q_{ik}^{(1)}=[1+r(x_i,t_j)\Delta t]\Pi_{ik} \tag{12.42}$$

注释中的参考资料讨论了上述近似的意义，并且详细地阐述了连续和离散定价在这方面的联系。

与离散时间情形的类似性还可以推广到美式证券的定价。运用半群法，我们可以用下述向后方程来代替第 12.10 节中描述过的美式证券的向后差分方程(12.29)：

$$F_j^*=\max[\Pi_{j-1}(F_{j+1}+H_{j+1}),G_j] \tag{12.43}$$

其中最大值符号表示应在每个元素上取最大值，G_j 是 $\mathbb{R}^N$ 维的向量，其第 i 个元素为 $g(x_i,t_j)$。方程(3.21)给出了这种美式证券定价算法的准确离散时间版本。

12.13 匹配初始期限结构

在期限结构模型(12.22)式的环境下，有许多实际应用问题，其初始期限结构由市场

数据以$\mathbb{R}^N$维向量p的形式给出，其中p_j表示于时间t_j到期的单位纯贴现债券在时间0时的价格(实际中，通常可以运用第7章注释中提到的方法从息票债券的价格中得到p)。由于模型很少与现实完全一致，决定短期利率风险中性行为的μ和σ函数一般不会产生与市场数据p相一致的期限结构。但我们假设，对任意t，函数$\mu(\cdot,t)$和$\sigma(\cdot,t)$依赖于自由参数$\lambda(t)$。我们可以设想选择函数λ是为了使期限结构的解与由p给出的期限结构匹配起来。例如，我们可以用$\lambda(t)$来代替常数项$\bar{x}$，从而推广CIR模型(12.28)，然后再选择$\lambda(t_1),\lambda(t_2),\cdots,\lambda(t_M)$，并且使得第12.9节中给出的期限结构解与$p$是一致的。

我们可以设想这种期限结构匹配过程有一系列的不同数值法。注释中的参考资料所推荐的一种方法是基于状态价格的数值解Ψ。运用$\sum_{i=1}^{N}\Psi_i$近似p_j的事实，λ的这一推荐算法可以由下述步骤给出：

(a)令$j=2$。

(b)搜索$\lambda(t_j)$，从而使得给定Ψ_{j-1}，我们有：

$$\hat{p}_j[\lambda(t_j),\Psi_{j-1}]=p_j \tag{12.44}$$

其中$\hat{p}_j[\lambda(t_j),\Psi_{j-1}]=\sum_{i=1}^{N}\Psi_j$说明(12.33)式的解$\Psi_j$依赖于由(12.35)式和(12.36)式给出的$\Psi_{j-1}$和$\lambda(t_j)$。这种一维搜索可以用牛顿—拉夫森(Newton-Raphson)迭代法进行。

(c)令j增加1，然后，如果$j\leqslant M$，那么，就回到步骤(b)；否则就停止。

为了使步骤(12.44)式中的$\lambda(t_j)$搜索成功，以及解有惟一定义，模型的构建应使得$\hat{p}_j(\cdot,\Psi_{j-1})$是域$(0,1)$内的严格单调连续函数。对于上述给出的CIR模型[在该模型中我们用$\lambda(t)$取代$\bar{x}$]，此点为真。

我们还可以让更多的参数与诸如期权的衍生证券价格的市场数据相匹配。这种做法的思想是用市场来更好地“校准”模型，以使得我们可以从原则上得到更准确的衍生证券定价。例如，我们可以令λ是取值为$\mathbb{R}^2$型的函数，从而有两个自由参数，并使它们与债券价格的初始期限结构和隐含在债券期权价格中的初始“波动性结构”相匹配起来。注释中所引用的参考资料就是采用这种方法。

当然，随着时间的流逝，“匹配的”模型会变得不准确，意味着自由参数向量λ实际上已经不恰当。在典型的实际情况中，需要选取一套新的自由参数，然后再重新定价。从理论上讲，这种反复选取参数的过程是不一致的(而且据作者所知，也不需要应用复杂的计量经济知识)，但从某种程度上说又是不可避免的。由“任务的标题”可知，关键是要准确地描述期限结构模型，并使其具有数学和计量经济学上的可行性和时间上的稳定性。

习 题

12.1 运用附录C中的林德伯格—费勒(Lindeberg-Feller)中心极限定理，证明命题12.1。

12.2 证明：正如第12.2节所声称的那样，每单位时间的风险中性化的均值 M_n 和方差 V_n 分别收敛于 $r-\sigma^2/2$ 和 σ^2。

12.3 证明第12.3节中所构造的"二项"看涨期权收益序列 $\{[xe^{R(n)}-K]^+\}$ 为均匀可积。提示：运用连续映射定理的逆定律。

12.4 说明在定理12.1的证明过程中，如何运用林德伯格—费勒中心极限定理以得到所需的正态分布极限情形。

12.5 验证由(12.14)式得出的科朗克—尼科尔森方程(12.16)，以及科朗克—尼科尔森导数近似法。

12.6 (布莱克—德曼—托尔期限结构模型的二项近似)习题7.1中所给出的布莱克—德曼—托尔模型连续时间版本的短期利率过程 r 由下式给出：

$$r_t=U(t)\exp[\beta(t)\hat{B}(t)]$$

其中 $\hat{B}$ 为某一等价鞅测度 Q 下的标准布朗运动，$U:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{++}$ 和 $\beta:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{++}$ 为连续可微函数。习题3.11中给出的布莱克—德曼—托尔模型离散时间版本的短期利率过程 r 由 $r_t^d=a_t\exp(b_tX_t)$ 给出，其中对任意时间 $t\in\{0,1,\cdots\}$，a_t 和 b_t 为严格正常数，X_t 是具有下述特征的冲击过程：对所有的 t，

$$Q(X_{t+1}-X_t=1\mid X_0,\cdots,X_t)=Q(X_{t+1}-X_t=0\mid X_0,\cdots,X_t)=\frac{1}{2}$$

本习题的要求是：对每一个 t，构造离散时间布莱克—德曼—托尔模型的系数序列 $\{a_t^n\}$ 和 $\{b_t^n\}$，使其具有下述特征：对任意 $t\in\{1,2,\cdots\}$，

$$r_t^n\equiv a_t^n\exp(b_t^nX_{tn})\Rightarrow r_t$$

或者说每个日历时间单位为 n 期的离散时间模型，从分布上收敛于连续时间模型。提示：运用连续映射定理，以及根据 $z\mapsto U(t)\exp(\beta(t)z)$ 定义从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 连续函数的事实。我们可以写出：

$$r_t^n=U(t)\exp\left[\beta_t\left(X_{tn}b_t^n-\log\left[\frac{a_t^n}{U(t)}\right]\right)\right]$$

证明：综上所述，我们只需适当地选择 $\{a_t^n\}$ 和 $\{b_t^n\}$，从而使得：

$$X_{tn}b_t^n-\log\left[\frac{a_t^n}{U(t)}\right]\Rightarrow Z$$

其中 Z 的分布是均值为零、方差为 t 的正态分布。据此运用中心极限定理来设计 $\{a_t^n\}$ 和 $\{b_t^n\}$。

注 释

(第12.1节) 概率理论的标准参考资料包括钟(Chung, 1974)，周和泰切尔(Chow and Teicher, 1978)，别林斯雷(Billingsley, 1986)，以及达瑞特(Durrett, 1991)。所有上述资料中均含有大数定律和中心极限定理。

(第12.2节～第12.3节)二项期权定价模型向布莱克—斯科尔斯模型的收敛性应当归功于考克斯、罗斯和鲁宾斯坦因(Cox, Ross, and Rubinstein, 1979)。这种方法的多种推广可以在下述文献中找到：阿明(Amin, 1991, 1993b)，贝兹马斯、克格安和罗(Bertsimas, Kogan, and Lo, 1998)，克鲁罗和卡夫

希尔(Clewlow and Carverhill,1995)，库特兰德、库博和威林格尔(Cutland, Kopp, and Willinger,1991, 1993a)，迪安尼和迪安尼(Diener and Diener,1999)，达菲(Duffie,1988c)，达菲和普罗特(Duffie and Protter,1988)，贺(He,1990,1991)，赫斯顿和周(Heston and Zhou, 1997)，胡巴拉克和施卡切梅尔(Hubalek and Schachermayer,1998)，拉姆伯登和佩吉(Lamberton and Pagès,1990)，拉姆伯登(Lamberton,1997)，莱森、普莱金特和斯卡尔立特(Lesne, Prigent, and Scaillet,2000)，李(Lee,1991)，麦当、米尔尼和夏弗林(Madan, Milne, and Shefrin,1989)，奈尔森和拉姆茨沃米(Nelson and Ramaswamy, 1989)，普莱金特(Prigent,1995)，罗杰斯和史丹普尔登 (Rogers and Stapleton, 1998)，威林格尔和塔克库(Willinger and Tacqu,1991)，伊伯莱恩(Eberlein,1991)，以及许多其他的论文。

关于其他数值过程，请参见格博和萧(Gerber and Shiu,1994)，以及列维、阿维兰尼达和帕拉斯(Levy, Avellaneda, and Parás,1994)。布洛迪、格拉斯曼和寇(Broadie, Glasserman, and Kou,1997, 1999)探讨了依路径而定的期权和障碍期权的区分误差。库瑞安(Curran,1996)，以及格拉斯曼、希德尔伯格和夏哈布迪恩(Glasserman, Heidelberger, and Shahabuddin,1999)讨论了依路径而定的期权定价的重要性取样问题。弗奈和拉斯瑞(Fournié and Lasry, 1996)，以及弗奈、拉斯瑞和托兹(Fournié, Lasry, and Touzi, 1996)也探讨了定价应用的重要性取样问题。关于亚式期权的近似方法研究，请参见查拉沙尼、佳和范瑞库迪(Chalasani, Jha, and Varikooty,1998)，傅、麦当和王(Fu, Madan, and Wang, 1999)，以及茨凡、弗西斯和凡扎尔(Zvan, Forsyth, and Vetzal,1998)。

(第 12.4 节～第 12.5 节)这一节基于塔雷和图巴洛(Talay and Tubaro,1990)。米尔斯坦因(Milshtein,1974,1978)引进了诸如(12.8)式的二阶离散方案。巴利和塔雷(Bally and Talay,1996)，以及塔雷(Talay,1984,1986,1990)给出了更先进的区分 $\mathbb{R}^n$ 维随机微分方程的二阶方案。这方面的研究成果也可参见贝纳德、塔雷和图巴洛(Bernard, Talay, and Tubaro,1994)，库舒卡(Kusuoka,1999a)，牛顿(Newton,1990)，以及托洛克(Török, 1993)。关于向后的 SDE 的区分，请参见切梵斯(Chevance, 1995, 1996)，以及道格拉斯、马和普罗特(Douglas, Ma, and Protter, 1996)。

(第 12.6 节)这一节基于达菲和格里恩(Duffie and Glynn,1995)，在该文献中，应该还可以找到更多的资料。本书的第一版采用的是另一种方法来处理模拟次数和时间步数之间的权衡问题，其基础是大偏差定理，相关的描述可以在达瑞特(Durrett,1991)中找到。

(第 12.7 节)布伊尔、布洛迪和格拉斯曼(Boyle, Broadie, and Glasserman,1997)综合考察了运用蒙特卡洛模拟法进行定价的理论和模型。第 12.7 节中看涨期权收入函数的光滑近似 g_ε 在达菲(Duffie, 1988c)中出现过，并且与另一作者史蒂芬·斯马尔(Stephen Smale)有关。有关衍生资产价格和对冲应用的蒙特卡洛估计的多种应用，可以在下述文献中找到：安德逊(Andersen,1996)，阿维兰尼达、布弗、弗瑞德曼、格莱恩德查姆、克鲁克和纽曼(Avellaneda, Buff, Friedman, Grandchamp, Kruk, and Newman,1999)，巴拉库德(Barraquand,1993)，布伊尔(Boyle,1977,1988,1990)，布伊尔、伊凡和基伯斯(Boyle, Evnine, and Gibbs,1989)，格拉斯曼和赵(Glasserman and Zhao,1999)，弗奈(Fournié,1993)，琼斯和杰克伯斯(Jones and Jacobs,1986)，以及肖恩梅克和希明克(Schoenmakers and Heemink,1996)。关于对冲应用系数的模拟，或者“deltas”和其他衍生证券，请参见克鲁罗和卡夫希尔(Clewlow and Carverhill,1992)，以及布洛迪和格拉斯曼(Broadie and Glasserman,1996)。关于“准蒙特卡洛(quasi-Monte Carlo)”模拟法在财经领域中的应用，请参见卡夫里希和摩洛克夫(Caflisch and Morokoff,1995, 1996)，卡夫里希、摩洛克夫和欧文(Caflisch, Morokoff, and Owen,1997)，基达姆巴莱和菲格雷威斯基

(Chidambaran and Figlewski,1995),乔埃、布伊尔和塔恩(Joy, Boyle, and Tan,1996),摩洛克夫和卡夫里希(Morokoff and Caflisch,1993,1994,1995),以及卡夫里希(Moskowitz and Caflisch,1994)。

欧文(Owen,1996,1997),以及欧文和塔凡拉(Owen and Tavella,1996)将攀缘网方法应用于定价和风险计算。

(第12.8节)塔凡拉和雷恩达尔(Tavella and Randall,2000)重温了运用有限差分法进行衍生证券定价的解。米歇尔和格瑞菲斯(Mitchell and Griffiths,1980),史密斯(Smith,1985),以及司基克沃德(Strikwerda,1989)是PDE有限差分解法的基础著作。诸如(12.18)式的三角系统方程的解的计算机码,可在普莱斯、弗拉尼瑞、特科尔斯基和范特林(Press, Flannery, Teukolsky, and Vetterling,1993)中找到。更先进的有限差分法举例可在罗森和莫里斯(Lawson and Morris,1978)中找到。施瓦茨(Schwartz,1977)引入了将有限差分方法应用于金融资产定价求解的方法。安德里森(Andreasen,1998)把有限差分法应用于回望期权。关于有限差分法在金融应用中的更多例子,请参见克鲁罗(Clewlow,1990),以及德罗斯金、克尼泽曼、塔玛奇恩科和考斯坦克(Druskin, Knizhnerman, Tamarchenko, and Kostek, 1997)。

(第12.9节)本节中有关期限结构的举例基于科特登(Courtadon,1982)和史丹登(Stanton,1995b)。杰姆斯迪安(Jamshidian,1991c)给出了另一种变量的变化情况,即让扩散为常数。克鲁罗(Clewlow,1990)重温和总结了金融方面的资料文献。科朗克—尼科尔森近似法也称为隐含法(implicit method)。哈尔和怀特(Hull and White,1990b)阐明了较简单的隐含法的区域可以被如何延伸。哈尔和怀特(Hull and White,1993)重温和评价了较简单的隐含法和显示法。迪威尼和威尔姆特(Dewynne and Wilmott,1994)给出了外来期权应用的例子。巴勒斯、达赫尔和罗玛诺(Barles, Daher, and Romano,1992)考察了财经应用中有限差分方案的一般收敛问题。奈尔森和拉姆茨沃米(Nelson and Ramaswamy,1989)考察了应用具有二项过渡(分布)的马尔可夫链代替基础随机微分方程的有限差分法,从而拓展了二项(分布)法的应用领域。岸本(Kishimoto,1989),史丹登(Stanton,1990),以及史丹登和沃尔勒斯(Stanton and Wallace,1995)用数值法解出了依路径而定的证券价格,诸如有抵押物的证券价格。维拉德(Willard,1996)论述了多因素模式下与路径相关的定价问题。

丹格勒和加罗(Dengler and Jarrow,1996)考察了数值期定价解中可变时间步数的含义和影响。

(第12.10节)具有提早执行选择权的证券估价法(12.29)式的可取性证明是一个极其微妙的问题。上述问题在杰尔勒特、拉姆伯登和拉佩尔(Jaillet, Lamberton, and Lapeyre,1988,1990)中有所论述。这一方法的早期模式是用来处理布莱克—斯科尔斯(对数正态)看跌期权问题的,在布莱南和施瓦茨(Brennan and Schwartz,1977)中可以找到。切诺夫和佩特考(Chernoff and Petkau,1984)的方法也能给出美式看跌期权价值的实用准确数值近似。关于更多的美式证券的数值定价的研究成果,请参见艾特—沙亚和赖(Ait-Sahlia and Lai,1996),阿明(Amin,1991),阿明和克哈那(Amin and Khanna,1994),安德里森和格洛尼瓦德(Andreasen and Gruenewald,1996),巴拉库德和普丹特(Barraquand and Pudet,1996),巴拉库德和马丁诺(Barraquand and Martineau,1995),伯克森德和思腾斯兰德(Bjerksund and Stensland,1993),布洛迪和迪特姆普勒(Broadie and Detemple, 1994),布洛迪和格拉斯曼(Broadie and Glasserman,1996,1997,1998),本奇和约翰逊(Bunch and Johnson,1993),布特勒(Büttler,1995),布特勒和沃尔德弗格(Büttler and Waldvogel,1996),卡尔(Carr,1994,1998),卡尔和法特(Carr and Faguet,1994),克拉凯和帕洛特(Clarke and Parrott,1996),戴姆博斯特(Dempster,1994),戴姆博斯特和哈特

恩(Dempster and Hutton,1997)，格恩德西、克罗斯和萨尔金(Gandhi, Kooros, and Salkin,1993)，高、黄和萨博拉曼耶姆 (Gao, Huang, and Subrahmanyam, 1996)，伊班纳兹和查帕特罗(Ibanez and Zapatero,1999)，拉姆伯登(Lamberton,1997)，李(Lee,1990)，朗斯坦夫和施瓦茨(Longstaff and Schwartz,1998)，吴(Wu, 1996)和张(Zhang,1993)。

(第 12.11 节～第 12.12 节)根据基本解来给证券定价的方法，在研究文献中也被称为路径积分[例如在达什(Dash,1989)]，或者格林函数[例如比吉荷尔(Beaglehole,1990)明晰地计算了考克斯—英格索罗斯模型(12.28)式的基本解 G，也可参见杰姆斯迪安(Jamshidian,1991c)]。运用半组定价的思想至少可以追溯到高曼(Garman,1985)，还可参见黄(Huang, 1985a)。

(第 12.13 节)令参数与最初期限结构相追溯匹配的问题，显然是源自何和李(Ho and Lee,1986)的二项期限结构模型。随后，这方面的研究工作可以在下述研究文献找到：布莱克、德曼和托尔(Black, Derman, and Toy, 1990)，迪比威格(Dybvig,1988)，哈尔和怀特(Hull and White,1990a,1994)，以及杰姆斯迪安(Jamshidian,1991c)。更多的参考资料已经在第 7 章的注释中给出。牛顿—拉夫森(Newton-Raphson)搜索法和其他数值优化技术可以在下述文献中找到：卢安博格(Luenberger, 1984)，以及普莱斯、弗拉尼瑞、特科尔斯基和范特林(Press, Flannery, Teukolsky, and Vetterling,1993)。

额外话题 关于利率期权定价的数值方法，除了第 7 章注释中所给出的文献资料之外，还可参见克鲁罗和司基克兰德(Clewlow and Strickland,1996)，克鲁罗、庞和司基克兰德(Clewlow, Pang, and Strickland,1997)，库尼特莫和高桥(Kunitomo and Takahashi,1996)，李、瑞切肯和萨卡拉萨布拉曼尼(Li, Ritchen, and Sankarasubramanian,1995)，尼尔森和萨德曼(Nielsen and Sandmann,1996)，斯科特(Scott,1996a)，以及托普尔(Topper,1997)。关于 HJM 模型的数值方法，请参见布雷斯(Brace,1996)，切尔瑞拉和哈斯安(Chiarella and Hassan,1997)，奚斯、加罗和莫顿(Heath, Jarrow, and Morton,1990,1992a,b)，以及瑞切肯和切弗尔(Ritchen and Trevor,1999)。

关于可转换债券的数值定价，请参见皮克弗斯基和施莱弗(Pikovsky and Shreve,1996a)，以及朱和孙(Zhu and Sun,1999)。

我们没有论述的一个重要课题是动态规划问题的数值解。相关的文献资料包括茱迪(Judd,1989)，道奇恩和哈塞(Tauchen and Hussey,1991)，以及格诺和泰勒(Gagnon and Taylor,1990)上述文献均论述了离散时间模型，另外还包括费兹帕曲克和弗莱明(Fitzpatrick and Fleming,1991)，弗莱明和索纳(Fleming and Soner,1993)，芒克(Munk,2000a)，以及普莱金特(Prigent,1994)。长期投资中出现的自由边界问题在希恩迪、黄和朱(Hindy, Huang, and Zhu, 1993,1997)中有所论述。

均衡的数值计算问题在下述研究文献中论述：库博勒和施迈德斯(Kubler and Schmedders,1997)，马塞特(Marcet,1993)，马塞特和马歇尔(Marcet and Marshall,1994)。

衍生证券定价的傅立叶转换法已在本书第 8 章中讨论过。也可参见卡尔和麦当(Carr and Madan,1998)，以及莱博纳特和考珀(Rebonato and Cooper,1996)。莫里亚文(Malliavin)微积分在资产定价和对冲应用中的应用，在弗奈、拉斯瑞、莱布希奥斯，莱恩斯和托兹(Fournie, Lasry, Lebuchoux, Lions, and Touzi, 1999)中探讨。

伊德兰德(Eydeland,1994a,b)给出了本章所探讨的某些衍生证券定价问题的其他数值方法。布罗和列宾(Boulcau and Lepingle,1994)一般性地论述了随机问题的数值方法问题。

附　录

A

有限状态概率

假设 Ω 是有限集。定义在 Ω 上的族集 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的子集的合(含空集 $\emptyset$),并且满足下面两个条件:

(a)如果 B 在 $\mathcal{F}$ 中,那么,B 的补集 $\{\omega\in\Omega:\omega\notin B\}$ 也在 $\mathcal{F}$ 中。

(b)如果 A 和 B 在 $\mathcal{F}$ 中,那么,它们的并集 $A\cup B$ 也在 $\mathcal{F}$ 中。

族集 $\mathcal{F}$ 又被称为代数或场。当 Ω 被看成是世界的状态时,$\mathcal{F}$ 中的元素就是事件。有了条件(a)和(b),就可以进行简单的事件概率逻辑运算。概率测度被定义为函数 $P:\mathcal{F}\to[0,1]$,并满足 $P(\emptyset)=0$,$P(\Omega)=1$,而且对任意不相交的事件 A 和 B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

给定概率测度函数 P,事件 B 的概率为 $P(B)$。有限集 Ω 和定义在 Ω 上的族集 $\mathcal{F}$ 所组成的 (Ω,F) 被称为测度空间。加上定义在 $\mathcal{F}$ 上的概率测度 P,$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 被称为概率空间。

锁定测度空间 $(\Omega,\mathcal{F})$,随机变量即是函数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$,满足对任意 $x\in\mathbb{R}$,集合 $\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\}$ 是在 $\mathcal{F}$ 中。直观地讲,对任意可能的结果 x,如果我们能通过辨别 $\mathcal{F}$ 中事件结果的真假来知道 X 是否有此结果,那么,X 就是随机变量,同时也称 X 是 $\mathcal{F}$ 可测度的($\mathcal{F}$-measurable)。

由于 Ω 是有限的,对任意随机变量 X,有事件 $B_1,\cdots,B_n$,以及 $\mathbb{R}^n$ 中的某些 α,使得 $X=\alpha_1 1_{B_1}+\cdots+\alpha_n 1_{B_n}$,其中 1_B 就是所谓的指示器函数(indicator function)。对事件 B,指示器函数被定义为对 $\omega\in B$,$1_B(\omega)=1$;否则 $1_B(\omega)=0$。给定概率测度 P,随机变量 X 的期望定义为:

$$E(X)=\alpha_1 P(B_1)+\cdots+\alpha_n P(B_n) \tag{A.1}$$

即该随机变量结果的概率加权平均值。

对 Ω 有限的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$,如果 $\mathcal{G}$ 是 Ω 上的被包含的族集,那么,$\mathcal{G}$ 在某种意义上表示"较少的信息",并被称为 $\mathcal{F}$ 的子族集。对任意 $\mathcal{F}$ 可测度的随机变量 X,给定 $\mathcal{F}$ 的子族集 $\mathcal{G}$,X 的条件期望被定义为任意 $\mathcal{G}$ 可测度的随机变量 Y,并且对任意 $\mathcal{G}$ 可测度的随

机变量 Z，满足特征 $E(XZ)=E(YZ)$。我们用 $E(X|\mathcal{G})$ 表示该条件期望。如果 $\mathcal{G}$ 是另一子族集 $\mathcal{H}$ 的子族集，那么，由重复期望定律（亦被称为宝塔特性）可知，对任意随机变量 X，$E[E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}]=E(X|\mathcal{G})$。

如果 Y 是非负随机变量且 $E(Y)=1$，那么，对任意事件 B，我们可以定义 $Q(B)=E(1_B Y)$，从而由旧的概率测度 P 构造出一个新的概率测度 Q。在这种情况下，我们记 $\frac{dQ}{dP}=Y$，并且称 Y 为 Q 对 P 的拉顿—尼科代姆（Radon-Nikodym）导数。对任意随机变量 X，我们有：

$$E^Q(X)=E^P(YX)$$

这里 E^Q 表示基于 Q 的期望；同理，E^P 表示基于 P 的期望。如果当 $Q(B)>0$ 时，有 $P(B)>0$，而且相反的情形也成立，则 P 和 Q 被称为等价测度，它们具有相同的概率为 0 的事件。

如果 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子族集，而且 Q 相当于 P，那么：

$$E^Q(Z|\mathcal{G})=\frac{1}{E^P(\xi|\mathcal{G})}E^P(\xi Z|\mathcal{G}) \tag{A.2}$$

这里 $\xi=\frac{dQ}{dP}$。

由随机变量集 Z 产生的族集，常记为 $\sigma(Z)$，它被定义为能使得 Z 中每个随机变量均可测度的最少子族集。对此，下面的理解就已经足够：即把 $\sigma(Z)$ 看成是事件的集合，而且能够通过观察 Z 中所有随机变量的结果来辨别事件的真假。

假设时间是多期的，并且由诸如 $\{0,1,\cdots,T\}$ 或 $\{0,1,\cdots\}$ 之类的时间集 $\mathcal{T}$ 给定。$\mathcal{F}$ 的子族集的过滤 $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t:t\in\mathcal{T}\}$ 一般也给定，就像第 2.1 节所描述的那样。我们总是假定当 $t\leqslant s$ 时，$\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$。给定过滤 $\mathbb{F}$，停止时间是在 $\mathcal{T}\cup\{+\infty\}$ 中取值的随机变量 τ，使得对任意时间 $t\in\mathcal{T}$，事件 $\{\omega\in\Omega:\tau(\omega)\leqslant t\}$ 是在 $\mathbb{F}_t$ 中。事件 $\tau=+\infty$ 是出于方便的考虑。举例来说，如果 X 和 Y 是不同的两个过程，那么，停止时间 $\tau=\inf\{t:X_t\neq Y_t\}$ 取有限值的概率严格为正，但取无穷大的概率也严格为正（我们遵循传统的方法，使空集的上限为 $+\infty$）。如果 $P(\tau=+\infty)<1$，那么，停止时间 τ 并不是一个没有意义的问题。鞅可以按第 2.1 节中那样定义，也可以定义为任意 $\mathbb{F}$ 适应过程 X，使得对任意有界停止时间 τ，我们有 $E(X_\tau)=E(X_1)$。

已知取有限值的停止时间 τ 所对应的事件族集 $\mathcal{F}_\tau$，允许我们定义条件期望 $E_\tau(\cdot)\equiv E(\cdot|\mathcal{F}_\tau)$。我们定义 $\mathcal{F}_\tau$ 包含满足以下特征的任意事件 A：对任意时间 t，事件 $A\cap\{\omega:\tau(\omega)\leqslant t\}$ 均在 $\mathcal{F}_t$ 中。

上鞅是具有下述特征的适应过程 X：对所有的 t 及 $s\geqslant t$，我们有 $X_t\geqslant E_t(X_s)$。上鞅 X 可以分解为 $X=M-A$，其中 M 为鞅，A 是递增过程且 $A_0=0$。那么，对 $t<T$，A_{t+1} 是 $\mathcal{F}_t$ 可测度的。同样，下鞅即是能使得 $-X$ 为上鞅的适应过程 X。

B

分离超平面定理和最优化

这部分附录重温了分离超平面体定理及其应用，主要的参考资料是洛克菲勒(Rockafeller，1973)和卢安博格(Luenberger，1984)。

分离超平面定理 假设 A 和 B 是 $\mathbb{R}^n$ 的凸性不相交的子集，那么，存在非零线性函数 F，使得对 A 中的所有点 x 和 B 中的所有点 y，有 $F(x)\leqslant F(y)$。而且，如果 x 是在 A 的内部或者 y 是在 B 的内部，那么，$F(x)<F(y)$。再者，如果 A 封闭、B 紧致，那么，F 可以被选定，从而使得对 A 中的所有 x 和 B 中的所有 y，有 $F(x)<F(y)$。

分离超平面定理的一种特殊情形是分离锥体定理。分离锥体定理在定理 1.1 中得到了应用。

锥体的线性分离 假设 M 和 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的封闭凸形锥体，并且正好相切在零点。如果 K 不包含除 $\{0\}$ 以外的线性子域，那么，就存在非零线性函数 F，使得对所有 M 中的 x 和所有 K 中的非零点 y，有 $F\{x\}<F(y)$。

证明：不失一般性，我们可以假设 $K\neq\{0\}$。令 C 是满足 $\{y\in K:\|y\|=1\}$ 的凸型壳(即所有凸型联结的集合，或称为凸包)。

由于 C 是 K 的紧子集，并且 K 不含任何直线，所以我们已知 C 和 M 不相交。由分离超平面定理可知，存在非零线性函数 F，使得对 M 中的所有 x 和 C 中的所有 y，我们有 $F(x)<F(y)$。由于 0 是在 M 中，因此，对 C 中的所有 y，我们有 $F(y)>0$。对 K 中的任意非零元素 z，我们有 $z=\lambda y$，其中 y 是 C 中的某点，λ 是严格为正的系数。定理得证。[①] □

下面我们将把分离超平面定理应用于最优化问题中的鞍点定理。凹性的优化问题即下述形式的仨(U,X,g)：

$$\sup_{x\in X} U(x) \quad \text{满足约束 } g(x)\leqslant 0 \tag{B.1}$$

其中 X 是某向量空间的凸子集，$U:X\to\mathbb{R}$ 是凹性的，而且 $g:X\to\mathbb{R}^m$ 对某些整数 m 也

① 由于得到了莱斯·佩德森(Lasse Pedersen)的帮助，该定理的证明已比本书第二版中的证明更为简单。

是凸性的。在(U,X,g)的拉格朗日函数是由$\mathscr{L}(x,\lambda)=U(x)-\lambda\cdot g(x)$定义的函数$\mathscr{L}:X\times\mathbb{R}^m_+\to\mathbb{R}$。如果对所有的$(x,\lambda)\in X\times\mathbb{R}^m_+$,我们有$\mathscr{L}(x,\lambda_0)\leqslant\mathscr{L}(x_0,\lambda_0)\leqslant\mathscr{L}(x_0,\lambda)$,那么,偶$(x_0,\lambda_0)\in X\times\mathbb{R}^m_+$将是$\mathscr{L}$的鞍点。如果$(x_0,\lambda_0)$为鞍点,那么,我们通常称$\lambda_0$是问题(B.1)式的拉格朗日乘子。下述最优化问题条件就是用分离超平面定理证明的。X中存在$\underline{x}$且满足$g(\underline{x})\ll 0$的条件,被称为斯莱特条件(Slater Condition)。

鞍点定理 令(U,X,g)为凹性的优化问题。

Ⅰ.(必要性)假定斯莱特条件满足。如果x_0为(B.1)式的解,那么,就存在$\lambda_0\in\mathbb{R}^m_+$,使得$(x_0,\lambda_0)$是拉格朗日函数$\mathscr{L}$的鞍点。而且,有$\lambda_0\cdot g(x_0)=0$,这被称为松弛互补条件。

Ⅱ.(充分性)如果(x_0,λ_0)是$\mathscr{L}$的鞍点,那么,x_0是(B.1)式的解。

证明:为了证明定理的第Ⅰ部分,令$L=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$,并且令:

$$C(r,z)=\{x\in X:r\leqslant U(x),z\geqslant g(x)\}$$

再令:

$$A=\{(r,z):C(r,z)\neq\phi\}$$

和

$$B=\{(r,z);r>U(x_0),z\ll 0\}$$

A和B均为凸性。由事实x_0解(B.1)可知,A和B不相交。根据分离超平面定理,存在线性函数$F:L\to\mathbb{R}$,使得$F(v)<F(w)$对每一个$v\in A$和每一个$w\in B$都成立。因此,对A中的任意v和B邻域内的任意w,我们有$F(v)\leqslant F(w)$。$\mathbb{R}^m$中存在系数α和λ,使得对L中的任意(r,z),我们有$F(r,z)=\alpha r+\lambda\cdot z$。运用斯莱特条件,我们可以检验$\alpha>0$和$\lambda\leqslant 0$。令$\lambda_0=-\lambda/\alpha$。因而,由事实$[U(x_0),0]$既属于A,也属于$B$的邻域可知,$(x_0,\lambda_0)$是鞍点,而且松驰互补条件成立。

定理的第Ⅱ部分是很容易证明的,这里就不再叙述。 □

现在我们来看最优化问题的一阶条件。考虑:

$$\sup_{x\in X}U(x) \tag{B.2}$$

这里的X是向量空间L的凸子集,$U:X\ \mathbb{R}$为函数。我们想要知道(B.2)式的解x^*的必要和充分条件。对$x\in X$,令:

$$\mathscr{Y}(x,y)=\sup\{\epsilon\in[0,1]:x+\alpha y\in X,\alpha\in[0,\epsilon]\}$$

以及

$$F(x)=\{y\in L:\mathscr{Y}(x,y)>0\}$$

即所有可能偏离x的方向集。U对某个$x\in X$在方向$y\in F(x)$上的导数,如果存在的话,则被定义为以下极限:

$$\delta U(x;y)\equiv\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{U(x+\alpha y)-U(x)}{\alpha} \tag{B.3}$$

上式有时被称为方向导数或加特奥斯(Gateaux)导数。如果 $y \mapsto \delta U(x;y)$ 定义 $F(x)$ 上的线性函数,那么,这个函数被称为 U 在 x 点的梯度,并记为 $\nabla U(x)$。这时,我们把 $\nabla U(x;y)=\delta U(x;y)$ 记为 $\nabla U(x)$ 在 y 处的值。如果 $U:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为连续可微函数,那么,梯度 $\nabla U(x)$ 在任意 x 处存在,并且 $\nabla U(x,y)=\partial U(x)\cdot y$,其中 $\partial U(x)$ 为 U 在 x 处的偏导数向量。

假定 x^* 可以解(B.2)式且 $\nabla U(x^*)$ 存在,那么,对所有 $F(x^*)$ 中的 y,$\nabla U(x^*;y)\leqslant 0$ 成立。否则,就会存在某方向 y,并且 $\nabla U(x^*;y)>0$。如果是这样,那么,就存在某个 $\alpha>0$,使得 $U(x^*+\alpha y)-U(x^*)>0$,这与 x^* 的最优化性相悖。如果 $F(x^*)$ 是整个向量空间 L,那么,$\nabla U(x^*)\equiv 0$ 就是 x^* 为最优的必要条件。因为如果 $\nabla U(x^*;y)<0$,那么,$-y$ 就是可以严格改善的可行方向。

如果 U 是凹性的,那么,$\nabla U(x^*)$ 存在,并且 $F(x^*)=L$。因此,$\nabla U(x^*)\equiv 0$ 是 x^* 为最优的充分必要条件。其中,必要性已经得到了证明。现在对充分性做出简要说明:由 U 的凹性可知,对任意 X 中的 x 和 y,我们有:

$$U(y)-U(x)\leqslant \nabla U(x;y-x) \tag{B.4}$$

令 $x=x^*$,那么,对所有的 y,$U(y)\leqslant U(x^*)$ 成立。这些结果可以被推广到 U 不可微的情形。

C

概率拓展

本附录将拓展附录 A 中的定义，使其能够处理含有无限多不同事件的概率空间，我们还加入一些有用的通用结果，例如控制(Dominated)收敛定理、中心极限定理和福比尼定理。标准的参考资料是别林斯雷(Billingsley, 1986)。

给定状态集 Ω，定义于 Ω 上的族集 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的子集(包含空集 $\emptyset$)的集合，并且满足下面两个条件：

(a)如果 B 属于 $\mathcal{F}$，那么，其补集 $\{\omega\in\Omega:\omega\notin B\}$ 也属于 $\mathcal{F}$。

(b)对任何属于 $\mathcal{F}$ 的序列 $\{B_1,B_2,\cdots\}$，并集 $B_1\cup B_2\cup\cdots$ 也属于 $\mathcal{F}$。

族集在一般场合下也称为 σ—代数或 σ—场，对任意 Ω 的子集的集合 $\mathcal{A}$，由 $\mathcal{A}$ 产生的族集是所有包含 $\mathcal{A}$ 的族集的交合处(intersection)。举一个非常重要的例子：令 $\Omega=\mathbb{R}^n$，并且令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有开集生出的族集，这里，$\mathcal{F}$ 被称为 $\mathbb{R}^n$ 的波莱尔(Borel)族集，并且记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$。

假设 Ω 是含有族集 $\mathcal{F}$ 的集合。其随机变量是满足如下性质的函数 $X:\Omega\to\mathbb{R}$：对波莱尔族集 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 中的任意 A，集合 $\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in A\}$ 属于 $\mathcal{F}$，概率测定是满足条件 $P(\emptyset)=0$，$P(\Omega)=1$ 的函数 $P:\mathcal{F}\to[0,1]$，并且对任意不相交的序列事件 $B_1,B_2\cdots$，有：

$$P(B_1\cup B_2\cup\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)$$

因此，$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 就构成一个概率空间。

如果 $P(B)=1$，那么，事件 B 就被称为几乎肯定为真。例如，$X=Y$ 几乎肯定为真，用正式的符号来表示，就是 $P(\{\omega\in\Omega:X(\omega)=Y(\omega)\})=1$。我们有时也非正式地表示为“$P(X=Y)=1$”。我们总是用“$X=Y$”表示“$X=Y$ 几乎肯定为真”的意思，这是我们贯穿全书的习惯。但有时为了强调，我们也加上了“几乎肯定为真”一词。

给定概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，零集就是由零概率事件构成的子集。为了给零集分配零概率，概率空间可以被完全化，这就意味着我们可以用由 $\mathcal{F}$ 和所有零集的并集所生成的族

集$\mathcal{F}^{\sim}$来代替$\mathcal{F}$。概率测度P则惟一地延伸到$(\Omega,\mathcal{F}^{\sim})$上的概率测度$P^{\sim}$，$P^{\sim}$具有下述性质：对$\mathcal{F}$中的所有$A$，$P^{\sim}(A)=P(A)$；对任意零集$A$，$P^{\sim}(A)=0$。那么，概率空间$(\Omega,\mathcal{F}^{\sim},P^{\sim})$就称为$(\Omega,\mathcal{F},P)$的完全。

假设X是可以写成指示器函数的线性和的随机变量，即$X=\alpha_1 1_{B_1}+\cdots+\alpha_n 1_{B_n}$。这时，$X$被称为是简单(型)的。同有限状态场合一样，给定某个定义于$(\Omega,\mathcal{F})$上的概率测度P，X的期望被定义为：

$$E(X)=\alpha_1 P(B_1)+\cdots+\alpha_n P(B_n)$$

即结果的概率加权平均值。如果X不一定是简单型的，但却是非负随机变量的集合，那么，X的期望被定义为：

$$E(X)\equiv\sup_{Y\in\mathcal{S}}E(Y)\quad \text{满足约束 } Y\leqslant X \tag{C.1}$$

其中$\mathcal{S}$是(所有)简单型随机变量的集合。更一般地，任意随机变量X可以被写成$X=X^{+}-X^{-}$，其中$X^{+}\equiv\max(-X,0)$，$X^{-}\equiv\max(-X,0)$；也就是说，X是其自身正负两部分的差。如果$E(X^{+})$和$E(X^{-})$均是有限的，那么，X则被说成是可积的，并且它的期望(值)被定义为：

$$E(X)\equiv E(X^{+})-E(X^{-}) \tag{C.2}$$

这一定义正好与简单型随机变量X的期望定义相一致。当X^{+}可积(即其期望有限)而X^{-}不可积时，我们定义$E(X)=-\infty$。类似地，当X^{-}可积而X^{+}不可积时，定义$E(X)=+\infty$。

锁定概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$，如果对任意有界的连续函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，有$E[f(X_n)]\to E[f(X)]$，那么，随机变量序列$\{X_n\}$被说成在分布上收敛于随机变量$X$。如果对所有的$\epsilon>0$，有$P(|X_n-X|\geqslant\epsilon)\to 0$，那么，序列$\{X_n\}$从概率上收敛于$X$。如果存在某个概率为1的事件$B$，使得$X_n(\omega)-X(\omega)$对所有$B$中的$\omega$成立，那么，序列$\{X_n\}$几乎肯定收敛于$X$。从分布上收敛的定义通常都被假定可以推广到对每一个n，定义于(很可能不同的)概率空间$(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)$上的$X_n$。

控制收敛定理 假设$\{X_n\}$为定义于某概率空间上的随机变量序列，并且对所有的n，有$|X_n|\leqslant Y$，其中Y为随机变量，并且满足$E(|Y|)<\infty$。假定X_n收敛于X几乎肯定成立，或者依概率成立，或者依分布成立。那么，$E(X_n)\to E(X)$。

几乎肯定收敛(性)意味着依概率收敛，后者又意味着依分布收敛。所以，控制收敛定理可以仅表述成依分布收敛，而且效果是一样的。

如果对任意有限子集$\{X_1,\cdots,X_k\}$和任意有界可测函数$f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$1\leqslant i\leqslant k$，那么，我们有：

$$E[f_1(X_1)f_2(X_2)\cdots f_k(X_k)]=E[f_1(X_1)]E[f_2(X_2)]\cdots E[f_k(X_k)]$$

那么，定义于某给定概率空间上的随机变量序列$\{X_n\}$具有独立分布。

如果有：

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{n}E(Y_{an})=0$$

那么，定义在某给定概率空间上的随机变量序列$\{X_n\}$为均匀可积(uniformly integrable)。这里，如果$|X_n(\omega)|\geqslant a$，那么，$Y_{an}(\omega)=|X_n(\omega)|$；否则$Y_{an}(\omega)=0$。

下面描述一种版本的中心极限定理。为此，我们定义：

$$Y=\{Y_1^n,Y_2^n,\cdots,Y_{k(n)}^n:n\in\{1,2,\cdots\}\}$$

当$k(n)\to\infty$时，如果对每一个n，$Y_1^n,\cdots,Y_{k(n)}^n$为某概率空间上的独立分布随机变量，那么，Y为三角矩阵。对任意常数$\epsilon>0$，令$U(\epsilon)$表示由下述定义的"ϵ-修截的"(ϵ-truncated)三角矩阵：对$|Y_j^n|\leqslant\epsilon$，有$U_j^n(\epsilon)=0$；对$|Y_j^n|>\epsilon$，有$U_j^n(\epsilon)=Y_j^n$。

如果当$\epsilon>0$时，有：

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{var}[U_1^n(\epsilon)+\cdots+U_{k(n)}^n(\epsilon)]=0$$

那么，矩阵Y满足林德伯格—费勒(Lindeberg-Feller)条件。

林德伯格—费勒中心极限定理 假设Y为随机变量三角矩阵，其中所有随机变量的期望值为零，并且Y满足林德伯格—费勒条件。对每个n，令$Z_n=Y_1^n+\cdots+Y_{k(n)}^n$和$s_n^2=\mathrm{var}(Z_n)$。如果$s_n^2\to\sigma^2>0$，那么，$Z_n$依分布收敛于均值为零、方差为$\sigma^2$的正态随机变量。

对任意可积的随机变量X，给定$\mathcal{F}$子集$\mathcal{G}$，X的条件期望记为$E(X|\mathcal{G})$，并被定义为满足如下性质的$\mathcal{G}$可测随机变量Y：对任意$\mathcal{G}$可测且XZ可积的随机变量Z，有$E(XZ)=E(YZ)$。该条件期望肯定存在，但我们在此并不证明这一点。类似有限状态下的场合，我们也可以运用迭代期望律。

跟有限状态的情形一样，如果对任意事件A，当且仅当$Q(A)=0$时，$P(A)=0$，那么，Q和P是$(\Omega,\mathcal{F})$上的等价概率测度。这时，总是存在严格为正的随机变量ξ，该变量被称为Q对P的拉顿—尼科代姆(Radon-Nikodym)导数，并满足如下特征：如果Z使得$E^Q(|Z|)<\infty$，那么，$E^Q(Z)=E^P(\xi Z)$。由同样的假设，如果$\mathcal{G}$是$\mathcal{F}$的子集族，则有：

$$E^Q(Z|\mathcal{G})=\frac{1}{E^P(\xi|\mathcal{G})}E^P(\xi Z|\mathcal{G}) \tag{C.3}$$

通常ξ被记为$\frac{dQ}{dP}$。

如果时间是多期的，那么，我们通常令时间集$\mathcal{T}$取下列值之一：$\mathcal{T}=\{0,1,\cdots,T\}$，或者$\mathcal{T}=\{0,1,\cdots\}$，或者$\mathcal{T}=\{0,T\}$，或者$\mathcal{T}=[0,\infty)$。正如有限状态情形那样，通常假定$\mathcal{F}$的子集族的过滤$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t:t\in\mathcal{T}\}$给定。只要$t\leqslant s$，我们就总是假定$\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$。

对$\mathcal{T}=[0,T]$，或者$\mathcal{T}=[0,\infty)$的情形，我们通常要求一族随机变量$X=\{X_t:t\in\mathcal{T}\}$是可测度的，即将其处理成函数$X:\Omega\times\mathcal{T}\to\mathbb{R}$。这里"可测度的"意思是积可测度(product measurable)，有时也称为交可测度(jointly measurable)，即在$\Omega\times\mathcal{T}$上的最小族集上可测度。$\Omega\times\mathcal{T}$上的最小族集包含所有$A\times B$型的集合，其中$A\in\mathcal{F}$，并且B属于定义于$\mathcal{T}$

上的波莱尔族集。事实上，我们总是像第 5 章开头所指出的那样，定义某过程 $X:\Omega\times\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ 是积可测度的，从而避免重复指出积可测度性。

如果对所有的 t，随机变量 X_t 在 $\mathcal{F}_t$ 上可测度，那么，过程 X 是适应的。鞅是满足下述性质的适应过程 X：对每一个时间 t，X_t 是可积的，并且当 $t\geqslant s$ 时，$E(X_t|\mathcal{F}_s)=X_s$。

停止时间为满足下述性质的随机变量 $\tau:\Omega\to\mathcal{T}\cup\{+\infty\}$：对每一个时间 t，事件 $\{\omega:\tau(\omega)\geqslant t\}$ 属于 $\mathcal{F}_t$。正如有限状态情形那样，鞅也可以被定义为下述可积过程：对任意有界的停止时间 τ，我们有 $E(X_\tau)=E(X_0)$。

福比尼(Fubini)定理告诉我们下面的结果：假设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一个概率空间，并且 $X:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 是积可测度的。如果

$$E\left(\int_0^T|X_t|\,dt\right)<\infty$$

那么，$E(\int_0^T X_t dt)=\int_0^T E(X_t)dt$，也就是说，我们可以颠倒期望和时间积分的次序。更一般地，如果 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子集族，那么，由上述福比尼定理的条件，我们有：

$$E\left(\int_0^T X_t dt\,|\,\mathcal{G}\right)=\int_0^T E(X_t|\mathcal{G})dt \quad \text{几乎肯定成立} \tag{C.4}$$

福比尼定理也可以用于 $T=+\infty$ 的情形。此种情形下定理的具体形式可以在艾若和库兹(Either and Kurts，1986)第 74 页中找到。

D

随机积分

本附录总结随机积分的定义和特征，并简述两个非常有用的成果：基尔萨诺夫(Girsanov)定律和鞅表述定律。标准的参考文献主要有钟和威廉姆斯(Chung, Williams, 1990)，卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve, 1988)，以及雷瓦兹和约尔(Revuz and Yor, 1991)。有关通用信息过滤的内容，可参见普罗特(Protter, 1990)。

正如第5.9节中的所定义那样，我们锁定一个$\mathbb{R}^d$型的定义于完整概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的标准布朗运动$B=(B^1, \cdots, B^d)$，以及B的标准过滤$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t : t\geqslant 0\}$。我们要提醒读者：为了完成本书的目的，“过程”已经被定义为从$\Omega\times[0,\infty)$上到某欧基里得空间的积可测函数，或者欧基里得空间的布雷尔可测子集。我们还记得，B是取值为$\mathbb{R}^d$型的样本路径连续的过程，并且具备以下特征：

(a)$P(B_0=0)=1$；

(b)对任意时间t和$s>t$，B_s-B_t在$\mathbb{R}^d$中呈正态分布，并且均值为零，协方差矩阵为$(s-t)I$；

(c)对任意时间$t_0, \cdots, t_n$，以及$0<t_0<t_1<\cdots<t_n<\infty$，随机变量$B(t_0), B(t_1)-B(t_0), \cdots, B(t_n)-B(t_{n-1})$的分布相互独立。

最后不要忘了，$\mathcal{F}_t$是由族集$\sigma(\{B_s : 0\leqslant s\leqslant t\})$与$\mathcal{F}$的空集的并集所生成的族集(通常也被称为$\sigma$代数)。

为了定义随机积分，我们锁定某个时间区间$[0,T]$，并且取M为$B^1, \cdots, B^d$过程中的一个，例如B^i。适应过程$\theta : \Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$是简单的，如果$[0,T]$的分割由时间$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$给出，使得对所有$n>0$，有：

$$\theta(t)=\theta(t_n), \quad t\in(t_{n-1}, t_n]$$

对于简单过程θ，在任何时间$t\in[t_n, t_{n+1})$，对任意$n<N$，我们很自然地定义随机积分$\int\theta \mathrm{d}M$为：

$$\int_0^t \theta_s \mathrm{d}M_s \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \theta(t_{i+1})[M(t_{i+1}) - M(t_i)] + \theta(t_{n+1})[M(t) - M(t_n)]$$

对于 $t = t_N = T$，我们令 $\int_0^T \theta_t \mathrm{d}M_s = \sum_{i=0}^{N-1} \theta(t_{i+1})[M(t_{i+1}) - M(t_i)]$。我们令 $\mathscr{L}$ 表示适应过程集合。我们应用第 5 章中的下述记号：

$$\mathscr{L}^1 = \left\{\theta \in \mathscr{L}: \int_0^T |\theta_t| \mathrm{d}_t < \infty \quad \text{几乎肯定成立}\right\}$$

$$\mathscr{L}^2 = \left\{\theta \in \mathscr{L}: \int_0^T \theta_t^2 \mathrm{d}_t < \infty \quad \text{几乎肯定成立}\right\}$$

$$\mathscr{H}^2 = \left\{\theta \in \mathscr{L}^2 : E\left(\int_0^T \theta_t^2 \mathrm{d}_t\right) < \infty\right\}$$

我们没有证明的一个非常重要的事实是，对任意 $\theta \in \mathscr{H}^2$，存在一个简单适应过程序列 $\{\theta_n\}$，它在下述意义上近似 θ：

$$E\left(\int_0^T [\theta_n(t) - \theta(t)^2 \mathrm{d}t]\right) \to 0 \tag{D.1}$$

而且，对 $\mathscr{H}^2$ 中的每一个 θ，存在具有下述特征的惟一的随机变量 Y_θ：对任意在(D.1)意义上近似 θ 的序列 $\{\theta_n\}$，

$$E([Y_\theta - \int_0^T \theta_n(t) \mathrm{d}M_t]^2) \to 0$$

(更精确地说，Y_θ 在下述意义上被惟一地定义：如果另一个随机变量 Y 具有同样的特征，那么，$Y = Y_\theta$ 几乎肯定成立。)这一随机变量 Y_θ 被称为 $\int_0^T \theta_t \mathrm{d}M_t$。由于 T 和 $M = B^i$ 是任意的，所以对 $(\mathscr{H}^2)^d$ 中的任意 $\theta = (\theta^1, \cdots, \theta^d)$ 和任意 T，我们已经定义了随机积分 $\int_0^T \theta_t \mathrm{d}B_t \equiv \sum_{i=1}^d \int_0^T \theta_t^i \mathrm{d}B_t^i$。有关这种随机积分的定义是可行的，以及过程 $\int \theta \mathrm{d}B$ 满足第 5 章中所给出的特征的论述，均可在卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve, 1988) 第 3.2 节中找到。特别的，这种随机积分的定义又使得每个样本的满足路径为连续的。卡拉特查斯和施莱弗对 θ 进行了特别处理，并且把 $(\mathscr{H}^2)^d$ 中“不断可测”(Progressively Measurable) 的 θ 的通常定义 $\int \theta \mathrm{d}B$ 推广到 $(\mathscr{H}^2)^d$ 中的任意 θ。

对给定的 $\theta = (\theta^1, \cdots, \theta^d) \in (\mathscr{L}^2)^d$，我们也希望定义 $\int \theta \mathrm{d}B \equiv \sum_i \int \theta^i \mathrm{d}B^i$。关于这一点是按下述方法操作的：对任意给定的正整数 n，令 $\tau(n) = \inf\{t: \int_0^t \cdot \theta_s \theta_s \mathrm{d}s = n\}$。令 $\theta_t^{(n)} = \theta_t 1_{t \leqslant \tau(n)}$，那么，$\theta^{(n)}$ 是在 $(\mathscr{H}^2)^d$ 中，所以我们可以定义 $\int \theta^{(n)} \mathrm{d}B$。由于 θ 是在 $(\mathscr{L}^2)^d$ 中，而且我们知道 $\tau(n) \to T$ 几乎肯定成立，因此，我们定义 $\int_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s$(对任意 $t \in [0, T]$) 为当 $n \to \infty$ 时 $\int_0^t \theta_s^{(n)} \mathrm{d}B_s$ 的极限。

比克和威林格尔(Bick and Willinger,1994)指出,对本书中处理的一些应用,诸如布莱克—斯科尔斯期权定价公式,随机积分可简化为通常的斯蒂尔基斯(Stieltjes)积分。

我们有时还需要处理局部鞅的概念。局部鞅为具有下述性质的适应过程 X:存在几乎肯定收敛于 T 的递增停止时间序列 $\tau(n)$,并且使得对每一个 n,停止过程 $X^{\tau(n)}$ 在被定义为 $X_t^{\tau(n)}=X_{\min(t,\tau(n))}$ 时为一个鞅。例如,如前所述,由于 $\int\theta^{(n)}\mathrm{d}B$ 是一个鞅(参见命题5.1),因此,$\int\theta\mathrm{d}B$ 是一个局部鞅。当然,一个鞅总是一个局部鞅。

上鞅为具有下述特征的可积适应过程 X:对任意时间 t 和 $s>t$,$\mathrm{E}_t(X_s)\leqslant X_t$。右连续过程为使得对所有 $t<T$,我们有 $X_t=\lim_{s\downarrow t}X_s$ 的过程 X,即其样品路径是从右边连续的。例如,任何随机积分是右连续的,因为其样本路径是连续的。下述两项内容经常用到:

(a)非负局部鞅是一个上鞅。

(b)多博—梅尔(Doob-Meyer)分解:右连续上鞅 X 可以表述成形式 $X=M-A$,其中 M 是鞅,A 是递增适应过程且有 $A_0=0$。(一般而言,多博—梅尔分解更多地表达了过程 A 的性质,但在此布朗运动情形下所述的特征,就我们的目的而言已经足够了。)

鞅表述定理 如果 M 是局部鞅,那么,$(\mathscr{L}^2)^d$ 中存在 θ,使得:

$$M_t=M_0+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}B_s,\quad t\geqslant 0 \tag{D.2}$$

下述内容也是密切相关的。

杜德利(Dudley)定理 固定 $T>0$,并且令 X 为任意 $\mathscr{F}_t$ 可测的随机变量。假设 $d=1$ 或者 $E(|X|)<\infty$,那么,存在常数 x 和 $(\mathscr{L}^2)^d$ 中的某个 θ,使得:

$$X=x+\int_0^T\theta_t\mathrm{d}B_t\quad \text{几乎肯定成立}$$

我们现在来看基尔萨诺夫定理。基尔萨诺夫定理解决的是在概率测度改变时,如何构造一个布朗运动。在本附录的余下内容中,我们把时间局限于一个固定区域,即 $T<\infty$。而且,概率空间为 $(\Omega,\mathscr{F}_T,P)$,并且当所有定义条件受制于 $[0,T]$ 时,$B=\{B_t:0\leqslant t\leqslant T\}$ 的标准过滤 $\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t:0\leqslant t\leqslant T\}$ 亦如前面所定义的那样。如果

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\theta_s\cdot\theta_s\mathrm{d}s\right)\right]<\infty \tag{D.3}$$

那么,$\mathscr{L}^2$ 中的过程向量 $\theta=(\theta^1,\cdots,\theta^d)$ 满足诺维可夫(Novikov)条件。

命题 D.1 如果 θ 满足诺维可夫条件,那么,鞅 ξ^θ 由下式定义:

$$\xi_t^\theta=\exp\left(-\int_0^t\theta_s\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^t\theta_s\cdot\theta_s\mathrm{d}s\right),\quad t\in[0,T]$$

假设 θ 满足诺维可夫条件。因为 ξ^θ 是一个鞅,并且 $\xi_0^\theta=1$,我们知道 $E(\xi_T^\theta)=1$。由于 ξ_T^θ 是严格为正的,由附录C可知,等价鞅概率测度 $Q(\theta)$ 可以被定义如下:

$$\frac{\mathrm{d}Q(\theta)}{\mathrm{d}P}=\xi_T^\theta$$

应用伊藤定理，上式可以写成 $\mathrm{d}\xi_t^\theta=-\xi_t^\theta\theta_t\mathrm{d}B_t$。有时这将是很有用的。

对任意局部鞅 Y 和 Z，存在惟一的连续适应过程，记为 $\langle Y,Z\rangle$，使得 $\langle Y,Z\rangle_0=0$，并且 $YZ-\langle Y,Z\rangle$ 是局部鞅。人们有时候也把 $\langle X,Y\rangle$ 称为角括弧过程（Sharp-brackets process）。很明显，由鞅表述定理和伊藤公式，对某些取值为 $\mathbb{R}^d$ 型的适应过程 σ_Y 和 σ_Z，我们有 $\mathrm{d}Y_t=\sigma_Y(t)\mathrm{d}B_t$，$\mathrm{d}Z=\sigma_Z(t)\mathrm{d}B_t$ 和 $\mathrm{d}\langle Y,Z\rangle_t=\sigma_Y(t)\cdot\sigma_Z(t)\mathrm{d}t$。

下面，我们叙述布朗运动的列维（Levy）特征概括。这一成果实际上可以应用于满足附录 F 中所述的通常条件的任意过滤（$\mathcal{F}_t$），具体论述可参见雷瓦兹和约尔（Revuz and Yor，1991）。

列维特征定理 假设 X 是取值为 $\mathbb{R}^k$ 型的适应过程。那么，X 是 $\mathbb{R}^k$ 中的标准布朗运动，当且仅当 $X_0=0$ 且 X 是 $\mathbb{R}^k$ 中的连续局部鞅，同时还要满足 $\langle X^{(i)},X^{(j)}\rangle_t=t\delta_{ij}$，其中 $\delta_{ii}=1$，以及对不同的 i 和 j，$\delta_{ij}=0$。

基尔萨诺夫定理 给定 $\theta\in(\mathcal{L}^0)^d$，假设 ξ^θ 是一个鞅（满足诺维可夫条件），那么，在 $Q(\theta)$ 下为鞅的标准布朗运动 B^θ 由下式定义：

$$B_t^\theta=B_t+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{D.4}$$

而且，B^θ 还具有 $Q(\theta)$ 下的鞅表述特征，也就是说，对任意局部 $Q(\theta)$ 鞅 M，$(\mathcal{L}^2)^d$ 中存在某 φ 使得：

$$M_t=M_0+\int_0^t\varphi_s\mathrm{d}B_s^\theta,\quad t\leqslant T$$

基尔萨诺夫定理的鞅表述方面通常是不受到重视的，但它在金融应用方面又特别有用。通过直接计算可知，基尔萨诺夫定理还具有下述非常有用的推论。

推论 D.1 令 X 为 $\mathbb{R}^N$ 中具有下述形式的伊藤过程：

$$X_t=x+\int_0^t\mu_s\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_s\mathrm{d}B_s,\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

假设 $v=(v^1,\cdots,v^N)$ 是 $\mathcal{L}^1$ 中的向量过程，使得 $(\mathcal{L}^2)^d$ 中存在 θ 满足：

$$\sigma_t\theta_t=\mu_t-v_t,\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

如果 ξ^θ 是一个鞅（满足诺维可夫条件），那么，X 对 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},Q(\theta))$ 也是一个伊藤过程，且

$$X_t=x+\int_0^t v_s\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma_s\mathrm{d}B_s^\theta,\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

简单地说，基尔萨诺夫定理给了我们一种调整概率估计的方法，使得给定的伊藤过程可以被改写成具有任意漂移的伊藤过程。

对于等价于 P 的任意概率测度 Q，我们按下式定义鞅 M：

$$M_t=E_t\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right),\quad t\leqslant T$$

鞅表述定理告诉我们，$(\mathcal{L}^2)^d$ 中存在某 φ 使得 $dM_t=\varphi_t dB_t$。而且，M 是一个连续过程。由于 Q 等价于 P，可以证明，M 是严格为正的过程，而且我们可以按下式定义 $(\mathcal{L}^2)^d$ 中的 θ：$\theta_t=-\varphi_t/M_t$。因此，有 $M=\xi^\theta$ 和 $Q=Q(\theta)$。给定伊藤过程的惟一分解特征，这意味着存在下述应用方便的结论：伊藤过程的扩散不因等价概率测度的改变而改变（其漂移过程当然会改变，正如我们已经看到的那样）。

扩散不变原则 令 Q 为等价于 P 的概率测度。$\mathbb{R}^d$ 中的 Q 下具有标准布朗运动 B^Q，其在 Q 下有鞅表述。令 X 为 P 下满足 $dX_t=\mu_t dt+\sigma_t dB_t$ 的伊藤过程。那么，X 也是 Q 下的伊藤过程，并且 $dX_t=\mu^Q(t)dt+\sigma_t dB_t^Q$，其中 μ^Q 是 X 在 Q 下的漂移。

最后，让我们重温随机积分的福比尼定理的一个版本，该定理在推导向前利率的奚斯—加罗—莫顿模型中被应用。假设 X 为伊藤过程，以及对有界实区间 $[a,b]$，$H:[a,b]\times\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 为积可测的，以及对 $[a,b]$ 中的每一个 u，$H^u\equiv H(u,\cdot,\cdot)$ 能定义某个适应过程，使得随机积分 $\int H_t^u dX$ 存在。令 $h(\omega,t)=[\int_a^b[H(u,\omega,t)^2]du]^{0.5}$，并且假设随机积分 $\int h_t dX_t$ 存在。令 $g(\omega,t)=\int_a^b H^u(\omega,t)du$，我们得到一个类似于其经典形式（参见附录C）的福比尼定理：即对任意时间 s，有 $\int_a^b\int_0^s H_t^u dX_t du=\int_0^s g_t dX$。这是由普罗特（Protter，1990）第160页的定理46得出的。

E

随机微分方程、偏微分方程和费恩曼—凯科

本附录解决随机微分方程(SDE)的解的存在性问题，并阐明 SDE 是怎样表述抛物线类的偏微分方程(PDE)的解。标准参考资料包括卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve, 1988)。

像通常一样，$\mathbb{R}^d$ 中的标准布朗运动 B 被给定于某概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上，B 的标准过滤$\mathbb{F}$正如附录 D 所定义。SDE 是一个下述形式的表达式：

$$dX_t=\mu(X_t,t)dt+\sigma(X_t,t)dB_t \tag{E.1}$$

其中 $\mu:\mathbb{R}^N\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^N$ 和 $\sigma:\mathbb{R}^N\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^{N\times d}$ 为给定函数。我们感兴趣的是，为了使得对 $\mathbb{R}^N$ 中的每个 x，存在惟一的伊藤过程 X 满足(E.1)且 $X_0=x$ 时，μ 和 σ 需满足什么条件。在这种情况下，我们说 X 是方程(E.1)及初始条件 x 的解。类似于 X 的过程常被称为扩散，尽管尚没有公认的“扩散”定义。对于“惟一的”一说，我们的意思是，具有相同特征的其他伊藤过程几乎处处等于 X。这种意义上的惟一解有时也被称为强解，我们并不需要知道什么是弱解。

(E.1)有解的充分条件是关于 μ 和 σ 的利普斯基兹(Lipschitz)和增长条件。为了解释这两个条件，我们先定义矩阵的模：对任意矩阵 A，令 $\|A\|=[\mathrm{tr}(AA^{\tau})]^{1/2}$ 为其模，其中“$\mathrm{tr}(\cdot)$”表示迹(当 A 只有一行或一列时，这正好与通常意义上的欧基里德模相一致)。那么，我们就说 σ 在 x 上满足利普斯基兹条件，如果存在常数 k，使得对 $\mathbb{R}^N$ 中的任意 x、y 和时间 t，有：

$$\|\sigma(x,t)-\sigma(y,t)\|\leqslant k\|x-y\| \tag{E.2}$$

类似地，σ 在 x 上满足增长条件，如果存在常数 k，使得对 $\mathbb{R}^N$ 中的任意 x 和任意时间 t，有：

$$\|\sigma(x,t)\|^2\leqslant k(1+\|x\|^2) \tag{E.3}$$

请注意，这些条件对 t 一致地适用，也就是说，这些常数对所有的 t 同时适用。将(E.2)式和(E.3)式中的 σ 换成 μ，就可以分别得出 μ 的利普斯基兹条件和增长条件。

随机微分方程(SDE)命题 假设 μ 和 σ 均为可测的，并且在 x 上满足利普斯基兹条

件和增长条件，那么，对$\mathbb{R}^N$中的每一个x，$\mathbb{R}^N$中存在惟一的伊藤过程X满足随机微分方程(E.1)及其初始条件x。而且，X是马尔可夫过程，并且对每一个t，存在常数C使得：

$$E(\|X_t\|^2)\leqslant Ce^{Ct}(1+\|x\|^2)$$

X是马尔可夫过程的结论，可以被强化到X是强马尔可夫过程的结论。这里我们不需要定义什么是强马尔可夫过程。对于(E.1)式的解的利普斯基兹条件，可以进行稍许弱化。如果对每一个正常数K，存在常数k，使得对所有的t和所有具有有界模的x和y，(E.2)式满足，那么，我们就说σ在x上是局部利普斯基兹。

随机微分方程(SDE)定理 假设μ和σ均为可测的，在x上满足增长条件，以及在x上是局部利普斯基兹。那么，对$\mathbb{R}^N$中的每一个x，$\mathbb{R}^N$中存在惟一的伊藤过程X，满足随机微分方程(E.1)及初始条件x。而且，X是马尔可夫过程。如果再加上μ和σ为连续函数，那么，X就是有限方差过程。

但这些较弱的条件也不覆盖考克斯—英格索—罗斯模型中所用的那类平方根扩散，以及第7章和第8章所出现的那类有吸引力的过程。对于这些特殊的情况，我们可以依赖下述关于一维情形($N=d=1$)的成果。这一成果在卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Sherve,1988)中第291页上可以找到，它只要求μ是连续的且在x上满足利普斯基兹条件，以及σ是连续的且满足特征：

$$|\sigma(x,t)-\sigma(y,t)|\leqslant\rho(|x-u|)$$

对所有的x和y，以及所有的t成立，其中$\rho:[0,\infty)\to[0,\infty)$是严格递增函数且$\rho(0)=0$，并对任意$\epsilon>0$，

$$\int_{(0,\epsilon)}\rho^{-2}(x)\mathrm{d}x=+\infty$$

只要取$\rho(x)=\sqrt{x}$，就覆盖了CIR模型[对$x<0$，取$\sigma(x)=0$]。尽管这些弱的条件还可以进一步弱化，但必须注意，如果当$\alpha<1/2$时，$\sigma(x)=|x|^\alpha$，那么，解的惟一性还有反例。

这些SDE解的存在性结论可以从诸如伊凯达和瓦特纳博(Ikeda and Watanabe,1981)或卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve,1988)等中找到。这些结论的条件也意味着，对任意给定时间τ和$\mathbb{R}^N$中的任意x，当$t\geqslant\tau$，并有$X_t=x$，$t\leqslant\tau$时，存在惟一的伊藤过程X满足(E.1)式。在这种情况下，我们就说X是在时间τ时，方程(E.1)式在初始条件x下的解。

SDE中一种重要的特殊情形是线性随机微分方程：

$$\mathrm{d}X_t=[a(t)X_t+b(t)]\mathrm{d}t+c(t)\mathrm{d}B_t \tag{E.4}$$

其中$a:[0,\infty)\to\mathbb{R}^{N\times N}$，$b:[0,\infty)\to\mathbb{R}^N$和$c:[0,\infty)\to\mathbb{R}^{N\times d}$均为连续。我们可以更加明确线性SDE的解。首先，令Φ表示下述普通微分方程的解：

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}=a(t)\Phi(t),\quad \Phi(0)=I_{N\times N}$$

可以证明，对所有的 t，矩阵 $\Phi(t)$ 是非奇异的，并且(E.4)式的解为：

$$X_t = \Phi(t)\left[X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \Phi^{-1}(s)c(s)\mathrm{d}B_s\right], \quad t \geqslant 0$$

特别地，X 为高斯分布，意思是对任意有限时间 $t_1,\cdots,t_k$，$\{X(t_1),\cdots,X(t_k)\}$ 具有联合正态分布。对任意 t，X_t 的均值向量 $m(t)$ 和协方差矩阵 $V(t)$ 由下述普通微分方程的解给出：

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = a(t)m(t) + b(t), \quad m_0 = X_0$$

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = a(t)V(t) + V(t)a(t)^{\mathrm{T}} + c(t)c(t)^{\mathrm{T}}, \quad V(0) = 0$$

对此更进一步的细节和推广，可以在卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve, 1988)中找到。

下面我们来考虑柯西(Cauchy)问题。即给定 $T>0$，请找出能够解下述方程的解 $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0,T))$：

$$\mathscr{D}f(x,t) - r(x,t)f(x,t) + h(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T) \tag{E.5}$$

上式的边界条件为：

$$f(x,T) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{E.6}$$

(E.5)式中：

$$\mathscr{D}f(x,t) = f_t(x,t) + f_x(x,t)\mu(x,t) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma(x,t)\sigma(x,t)^{\mathrm{T}} f_{xx}(x,t)\right] \tag{E.7}$$

而且 $r:\mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}$，$h:\mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}$，$g:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，$\mu:\mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}^N$ 和 $\sigma:\mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}^{N\times d}$。

(E.5)式～(E.6)式的费恩曼—凯科解(如果解存在的话)由下式给出：

$$f(x,t) = E_{x,t}\left[\int_t^T \varphi_{t,s}h(X_s,s)\mathrm{d}s + \varphi_{t,T}g(X_T)\right] \tag{E.8}$$

其中

$$\varphi_{t,s} = \exp\left[-\int_t^s r(X_\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

在(E.8)式中，$E_{x,t}$ 表示 X 被假设成在时间 t 时，能够在初始条件 x 下解 SDE(E.1)。称呼“费恩曼—凯科”被认为是容易使人产生误解的说法。因为，原本“费恩曼—凯科”是指比柯西问题更宽的一类抛物线方程的概率表述。一般说来，(E.8)式会被称为 PDE (E.5)～(E.6)的概率解。

如果先把柯西问题的解的存在性这一复杂问题放在一边，那么，在一定的技术假设下，给定解的费恩曼—凯科表述本身是不难验证的。为了说明这一点，假设 X 可以解(E.1)式，以及 f 是柯西问题的一个解。对 $\mathbb{R}^N \times [0,T]$ 中的任意 (x,t)，令 Y 为由下式定义的伊藤过程：$Y_s = f(x,t)$，$s<t$ 和

$$Y_s = f(X_s,s)\varphi_{t,s}, \quad s \in [t,T]$$

其中 X 是在时间 t 时，在(E. 1)式初始条件 x 下的解。由伊藤公式：

$$Y_T = f(x,t) + \int_t^T \varphi_{t,s}[\mathscr{D}f(X_s,s) - r(X_s,s)f(X_s,s)]\mathrm{d}s + \int_t^T \varphi_{t,s} f_x(X_s,s)\sigma(X_s,s)\mathrm{d}B_s$$

上式两边取期望，再适当地重新安排，并假设有足够的可积技术条件，以及使对 B 的积分为鞅的条件(参见命题 5. 1)，我们有：

$$f(x,t) = E_{x,t}\left(\varphi_{t,T} f(X_T,T) - \int_t^T \varphi_{t,s}[\mathscr{D}f(X_s,s) - r(X_s,s)f(X_s,s)]\mathrm{d}s\right)$$

将上式代入(E. 5)式和(E. 6)式，即可得出(E. 8)式。技术性充分条件为：

(a)所有的 r、g、h、μ、σ 和 f 均连续；

(b)解 f 满足 x 上的多项增长条件，也就是说，对正常数 M 和 v，有：

$$|f(x,t)| \leqslant M(1 + \|x\|^v), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$$

(c)g 和 h 分别或者是非负，或者满足 x 上的多项增长条件；

(d)r 为非负；

(e)μ 和 σ 满足 x 上的利普斯基兹和增长条件。

让我们来更正式地表述上述内容。

命题 E. 1 假设上述条件(a)～(e)都满足，并且 f 是(E. 5)式～(E. 6)式的解，那么，(E. 5)式～(E. 6)式可以由(E. 8)式求解。(E. 5)式～(E. 6)式再没有其他解可以满足多项增长条件。

此命题的证明可以在卡拉特查斯和施莱弗(Karatzas and Shreve, 1988)的第 366 页中找到。像这种把 PDE 方程的解归纳为期望值的计算，有时可使求解问题变得容易，例如布莱克—斯科尔斯公式就是这种情况。第 12 章中所讨论的蒙特卡罗数值方法也是以期望值为基础的。费恩曼—凯科方法也可以用到其他种类的抛物线或椭圆形 PDE 的解上。

前述命题并不能说明 PDE 的解实际上是否存在。为了解决这一问题，需要设置更强的条件。文献资料有不同种类的条件。在这里，我们只是从不同的来源中给出其中的一些条件。如果存在某 $\alpha \in (0,1]$ 使得：

$$\sup_{x,y,x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} < \infty$$

那么，函数 $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ 为赫德(Holder)连续。如果局限在其定义域的某一紧性子集内时，函数具有上述特征，那么，该函数就局部地具有某特征(诸如赫德连续性)。

条件 1 函数 μ、σ、g、h 和 r 均连续，而且：

(a)μ 和 σ 均有界，并且在 (x,t) 上局部地利普斯基兹；

(b)σ 在 x 上对所有的 t 为赫德连续；

(c)r 有界，在 x 上对所有的 t 为局部赫德连续；

(d)h 在 x 上对所有的 t 为赫德连续，并且在 x 上满足多项增长条件；

(e)$\sigma\sigma^{\top}$是均匀抛物线，也就是说，对所有的$(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]$，存在某函数$\epsilon>0$使得$\sigma(x,t)\sigma(x,t)^{\top}$的特征值大于$\epsilon$；

(f)g满足多项增长条件。

我们也可以用强的光滑条件来取代条件1中的某些苛刻的有界条件以及一致椭圆特征。

条件2 所有μ、σ、g、h和r均满足x上的利普斯基兹条件，并且r为非负。所有μ、σ、g、r、h、μ_x、σ_x、g_x、r_x、h_x、μ_{xx}、σ_{xx}、g_{xx}、r_{xx}和h_{xx}均存在且连续，并且满足x上的增长条件。

定理E.1 在条件1和条件2下，(E.5)式～(E.6)式具有满足x上的多项增长条件的惟一解，并且该解由(E.8)式给出。

条件1来自弗瑞德曼(Friedman, 1975)，而条件2是克莱洛弗(Krylov, 1980)的一种特殊情况。库瓦纳(Kuwana, 1994)提供了对克莱洛弗结论的改进。不幸的是，条件1和条件2均不包含布莱克-斯科尔斯期权定价公式的情形，简单地说，就是因为期权收入在股票价格上是不可微的。

在适当的有关μ、σ和r的技术条件下，存在函数$G:\mathbb{R}^N\times[0,T]\times\mathbb{R}^N\times[0,T]\to\mathbb{R}$被称为(E.5)式～(E.6)式的基本解，或者有时也被称为格林函数，其具有下述性质：

(a)对任意$(x_0,t_0)\in\mathbb{R}^N\times[0,T)$，由$\psi(x,t)=G(x_0,t_0,x,t)$定义的函数$\psi$在$C^{2,1}(\mathbb{R}^N\times[t_0,T))$中，并且是下述PDE的解：

$$\mathscr{D}^*\psi(x,t)-r(x,t)\psi(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(t_0,T] \tag{E.9}$$

上式中，

$$\mathscr{D}^*\psi(x,t)=-\psi_t(x,t)-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}[\psi(x,t)\mu_i(x,t)]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}[a_{ij}(x,t)\psi(x,t)]$$

其中$a(x,t)=\sigma(x,t)\sigma(x,t^{\top})$。PDE(E.9)有时被称为福克-普朗克(Fokker-Planck)方程，或者向前柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)方程，从而区别于(E.5)式～(E.6)式的向后柯尔莫哥洛夫方程。

(b)在适当的有关g和h的技术性条件下，(E.5)式～(E.6)式的解是由下式给出：

$$f(x_0,t_0)=\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbb{R}^N}G(x_0,t_0,x,t)h(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{R}^N}G(x_0,t_0,x,T)g(x)\mathrm{d}x \tag{E.10}$$

方程(E.9)的一套充分的技术条件和边界条件是在弗瑞德曼(Friedman, 1964)和弗瑞德曼(Friedman, 1975)中给出的。有关基本解G的知识非常有价值，因为PDE(E.5)～(E.6)的某些特别解可以通过(E.10)式对g和h每一不同的取值计算出来。对于$N=1$的情形，第12章简要地讨论了G的数值解法。

有关PDE的概率解的进一步研究工作，可以在弗瑞德林(Freidlin, 1985)中找到。

F

伊藤公式与跳跃

本附录把伊藤公式推广到更为一般的情形，即允许存在跳跃的某些简单情形。包含更进一步推广的参考资料还有普罗特(Protter, 1990)。

我们先建立一些基本的定义。我们锁定完整的概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$，以及满足下述通常条件的过滤$\{\mathcal{G}_t:t\geqslant 0\}$：

- 对所有的t，$\mathcal{G}_t$包含$\mathcal{F}$的所有空集；
- 对所有的t，$\mathcal{G}_t=\bigcap_{s>t}\mathcal{G}_s$称为右连续特征。

如果对所有的t，我们有$Z_t=\lim_{s\downarrow t}Z_s$，那么，函数$Z:[0,\infty)\to\mathbb{R}$为左连续。如果$Z_{t-}=\lim_{s\uparrow t}Z_s$存在，那么，该过程具有左极限。最后，如果$Z_t=\lim_{s\downarrow t}Z_s$，那么，该过程为右连续。$Z$在时间$t$的跳跃$\Delta Z$为$\Delta Z_t=Z_t-Z_{t-}$。

在通常条件下，就我们的应用而言，我们可以不失一般性地假设鞅的样本路径几乎肯定是右连续的，并且存在左极限。读者可以参见普罗特(Protter, 1990)第8页。有时此种情况也被作为鞅的一个定义性的特征，例如在杰科德和肖叶弗(Jacod and Shiryaev, 1987)中就是如此。

引理F.1 假设Q等价于P，并且密度过程为ξ。那么，当且仅当ξY是P鞅时，右连续并具有左极限的适应过程Y为Q鞅。

该引理的证明可以立即从附录C中$E^Q(\cdot|\mathcal{G}_t)$的计算里得出。

如果$X=U-V$，其中U和V均为右连续并具有左极限递增适应过程，那么，过程x是有限方差过程。如果$X_t=\int_0^t\delta_s\mathrm{d}s$，其中$\delta$是能够使积分存在的适应过程，那么，$X$是有限方差。下面的引理是伊藤公式的变形：

引理F.2 假设X是有限方差过程，并且$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续可微分，那么：

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_{0+}^{t}f'(X_{s-})\mathrm{d}X_s+\sum_{0<s\leqslant t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s]$$

这一结论可以在普罗特(Protter,1990)第71页中找到。

我们现在来描述在本书中只是偶尔用到的伊藤公式的另一种版本。其证明和推广可参见普罗特(Protter,1990)。所谓的半鞅是具有形式 $V+M$ 的过程,其中 V 是有限方差过程,M 是局部鞅。

引理 F.3 假设 X 和 Y 均为半鞅,并且其中至少有一个是有限方差过程。令 $Z=XY$。那么,Z 是半鞅且

$$dZ_t = X_{t-}\,dY_t + Y_{t-}\,dX_t + \Delta X_t \Delta Y_t \tag{F.1}$$

我们现在来推广上述两条定理。在这一点上,B 表示 $\mathbb{R}^d$ 中的标准布朗运动。

引理 F.4 假设 $X = M + A$,其中 A 为有限方差过程,以及 $M_t = \int_0^t \sigma_u\,dB_u$,其中 σ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的适应过程并满足:对所有的 t,$\int_0^t \sigma_s \cdot \sigma_s\,ds < \infty$ 几乎肯定成立。假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是两次连续可微的,那么:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{0+}^{t} f'(X_{s-})\,dX_s + \sum_{0<s\leqslant t}\left[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s\right] + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s \cdot \sigma_s\,ds$$

引理 F.5 假设 $dX_t = dA_t + \sigma_t dB_t$ 和 $dY_t = dC_t + v_t dB_t$,其中 A 和 C 均为有限方差,以及 σ 和 v 均为 $\mathbb{R}^d$ 中满足下述条件的适应过程:对所有的 t,$\int_0^t \sigma_s \cdot \sigma_s\,ds$ 和 $\int_0^t v_s \cdot v_s\,ds$ 均为有限几乎肯定成立。令 $Z = XY$,那么,Z 是半鞅,且

$$dZ_t = X_{t-}\,dY_t + Y_{t-}\,dX_t + \Delta X_t \Delta Y_t + \sigma_t \cdot v_t\,dt \tag{F.2}$$

针对泊松过程 N 或任意计数过程(附录 I 中有定义),我们可以很容易地定义随机积分。对任意适应过程 θ,可以令:

$$\int_0^T \theta_t\,dN_t = \sum_{\{i:\,0<T_i\leqslant T\}} \theta(T_i) \tag{F.3}$$

根据泊松过程的概念,我们可以定义一个连续时间马尔可夫链。我们假设该过程只有二种可能的状态情形,例如说 0 和 1。在状态 0 时,一段时间之后,该过程 Z 移动到状态 1 的概率为指数函数分布,参数为 $\lambda(0)$。在状态 1 时,一段时间之后,该过程移动到状态 0 的概率也为指数函数分布,其参数为 $\lambda(1)$。更准确地说,Z 是下述随机微分过程的解:

$$dZ_t = \gamma_0(Z(t-))\,dN_t^{(0)} + \gamma_1(Z(t-))\,dN_t^{(1)} \tag{F.4}$$

其中 $N^{(0)}$ 和 $N^{(1)}$ 为独立泊松过程,其密度参数分别为 $\lambda(0)$ 和 $\lambda(1)$,且:

$$\gamma_0(0) = -\gamma_1(1) = 1;\quad \gamma_0(1) = \gamma_1(0) = 0$$

初始条件 Z_0 要么是 0,要么是 1。这可以很容易推广到具有 n 种状态的情形。

我们容易看出,由下式定义的"补偿"过程 M:

$$dM_t = -\lambda(Z_t)\gamma_{Z(t)}(Z_t)\,dt + dZ_t$$

是鞅。而且，如上所述，对于由(B,Z)产生的过滤，(B,M)有鞅表述特征(参见附录Ⅰ中的定义)。

我们提示，由于Z具有可数的跳跃(几乎肯定为真)，因此，对任意f，不管我们写$\int f(Z_t)\mathrm{d}t$，还是$\int f(Z_{t-})\mathrm{d}t$，都不产生什么区别，因为$f(Z_t)$和$f(Z_{t-})$可能存在的最大不同是在可数的点集上。这一提示类似地适用于下述所有针对t的积分。

我们现在来拓展伊藤公式的一些简单应用。此时，Z要么是参数为λ的泊松过程，要么是如上所述的连续时间马尔可夫链。假设S和U为如下所定义的过程：

$$\mathrm{d}S_t=\mu_S(t)\mathrm{d}t+\sigma_S(t)\mathrm{d}B_t+\beta_S(t)\mathrm{d}Z(t)$$

$$\mathrm{d}U_t=\mu_U(t)\mathrm{d}t+\sigma_U(t)\mathrm{d}B_t+\beta_U(t)\mathrm{d}Z(t)$$

其中μ_S、μ_U、σ_S、σ_U、β_S和β_U是能使上述积分存在的适应过程，并且β_S和β_U左连续。

令$f:\mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$为两次连续可微，并且令$U_t=f(S_t,t)$。引理4告诉我们：

$$\mathrm{d}U_t=\delta(t)\mathrm{d}t+f_x(S_t,t)\sigma_S(t)\mathrm{d}B_t+f(S_t,t)-f(S_{t-},t) \tag{F.5}$$

其中

$$\delta(t)=f_t(S_t,t)+f_x(S_t,t)\mu_S(t)+\frac{1}{2}f_{xx}(S_t,t)\parallel\sigma_S(t)\parallel^2$$

你可能已经注意到，一般来说，δ并不一定是U的条件期望变化率，因为(F.5)中的"跳跃"项$f(S_t,t)-f(S_{t-},t)$引入了另一种期望变化的来源。事实上，假定f在其第一个的变量(S_t)上满足增长条件，我们有：

$$\mathrm{d}U_t=\mu_U(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}Y_t$$

其中Y是局部鞅，而且对于Z是抵达强度为λ的泊松过程情形来说，

$$\mu_U(t)=\delta(t)+\lambda[f(S_{t-}+\beta_S(t),t)-f(S_{t-},t)] \tag{F.6}$$

(F.6)中的最后一项表示跳跃的期望抵达率乘以时间t的跳跃大小，假定在时间t有一个跳跃发生。如果Z是连续时间t的马尔可夫链(F.4)，那么，

$$\mu_U(t)=\delta(t)+\lambda(Z_{t-})[f(S(t-)+\beta_S(t)\gamma_{Z(t-)}(Z_{t-},t)-f(S_{t-},t)] \tag{F.7}$$

更一般地，令$f:\{0,1]\times\mathbb{R}\times[0,T]\to\mathbb{R}$对其最后两个变量为二次连续可微，并且令$U_t=f(Z_t,S_t,t)$。我们再令$f_x$和$f_{xx}$表示针对第2个变量$(S_t)$的偏导数。那么，

$$\mathrm{d}U_t=\delta(t)\mathrm{d}t+f_x(Z_t,S_t,t)\sigma_S(t)\mathrm{d}B_t+f(Z_t,S_t,t)-f(Z_{t-},S_{t-},t) \tag{F.8}$$

其中：

$$\delta=f_t(Z_t,S_t,t)+f_x(Z_t,S_t,t)\mu_S(t)+\frac{1}{2}f_{xx}(Z_t,S_t,t)\parallel\sigma_S(t)\parallel^2$$

而且，对于Y局部鞅和$\mu_U(t)=\delta(t)+\lambda(Z_{t-1})J_t$，有$\mathrm{d}U_t=\mu_U(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}Y_t$，其中：

$$J_t=f(Z_{t-}+\gamma_{Z(t-)}(Z_{t-}),S_{t-}+\gamma_{Z(t-)}(Z_{t-})\beta_S(t),t)-f(Z_{t-},S_{t-},t)$$

是在时间t的一个跳跃的大小(假定那时有一个跳跃发生)。

G

效用梯度

本附录给出了连续时间情形下效用梯度的一些计算例子。更多的例子可以在达菲和思凯达斯(Duffie and Skiadas, 1994)中找到。关于这方面的进一步研究工作,可以参见施洛德和思凯达斯(Schroder and Skiadas, 1997,1999,2000)。

先让我们回忆一下中值定理:如果 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续的,并且在 (a,b) 上有导数,那么,存在某个 $c\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$。

我们锁定概率空间和时间区间 $[0,T]$。如果 $E(\int_0^T c_t^2\,dt)<\infty$,那么,过程 $c:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ 为平方可积的(square-integrable)。令 L 表示平方可积过程空间,L_+ 表示 L 中的非负过程空间。我们回忆附录 B 中的函数 $U:L_+\to\mathbb{R}$,当它在 $c\in L_+$ 处被很好地定义时,其梯度由下述公式给出:

$$\nabla U(c;h)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{U(c+\alpha h)-U(c)}{\alpha},\quad h\in F(c)$$

其中 $F(c)$ 是在 c 处所有可能的方向集合。

先考虑由下式定义的可加型的效用函数 U:

$$U(c)=E\left[\int_0^T u(c_t,t)\,dt\right]$$

其中 u 是连续的,并且对每一个 t,$u(\cdot,t)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续可微。同时,对于独立于 t 的常数 k,$u(\cdot,t)$ 的导数 $u_c(\cdot,t)$ 满足增长条件 $|u_c(y,t)|\leqslant k+ky$。令 $c\in L_+$ 和 $h\in F(c)$。令 $\{\alpha_n\}$ 为任意小于 1 且收敛于 0 的严格为正的系数序列。对于每一个 n、ω 和 t,应用中值定理,令 $\zeta_{n,t}(\omega)$ 被选定以使得下式成立:

$$u_c[c_t(\omega)+\zeta_{n,t}(\omega),t]\alpha_n h_t(\omega)=u[c_t(\omega)+\alpha_n h_t(\omega),t]-u[c_t(\omega),t]$$

实际上,这样做的结果说明 ζ_n 是 L_+ 中的过程。因此,对所有的 n,有:

$$\left|\frac{u(c_t+\alpha_n h_t,t)-u(c_t,t)}{\alpha_n}\right|=|u_c(c_t+\zeta_{n,t},t)h_t|$$

$$\leqslant(k+k|c_t+\zeta_{n,t}|)|h_t|$$

$$\leqslant (k+k|c_t|+k\alpha_n|h_t|)|h_t|$$
$$\leqslant y_t \equiv (k+k|c_t|+|h_t|)|h_t|$$

而且，由于 c 和 h 均在 L 中，由柯西—施瓦茨（Cauchy-Schwartz）不等式可知，$E(\int_0^T |y_t|\mathrm{d}t)<\infty$。控制收敛定理意味着：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u(c+\alpha_n h)-U(c)}{\alpha}=E\left[\int_0^T \lim_n u_c(c_t+\zeta_{n,t},t)h_t\mathrm{d}t\right]$$
$$=E\left[\int_0^T u_c(c_t,t)h_t\mathrm{d}t\right]$$

这是因为对所有的(ω,t)，$\zeta_{n,t}(\omega)$收敛于 0。因此，对任意 $h\in F(c)$，有：

$$\nabla U(c;h)=E\left(\int_0^T \pi_t h_t\mathrm{d}t\right)$$

上式中 $\pi_t=u_c(c_t,t)$。这意味着，U 在 c 处的梯度存在，并且具有利茨表述 π。

假设对任意$\epsilon>0$，u_c 满足上述给出的局限于$(\epsilon,\infty)\times[0,T]$上的增长条件（但不一定在整个定义域$[0,\infty)\times[0,T]$上）。这一点很重要，例如在处理英纳达（Inada）条件时，正如在 $u(x,t)=e^{-\beta t}x^{\alpha}$ 的例子中一样，在那种情形下，只要给定的消费过程 c 的下界在 0 以上，上述计算就可以延伸得到效用梯度的同样解。也就是说，对于$\epsilon>0$，假设对所有的 t，有 $c_t\geqslant\epsilon$。为了使其成为可行方向，对于 $\delta\in(0,1)$，$c+\delta,h\geqslant 0$。所以，对所有 $\alpha\in(0,\delta/2)$，$c+\alpha h$ 的下界必须是在 0 以上。而且，上述所有计算均可在此种情形中进行。这一情形正好覆盖了定理 10.2 所描述的均衡，在那里，任意行为人 i 的消费过程 c^i 确实是下界在 0 以上。

我们现在把这一方法延伸到递归和习惯养成效用函数的连续时间版本的梯度计算中来。为此，我们锁定在附录 F 中给出的满足通常条件的族集过滤$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t:t\in[0,T]\}$。我们令 $f:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为联合可测函数，并满足下述条件：

(a)对每一个固定的(z,v)，$f(\cdot,\cdot,z,v)$为适应过程。

(b)效用上的一致利普斯基兹条件：对所有的(ω,t,z,u,v)，存在常数 K 使得$|f(\omega,t,z,u)-f(\omega,t,z,v)|\leqslant K|u-v|$。

(c)一致增长条件：存在某个常数 K，使得对所有的(ω,t,z)，我们有$|f(\omega,t,z,0)|\leqslant K(1+\|z\|)$。

函数 f 是一个“福气”(felicity)函数。它的第一个变量和第二个变量，即“ω”和“t”，允许“福气”依赖于状态和时间。第三个自变量“z” 允许“福气”通过 n 个变量依赖于目前和过去的消费。最后一个变量“v”允许“福气”依赖于效用本身。在可加型的模型中，具有“福气”$f(\omega,t,z,v)=u(z,t)$，其中 z 表示目前的消费。固定 L_+ 中所给定的消费过程 c，我们希望定义效用过程 V 为伊藤过程，其当期水平 V_t 对应于其剩余消费的当期效用。例如，在可加型模型中，我们有 $V_t=E_t\left[\int_t^T u(c_s,s)\mathrm{d}s\right]$。一般来说，我们会定义“福气”为 f 的消费 c 的效用为 $U(c)=V_0$。

下面我们给出达菲和爱普斯坦恩(Duffie and Epstein, 1992b)中的存在性结论。

定理 G.1 给定 L^n 中的任意 $Z=(Z_1,\cdots,Z_n)$，存在任意惟一的过程 V 使得：

$$V_t = E_t\left(\int_t^T f(s,Z_s,V_s)\mathrm{d}s\right), \quad t\in[0,T]$$

在写"$f(s,Z_s,V_s)$"时，我们从中省去了 ω。

对递归效用的连续时间情形，即所谓的随机微分效用，是由达菲和爱普斯坦恩(Duffie and Epstein, 1992b)首先提出，可以令 $n=1$ 和 $Z=c$(消费过程)，从而来应用上述成果。对于习惯养成效用的连续时间版本，是由瑞德和希尔(Ryder and Heal, 1973)和桑达尔森(Sundaresan, 1989)推出，并由康斯坦丁尼德斯(Constantinides, 1990)，迪特姆普勒和查帕特罗(Detemple and Zapatero, 1991, 1992)加以应用。我们可以取 $n=2$，并且令：

$$Z_{1t} = c_t$$

$$Z_{2t} = Z_{20} + \int_0^t H(c_s,Z_s)\mathrm{d}s, \quad t\in[0,T]$$

对满足下述条件的可测函数 $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，在其第二个变量上为一致利普斯基兹，并且在其第一个变量上满足增长条件[关于单调性问题，可参见查普曼(Chapman, 1997)]。将这个例子延伸到 H 依赖于状态和时间的情形并不困难。我们可以计算新定义的效用函数的梯度的利茨表述。为此，我们假设 f 对 (z,v) 是连续可微的，并且存在常数 K 使得：

$$\| f_z(\omega,t,z,v)\| \leqslant K(1+\|z\|), \quad (\omega,t,z,v)\in[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$$

在上式中，下标表示针对该变量的偏导数(下同)。对于习惯养成的效用情形，我们同样假设 H 是连续可微的，其对消费的偏导数 H_c 满足一致增长条件，而且 H_z 有界。也就是说，存在常数 K，使得对所有的 (c,z)，$|H_c(c,z)|\leqslant K(1+|c|)$。

有了这些新的效用函数，并且在已陈述的假设下，对任意严格为正的消费过程 c，我们再次得出下述形式的效用梯度：

$$\nabla U(c;h) = E\left(\int_0^T \pi_t h_t \mathrm{d}t\right)$$

式中 π 为利茨表述，对于随机微分效用，它是由下式给出：

$$\pi_t = Y_t f_z(t,Z_t,V_t)$$

式中 $Y_t = \exp\left(\int_0^t f_v(s,Z_s,V_s)\mathrm{d}s\right)$，并且对于习惯养成效用，我们有：

$$\pi_t = Y_t\left[E_t\left(\int_t^T f_z(s,Z_s,V_s)\exp\left(\int_s^t (f_v(u)+H_z(u))\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right)H_c(t)+f_c(t)\right]$$

其中一些明显的自变量被省略了。有关这些梯度表述的证明，以及对更一般情形的推广，可以在达菲和思凯达斯(Duffie and Skiadas, 1994)中找到。

辛迪和黄(Hindy and Huang, 1992)提出了习惯养成效用的另一种表达方法，从而拓展了辛迪、黄和克莱普斯(Hindy, Huang and Kreps, 1992)的研究成果。通过下述处

理，他们的模型可以被本附录的情形所包含：取 $n=1$ 和 $Z_t=\int_0^t k_{t-s}\mathrm{d}C_s$，其中 k 为有界适应过程，C 是定义累积消费的递增右连续适应过程。对于绝对连续累积消费和 $c\in L_-$ 的情形，我们有 $C_t=\int_0^t c_s\mathrm{d}s$。一般来说，消费可以跳跃式地发生。这种情形下的梯度计算，可以在达菲和思凯达斯(Duffie and Skiadas，1994) 中找到。

H

复变函数下的伊藤公式

本附录给出了第 8 章的转换计算中所出现过的把伊藤公式应用到复变函数所必需的一些最起码的规则。

既然虚数通常记为 $i=\sqrt{-1}$，那么，复数的形式即为 $z=a+bi$，其中 a、b 为实数。z 的实数部分是 a，虚数部分是 ib。复数的集合被称为 C，它是“实行配对计算”的二维向量空间，例如 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$，以及 $k(a,bi)=(ka,kbi)$，其中 a、b、c、d 和 k 均为实数。复数的乘法法则由下式给出：

$$(a+b\,i)\times(c+di)=a\,c+a\,di+b\,ci+b\,di^2=(a\,c-b\,d)+(a\,d+b\,c)i$$

我们也可以定义 $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$（它可以由更深奥的公理运算而得）。对复数 $z=a+bi$，你可以将 e^z 处理成复数 $e^{a+bi}=e^a e^{bi}$。可以验证，对于两个复数 z 和 w，我们有 $e^w e^z=e^{w+z}$ 和 $e^w/e^z=e^{w-z}$。

复数 $a+bi$ 的模被定义为 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，平方根 $\gamma=\sqrt{a+bi}$ 被定义为 $\gamma=|\gamma^2|^{1/2}\times\exp(i\arg(\gamma^2)/2)$，其中 $\gamma^2=a+bi$，以及对任意 $z\in\mathbb{C}$，$\arg(z)$ 被定义成使得 $z=|z|\exp(i\arg(z))$ 成立，并且 $-\pi<\arg(z)\leqslant\pi$。对任意 $z\in\mathbb{C}$，$\ln(z)=\ln|z|+i\arg(z)$，就像被定义在“主枝”(principal branch)上一样。

对某些特定的复变函数的微分有专门的定义和规则，被称为是解析的(analytic)。在此，我们只需从中给出部分事实：

(a)$z\mapsto e^z$ 是解析的且 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z=e^z$。

(b)对整数 $n\geqslant 1$，$z\mapsto z^n$ 是解析的，并且 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^n=nz^{n-1}$。

(c)只要 f 和 g 是解析的，链式规则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(g(z))=f'(g(z))g'(z)$ 就是适用的。

如果伊藤过程 Y 是取复数的[也就是说，对取实数的伊藤过程 Y_R 和 Y_I，$Y=(Y_R+$

$Y_t i)]$，那么，我们就可以通过应用伊藤公式得到：对任意解析的 g，$g(Y_t)$ 为取复数的伊藤过程。我们这里只需要考虑上述(a)和(b)中所列的指数和多项形式的 g。特别地，我们对下述过程的概括很有兴趣：$Z=e^{Y}$，其中 $Y(t)=\alpha(t)+\beta(t)\cdot X(t)$，$X$ 是取值为 $\mathbb{R}^k$ 型的(实)伊藤过程，以及 $\alpha:[0,T]\to\mathbb{C}$ 和 $\beta:[0,T]\to\mathbb{C}^d$ 为解析的。一般来说，对扩散分别为 σ_a 和 σ_b 的实数伊藤过程 $Y^{(a)}$ 和 $Y^{(b)}$，如果 $Y=Y^{(a)}+iY^{(b)}$，那么，我们就记 Y 的扩散为 $\sigma_Y=\sigma_a+i\sigma_b$，伊藤公式为：

$$g(Y_t)=g(Y_0)+\int_0^t g'(Y_s)\mathrm{d}Y_s+\int_0^t\frac{1}{2}g''(Y_s)\sigma_Y(s)\cdot\sigma_Y(s)\mathrm{d}s$$

这是由普罗特(Protter，1990) 第 76 页的定理 35 得出。

I

计数过程

本附录将重温基于强度的计数过程模型基本理论。布莱芒德(Brémaud, 1981)是这方面的标准的参考资料。

下述所有特征均是针对概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$并满足通常条件(附录 F)的给定过滤$\{\mathcal{G}_t:t\geqslant 0\}$而陈述的(除非另有说明)。我们有时使用通常的简写,就像"$(\mathcal{F}_t)$适应的"这样,来描述针对一些其他过滤$\{\mathcal{F}_t:t\geqslant 0\}$的特征。

如果$Y:\Omega\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$对由所有左连续适应过程集所产生的族集$\Omega\times[0,\infty)$是可测的,那么,过程$Y$就是可预测的。这意味着人们基于目前为止(但不包括时间t)所能得到的信息便可以预先知道Y_t。当然,任意左连续的适应过程都是可预测的,就像任何连续过程一样。

计数过程N有时也被称为点过程,它是由取值于$[0,\infty]$的随机变量的递增序列$\{T_0,T_1,\cdots\}$(而且$T_0=0$;当$T_N<\infty$时,$T_n<T_{n+1}$),根据

$$N_t=n,\quad t\in[T_n,T_{n+1}) \tag{I.1}$$

而定义的。

在上式中,如果$t\geqslant\lim_n T_n$,那么,我们定义$N_t=+\infty$。我们可以将T_n处理成N的第n次跳跃,N_t则为到时间t为止(包括时间t)所发生的跳跃次数。如果$\lim T_n=+\infty$几乎肯定成立,那么,计数过程则是非爆炸性的(nonexplosive)。

"强度"的定义会因场所不同而稍微有所改变。你可以参见布莱芒德(Brémaud, 1981)第 II. 3 节,特别是定理 T8 和定理 T9,将其他地方的定义与下述定义进行比较:令λ为非负可预测过程,使得对所有的t,我们有$\int_0^t\lambda_s\mathrm{d}s<\infty$几乎肯定成立。因此,如果$\left\{N_t-\int_0^t\lambda_s\mathrm{d}s:t\geqslant 0\right\}$是局部鞅,那么,非爆炸性适应计数过程$N$具有强度$\lambda$。

根据布莱芒德定理 T12,通常就我们的目的而言,可能仍像上面一样要求强度是可预

测的，而且我们可以把强度处理成在实质上是惟一的，即如果 λ 和 $\tilde{\lambda}$ 为如上所定义的 N 的两个强度，那么，

$$\int_0^\infty |\lambda_s - \tilde{\lambda}_s| \lambda_s ds = 0 \quad \text{几乎肯定成立} \tag{I.2}$$

我们注意到，如果 λ 是严格为正的，那么，(I.2)意味着 $\lambda = \tilde{\lambda}$ 几乎处处成立。

在下述的技术条件下，我们可以在上述强度的局部鞅特征概括中去掉令人厌烦的"局部"两字[此点可以从布莱芒德(Brémaud, 1981)的定理 T8 和定理 T9 中得到验证]。

命题 I.1 假设 N 为适应计数过程，并且 λ 为非负可预测过程，使得对所有的 t，$E(\int_0^t \lambda_s ds) < \infty$。那么，下述两个陈述是等价的：

(i) N 为非爆炸性的，并且 λ 是 N 的强度；

(ii) $\{N_t - \int_0^t \lambda_s ds : t \geqslant 0\}$ 是一个鞅。

命题 I.2 假设 N 是强度为 λ 的非爆炸性适应计数过程，并且对所有的 t，$\int_0^t \lambda_s ds < \infty$ 几乎肯定成立。令 M 是由 $M_t = N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ 定义，那么，对任意可预测过程 H 和所有的 t，$\int_0^t |H_s| \lambda_s ds$ 是有限的几乎肯定成立，并存在由下式定义的局部鞅 Y：

$$Y_t = \int_0^t H_s dM_s = \int_0^t H_s dN_s - \int_0^t H \lambda_s ds$$

而且，如果 $E[\int_0^t |H_s| \lambda_s ds] < \infty$，那么，$Y$ 是一个鞅。

为了定义泊松过程，我们先来回忆一下泊松分布。如果

$$P(K=k) = e^{-\beta} \frac{\beta^k}{k!}$$

并且按传统惯例 $0! = 1$，那么，具有结果 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的随机变量 K 服从参数为 β 的泊松分布。泊松过程是非爆炸性的计数适应过程 N，对所有的 t，其确定型强度 λ 使得 $\int_0^t \lambda_s ds$ 是有限的几乎肯定成立，并且满足下述特征：对所有的 t 和 $s > t$，在 $\mathcal{G}_t$ 的条件下，随机变量 $N_s - N_t$ 具有参数为 $\int_t^s \lambda_u du$ 的泊松分布[参见布莱芒德(Brémaud, 1981)，第 22 页]。

我们还记得，如果对所有的 t，$\mathcal{G}_t$ 是 $\sigma(\{Y_s : 0 \leqslant s \leqslant t\})$ 的完全，那么，$\{\mathcal{G}_t : t \in [0,T]\}$ 是取值在欧基里德空间的过程 Y 的被增过滤(augmented filtration)。

假设 N 是非爆炸性的强度为 λ 的计数过程，$\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ 是满足通常条件的过滤，并且 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$。如果 λ 是 (F_t) 可预测的，以及对所有的 t 和 $s > t$，在由 $\mathcal{G}_t \cup \mathcal{F}_t$ 产生的族集 $\mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_t$ 的条件下，$N_s - N_t$ 具有参数为 $\int_t^s \lambda_u du$ 的泊松分布，那么，我们就说 N 是被 $\{\mathcal{F}_t : t$

$\geqslant 0\}$ 双重随机地驱使。对于满足通常条件的马尔可夫过程 X 所产生的过滤 $\{\mathscr{F}_t : t \geqslant 0\}$ 的条件，可参见钟(Chung, 1982) 的定理 4，第 61 页。

应该强调的是，出于上述定义的目的，过滤 $\{\mathscr{G}_t : t \geqslant 0\}$ 已经被事先固定了。在涉及双重随机过程的应用中，通常先按下述方法构造基础过滤 $\{\mathscr{G}_t : t \geqslant 0\}$。首先，使过滤 $\{\mathscr{F}_t : t \geqslant 0\}$ 满足通常条件，而且我们有 $(\mathscr{F}_t)$ 可预测的过程 λ，使得对所有的 t，$\int_0^t \lambda_s \mathrm{d}s < \infty$ 几乎肯定成立。然后，我们令 $Z_1, Z_2, \cdots$ 为独立标准指数随机变量[即满足 $P(Z_i > z) = e^{-z}$]，这些变量对所有的 t，均独立于 $\mathscr{F}_\infty$。我们再令对 $n \geqslant 1$，有 $T_0 = 0$。最后，令 T_n 由下述迭代法给出：

$$T_n = \inf\left\{t \geqslant T_{n-1} : \int_{T_{n-1}}^t \lambda_u \mathrm{d}u = Z_n\right\} \tag{I,3}$$

现在，我们便可以根据(I.1) 式来定义 N(这种构造方法也可用于 N 的跳跃次数的蒙特卡罗模拟)。最后，对每一个 t，我们令 $\mathscr{G}_t$ 是由 $\mathscr{F}_t$ 和 $\{N_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ 产生的族集。通过这种构造方法，相对于过滤 $\{\mathscr{G}_t : t \geqslant 0\}$ 来说，N 是非爆炸性计数过程，其强度 λ 由 $\{\mathscr{F}_t : t \geqslant 0\}$ 双重随机驱动。在实例中，$\{\mathscr{F}_t : t \geqslant 0\}$ 通常是由状态过程产生的过滤，例如，这种过程可以是随机微分方程的解。

下面，我们来重温一下此种情形下的鞅表述定理。我们把注意力集中在固定的时间区间 $[0, T]$ 上。我们认为，$\mathbb{R}^k$ 中的局部鞅 $M = (M^{(1)}, \cdots, M^{(k)})$ 具有鞅表述特征(martingable representation property)，如果对任意鞅 Y，存在使得随机积分 $\int H^{(i)} \mathrm{d}M^{(i)}$ 对每个 i 均有定义的可预测过程 $H^{(1)}, \cdots, H^{(k)}$，并且

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^k \int_0^t H_s^{(i)} \mathrm{d}M_s^{(i)}, \quad \text{几乎肯定成立}, \quad t \in [0, T]$$

下面的结论表述是来自于布莱芒德(Brémaud, 1981)。

命题 I.3 假设 $N = (N^{(1)}, \cdots, N^{(k)})$，其中 $N^{(i)}$ 为非爆炸性计数过程，相对于 N 的被增过滤 $\{\mathscr{G}_t : t \in [0, T]\}$，其具有强度 $\lambda^{(i)}$。令 $M_t^{(i)} = N_t^{(i)} - \int_0^t \lambda_s^{(i)} \mathrm{d}s$。那么，$M = (M^{(1)}, \cdots, M^{(k)})$ 具有鞅表述特征 $\{\mathscr{G}_t : t \in [0, T]\}$。

命题 I.4 对于给定概率空间，令 $N = (N^{(1)}, \cdots, N^{(k)})$，其中 $N^{(i)}$ 为泊松过程，相对于 N 自身所产生的被增过滤，其具有强度 $\lambda^{(i)}$。令 B 为 $\mathbb{R}^d$ 中独立于 N 的标准布朗运动，并且令 $\{\mathscr{G}_t : t \geqslant 0\}$ 是由 (B, N) 所产生的被增过滤。那么，$N^{(i)}$ 具有 $(\mathscr{G}_t)$ 强度 $\lambda^{(i)}$，$(\mathscr{G}_t)$ 鞅 $M^{(i)}$ 是由 $M_t^{(i)} = N_t^{(i)} - \int_0^t \lambda_s^{(i)} \mathrm{d}s$ 定义的，而且 $(B^{(1)}, \cdots, B^{(d)}, M^{(1)}, \cdots, M^{(k)})$ 具有鞅表述特征 $\{\mathscr{G}_t : t \geqslant 0\}$。

我们也可以按下述方法来推广这些成果：我们可以令 $N^{(i)}$ 是由 $\mathbb{R}^d$ 中标准布朗运动的标准过滤所驱动的双重随机过程。对于由 (B, N) 产生的被增过滤，定义 $M^{(i)}$ 为 $N^{(i)}$ 的

补偿计数过程，那么，$\{B^{(1)},\cdots,B^{(d)},M^{(1)},\cdots,M^{(k)}\}$ 具有鞅表述特征。相关的细节和技术性条件，可参见库舒卡(Kusuoka，1999b)。关于鞅表述的更多内容，可参见杰科德和肖叶弗(Jacod and Shiryaev，1987)。

下面，我们来讨论基尔萨诺夫定理。假设 N 是强度为 λ 的非爆炸性计数过程，φ 为严格为正的可预测过程，并且使得对某个固定时间 T，$\int_0^T \varphi_s\lambda_s ds$ 是有限的几乎肯定成立。那么，局部鞅 ξ 则由下式定义：

$$\xi_t = \exp\left(\int_0^t (1-\varphi_s)\lambda_s ds\right) \prod_{i:\,T(i)\leqslant t} \varphi_{T(i)}, \quad t \leqslant T \tag{I.4}$$

其中 $T(i)$ 表示 K 的第 i 次跳跃。

命题 I.5 假设局域鞅 ξ 是一个鞅。该假设的充分条件是：λ 有界且为确定型，并且 φ 有界。那么，等价概率测度 Q 是由 $\frac{dQ}{dP} = \xi(T)$ 定义。给定时间区间为 $[0,T]$，在概率测度 Q 下，N 是强度为 $\lambda\varphi$ 的非爆炸性计数过程。

该命题的证明过程与布莱芒德(Brémaud，1981)，第 168 页中的证明几乎相同，都需要用到附录 F 中的引理 F.1 和引理 F.2。

若是再借助额外的可测性条件，我们便可以描述与给定的强度变化相对应的概率测度变化，而假设在这一变化过程中，随机过程的双重随机性质保持不变。

命题 I.6 假设 N 由 $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ 双重随机驱动，强度为 λ，其中 $\mathcal{G}_t$ 是 $\mathcal{F}_t \vee \sigma(\{N_s : 0 \leqslant s \leqslant t\})$ 的完全。对于固定时间 $T>0$，令 φ 为 $(\mathcal{F}_t)$ 可预测过程，且 $\int_0^T \varphi_t\lambda_t dt < \infty$ 几乎肯定成立。令 ξ 由(I.4)式定义，并且假设 ξ 是一个鞅(若 λ 和 φ 有界，即足以满足这一点)。令 Q 是由 $\frac{dQ}{dP} = \xi_T$ 定义的概率测度。那么，给定时间区间 $[0,T]$，在概率测度 Q 下，对于过滤 $\{\mathcal{G}_t : 0 \leqslant t \leqslant T\}$，$N$ 是由 $\{\mathcal{F}_t : t \in [0,T]\}$ 双重随机驱动，其强度为 $\lambda\varphi$。

这里我们再对上述命题的证明做个简单说明。我们注意到，由命题 I.5 可知，在 Q 下，N 是非爆炸性计数过程，并具有 $(\mathcal{G}_t)$ 强度 $\lambda\varphi$，该强度是 $(\mathcal{F}_t)$ 可预测的。而且，ξ 是针对过滤 $\{\mathcal{H}_t : t \in [0,T]\}$ 的 P 鞅，过滤 $\mathcal{H}_t$ 被定义为 $\sigma(\{N_s : s \leqslant t\} \vee \mathcal{F}_t)$ 的完全。(要验证上述鞅的充分条件，我们可以应用布莱芒德(Brémaud，1981)，第 168 页中的论点，即 P 下的双重随机性质和期望迭代法则。)现在，我们利用布莱芒德(Brémaud，1981) 第 22 页中的特征来概括(1.8)式，并应用伊藤公式(附录 F)可以得出：在 Q 下，针对 $\{\mathcal{H}_t : t \in [0,T]\}$，计数过程 N 是双重随机，并且由 $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ 驱动，其强度为 $\lambda\varphi$。最后，只要下式成立，我们就可得出结论，即当 $s>t$ 时，运用 $\mathcal{G}_t$ 的定义，以及事实 $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$，我们有：

$$\begin{aligned} Q(N_s - N_t = k \mid \mathcal{G}_t \vee \mathcal{F}_s) &= Q(N_s - N_t = k \mid \sigma\{N_u : 0 \leqslant u \leqslant t\} \vee \mathcal{F}_s) \\ &= Q(N_s - N_t = k \mid \mathcal{H}_t) \end{aligned}$$

最后，我们来计算在某些规则性条件下，由某过滤驱动，并且具有强度 λ 的双重随机停止时间 τ 的密度和风险率(hazard rate)。

令 $p(t)=P(\tau>t)$ 定义生存函数(survival function) $p:[0,\infty)\to[0,1]$，那么，停止时间 τ 的密度为 $\pi(t)=-p'(t)$(如果该密度存在)，并且风险函数(hazard function) $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 由下式定义：

$$h(t)=\frac{\pi(t)}{p(t)}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log p(t)$$

那么，我们可以得出：

$$p(t)=e^{-\int_0^t h(u)\mathrm{d}u}$$

你还可以用类似的方法定义 $\mathcal{G}_t$ 条件下的密度和风险率。

现在，由于 $p(t)=E(e^{-\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u}\lambda(t))$，如果可以对该式进行微分，那么，我们自然会得到下述结果：

$$p'(t)=E(-e^{-\int_0^t\lambda(u)\mathrm{d}u}\lambda(t)) \tag{I.5}$$

其中 $\pi(t)$ 和 $h(t)$ 的定义如前文所述。格莱德尔(Grandell，1976)第 106～第 107 页证明了(I.5)式是正确的：

1. 对所有的 t，存在常数 C 使得 $E(\lambda_t^2)<C$。

2. 对任意 $\epsilon>0$，以及几乎任意时间 t，

$$\lim_{\delta\to 0}P(|\lambda(t+\delta)-\lambda(t)|\geqslant\epsilon)=0$$

这些特征在许多模型中都是满足的。对于第 11 章意义上的相关模型，在上述条件下，我们已经得到密度和风险率的明确表达式。对 $\mathcal{G}_t$ 条件下密度和风险率的计算，也可以应用类似的方法。

J

有限差分编码

本附录给出了应用C语言完成的计算机编码。它是在本书作者的引导下，由拉威·明内利(Ravi Myneni)完成，并由迈克尔·博尔威(Michael Boulware)修改的。它运用第12章中所给出的科朗克—尼科尔森有限差分算法，对期限结构CIR模型中的含息债券和含息债券期权的价格进行数值求解。当然，零息债券价格也可以直接根据第7章中说明的显示解给出：通过把含息债券处理成不同到期日的零息债券的证券组合，来计算含息债券的价格。

本编码仅仅是出于第12章的教学需要，并不是为商业用途或其他目的而完成。尽管本书的作者已成功地将本编码用于多种场合，但对以任何目的而使用或误用本编码所引起的任何损失，其创作人拉威·明内利和迈克尔·博尔威均不承担任何责任。这次编码明显要比本书第一版中的编码运行得快。

本编码应与下述具有版权的子程序结合起来使用。这些子程序取自于普莱斯、弗拉尼瑞、特科尔斯基和范特林(Press, Flannery, Teukolsky , and Vetterling, 1993)合著的《C语言的数值方法》(*Numerical Recipes in C*)。其中包括：

(a)ivector()，

(b)dvector()，

(c)free_ivector()，

(d)free_dvector().

这些子程序通常与《C语言的数值方法》一书一起销售。本书的作者和拉威·明内利均不承担因运用或误用这些子程序而引起的责任。

在应用本编码时，还需要使用所谓的“include”文件。因为这些文件因操作系统的不同而不同，所以在这里并没有把它们包括进去。

```
/*************************************************************************
This code was written by Ravi Myneni under the direction
of the author, and revised by Michael Boulware.
*************************************************************************/
#define MAX(a,b)(a,b,a>b ? a : b)
fdi_bond_option (number_space_points, number_time_points, parameters,
                 coupon, par, bond_maturity, option_maturity, call_put,
                 american_european, strike, spot_rates, bond_prices,
                 accrued_interest, option_prices)
/*************************************************************************
fdi_bond _option( ) is an implicit finite difference algorithm
        for valuing bond options in the CIR model with constant
        speed of adjustment, long term mean and volatility
        parameters.
-------------------------------------------------------------------------
int     number_time_points = number of time points
            (Note: actual number of temporal steps is one less. )
int     number_space_points = number of space points
            (Note: actual number of spatial steps is one less. )
    double *parameters          = model parameters vector:
                                    0 (—) speed of adjustment
                                    1 (—) long term mean
                                    2 (—)volatility parameter
    double coupon               = coupon rate (annual % par)
    double par                  = bond's par value (%)
double bond_maturity        = bond time to maturity (in years)
double option_maturity      = option time to maturity (in years)
    char  call_put              = call ('C') or put ('P')
    char  american_european     = american ('A') or european ('E')
    double strike               = option strike on flat price
    double *spot_rates          = vector of spot rates
    double *bond_prices         = vector of flat bond prices
    double *accrued_interest    = accrued interest on bond
    double *option_prices       = vector of option prices
```

```
/*************************************************************************
int number_space_points, number_time_points;
double *parameters, coupon, par, bond_maturity, option_maturity, strike;
char call_put, american_european;
double *spot_rates, *bond_prices, *accrued_interest, *option_prices;
{
  int error;
  int i, j, k, option_expiration_period, *coupon_flows, *ivector( );
  double r, s, t, semi_annual_coupon, accrued, *mu, *sigma , gamma;
  double *a, *b, *c, *y_bond, *y_option, *dvector( );
  double time_delta, space_delta;
  void free_ivector( ), free_devctor( );
/* * * * Some useful checks * * * */
if (number_space_points <10||number_space_points>3000)
  {printf("! number_space_points out of bounds\n"); return(1); }
if (number_time_points<10||number_time_points>5000)
  {printf("! number_time_points out of bounds\n"); return(2); }
if (bond_maturity<2.0/365.0||bond_maturity>50.0)
  {printf("! bond_maturity invalid\n"); return(3); }
if (option_maturity<1.0/365.0|| option_maturity>50.0)
  {printf("! option_maturity invalid\n"); return(4); }
if (option_maturity>=bond_maturity)
  {printf("! option_maturity exceeds bond_maturity\n"};
  return(5); }
if (strike<0.0)
  {printf("! strike is negative\n"}; return(6); }
/* * * * Initialization of parameters * * * */
space_delta=1.0 / (double)(number_space_points-1);
time_delta= bond_maturity / (double)(number_time_points-1);
if (time_delta>=0.5)
  {printf("! number_space_points too small\n" ); error= 7; goto
  fre; }
gamma= 12.5;
```

```
/* * * * Calculation of semi-annual coupon * * * * /
semi_annual_coupon= coupon * par / 200.0;
/* * * * Calculation of option expiration node * * * * /
option_expiration_period= (int)((option_maturity / time_delta)
  +0.5);
if (option_expiration_period ==0||option_expiration_period ==number_time_points
--1)
  {printf("! option_maturity out of bounds\n"); error=8; goto
  fre; }
/* * * * Allocation of memory * * * * /
a= dvector(0, number_space_points-1);
b= dvector(0, number_space_points-1);
c= dvector(0,number_space_points-1);
y_bond= dvector(0, number_space_points-1);
y_option= dvector(0, number_space_points-1);
mu= dvector(0, number_space_points-1);
sigma= dvector(0, number_space_points-1);
coupon_flows= ivector(0, number_time_points-1);
/* * * * Calculation of semi-annual coupon nodes * * * * /
for (j=number_time_points-1, i=0; j>=0; j--)
    {
    k=(int)(((double)(i) * 0.5 / time_delta) +0.5);
    if(j == number_time_points-k-1)
       { coupon_flows[j]=1; i++; }
    else
       { coupon_flows[j]=0; }
    }
/* * * * Initialization of terminal bond price * * * * /
for (i=0 ; i<number_space_points ; i++)
    { bond_prices[i]=par ; }
/* * * * Calculation of pde parameters * * * * /
for (i=1; i <number_space_points; i++)
    {
    error= fdi_sdv(i, gamma, space_delta, parameters, &spot_rates[i],
```

```
    &mu[i], &sigma[i]);
    if (error)
       { printf("! error %d occurred in fdi_sdv( )\n", error);
         error=9; goto fre; }
    }
/* * * * Main valuation loop until option expiration * * * */
for (j=number_time_points-1 ; j>option_expiration_period; j--)
    {
    /* * * * Addition of semi-annual coupon * * * */
    if (coupon_flows[j])
    {
       for (i=0; i<number_space_points ; i++)
    { bond_prices[i]+= semi_annual_coupon; }
    }
    /* * * * Highest spot rate case is treated differently * * * */
    spot_rates[0]=1.0e+12;
    a[0]=0.0;
    b[0]=1.0;
    c[0]=0.0;
    if (j ==number_time_points-1)
      { y_bond[0]=bond_prices[0] / time_delta; }
    else
      { y_bond[0]=0.0;}
    /* * * * Lowest spot rate case is also treated differently * * * */
    a[number_space_points-1]= -mu[number_space_points-1]/
                              space_delta;
    b[number_space_points-1]= mu[number_space_points-1]/
                              space_delta
                              -1.0 / time_delta;
    c[number_space_points-1]= 0.0;
    y_bond [number_space_points-1]
          = -bond_prices[number_space_points-1]/ time_delta;

    /* * * * Now do the intermediate points * * * */
```

```
    for (i=1 ; i<number_space_points-1 ; i++)
        {
         r= mu[i]/ (4.0 * space_delta);
         s= sigma[i]/ (2.0 * pow(space_delta, 2.0));
         a[i]= (s-r);
         b[i]= -(1.0 / time_delta)+(2.0 * s)+0.5 * spot_rates[i];
         c[i]= (s+r);
         y_bond[i]= (r-s) * bond_prices[i-1]+((2.0 * s)
                    -(1.0 / time_delta) -0.5 * spot_rates[i])
                    * bond_prices[i]-(r+s) * bond_prices[i+1];
        }
    /* * * * Solution of tridiagonal system * * * */
    tridagm(a, b, c, bond_prices, y_bond, number_space_points);
    }
/* * * * Initialization of terminal value of option * * * */
if (coupon_flows[option_expiration_reriod])
    { accrued= 0.0; }
else
    {
       for (i=option_expiration_period ; ! coupon_flows[i]; i++) { ; }
       accrued= (1.0 - ((double)(i - option_expiration_period)
                * time_delta / 0.5)) * semi_annual_coupon;
    }
for (i=0 ; i<number_space_points ; i++)
    {
       if (call_put == 'C' || call_put == 'c')
         { option_prices[i]=MAX(bond_prices[i]-accrued
                                -strike, 0.0) ;}
       else
         { option_prices[i]= MAX (strike-bond_prices[i]
                                  +accrued, 0.0) ;}
    }
/* * * * Main valuation loop until initial period * * * */
for (j=option_expiration_period ; j>0 ; j--)
```

```
    {
      /* * * * Addition of semi-annual coupon * * * */
      if (coupon_flows[j])
        {
          for (i=0; i<number_space_points ; i++)
      { bond_prices[i] += semi_annual_coupon; }
        }
      /* * * * Highest spot rate case is treated differently * * * */
      spot_rates[0]=1.0e+12;
      a[0]=0.0;
      b[0]=1.0;
      c[0]=0.0;
      if ( j == number_time_points-1)
        {
          y_bond[0]=bond_prices[0]/ time_delta;
          y_option[0]=option_prices[0]/ time_delta;
        }
else
    {
          y_bond[0]=0.0;
          y_option[0]=0.0;
    }
/* * * * Lowest spot rate case is also treated separately * * * */
a[number_space_points-1]= -mu[number_space_points-1]/
                                    space_delta;
b[number_space_points-1]= mu[number_space_points-1]/
                                    space_delta-1.0 / time_delta;
c[number_space_points-1]=0.0;
y_bond[number_space_points-1]
        = -bond_prices[number_space_points-1]/ time_delta;
y_option[number_space_points-1]
          = -option_prices[number_space_points-1]/ time_delta;
/* * * * Now do the intermediate points * * * */
for (i=1 ; i<number_space_points-1 ; i++)
```

```
    {
    r= mu[i]/ (4.0 * space_delta);
    s= sigma[i]/ (2.0 * pow(space_delta, 2.0));
    a[i]= (s-r);
    b[i]= -((1.0 / time_delta)+(2.0 * s)+0.5 *
              spot_rates[i]);
    c[i]= (s+r);
    y_bond[i]= (r-s) * bond_prices[i-1]+((2.0 * s) -
    (1.0 / time_delta) -0.5 * spot_rates[i])
    * bond_prices[i]-(r+s) * bond_prices[it];
    y_option[i]=(r-s) * option_prices[i-1]+((2.0 * s)-
    (1.0/time_delta)-0.5 * spot_rates[i]
              * option_prices[i]-(r+s)
              * option_prices[i+1];
    }
/* * * * Solution of tridiagonal system * * * */
tridagm(a, b, c, bond_prices, y_bond, number_space_points);
tridagm(a, b, c, option_prices, y_option, number_space_points);
/* * * * American feature is handled by the Wald-Bellman
                                        equation * * * */
if (american_european =='A'||american_european =='a')
    {
   if (coupon_flows[j-1])
    { accrued= 0.0; }
   else
    {
        for (i=j-1 ; ! coupon_flows[i]; i++) { ; }
        accrued= (1.0 - ((double)(i-j+1)
              * time_delta /0.5)) * semi_annual_coupon;
              }
        for (i=0 ; i<number_space_points ; i++)
           {
            if (call_put =='C'|| call_put =='c')
              { option_prices [i]= MAX(option_prices[i],
```

```
                                bond_prices[i]-accrued-strike); }
                    else
                      { option_prices[i]= MAX(option_prices[i],
                                strike-bond_prices[i]+
                                accrued); }
                  }
              }
          }
    if(coupon_flows[0])
        { *accrued_interest=0.0 ;}
    else
        {
        *accrued_interest=(1.0- ((double)(coupon_flows[0])
                        * time_delta
                        / 0.5)) * semi_annual_coupon;
        for (i=0 ; i<number_space_points ; i++)
        { bond_prices[i] -= *accrued_interest; }
        }
        /* * * * Cleanup * * * */
        error= 0;
fre:
        free_dvector(a, 0, number_space_points-1);
        free_dvector(b, 0, number_space_points-1);
        free_dvector(c, 0, number_space_points-1);
        free_dvector(y_bond, 0, number_space_points-1);
        free_dvector(y_option, 0, number_space_points-1);
        free_dvector(mu, 0, number_space_points-1);
        free_dvector(sigma, 0, number_space_points-1);
        free_ivector(coupon_flows, 0, number_time_points-1);
        return(error);
}
fdi_sdv(position, gamma, space_delta, parameters, spot_rate, mu, sigma)
        /*************************************************************
fdi_sdv( ) computes the coefficients for fdi_bond_option( ).
```

```
    long   position  =position along the space axis.
        double gamma    = scaling factor (usually 12.5).
        double space_delta= one interval of space axis.
        double *parameters        = model parameters vector;
                                    0(-) speed of adjustment
                                    1(-) long term mean
                                    2(-) volatility parameter
                                    double *spot_rate=spot rate(in decimal).
        double *mu                = drift rate modified by gamma
                                    (in decimal).
        double *sigma             = variance modified by gamma
                                    (in decimal).
```

```
/*************************************************************************
int position;
double gamma, space_delta, *parameters, *spot_rate, *mu, *sigma;
{
    int error;
    int i, j, k;
    double r, s, y;
        /**** Some useful checks ****/
if (position<0)
  { printf("! position invalid\n"); return(1); }
  if (gamma<1.0||gamma>100.0)
  { printf("! gamma out of bounds\n"); return(2); }
  if (space_delta<= 0)
  { printf("! space_delta invalid\n"); return(3); }
/**** Compute spot rate ****/
y= (double)(position) * space_delta;
*spot_rate=(1.0-y)/ (gamma * y);
/**** Useful calculation ****/
        s= *spot_rate * pow(parameters[2], 2.0);
        /**** Compute drift ****/
```

```
        r= parameters[0] * (parameters[1]- * spot_rate);
        r * =-gamma * pow(y, 2.0);
        r+=pow(gamma,2.0) * pow(y,3.0) * s;
        * mu= r;
        /* * * * Compute variance/2.0 * * * * /
        r= 0.5 * pow(gamma, 2.0) * pow(y, 4.0) * s;
        * sigma=r;
    return(0);
}
tridagm(a, b, c, x, y, number)
    /*************************************************************************
        tridagm ( ) is a variant Numerical Recipes' routine of the
        same name.
      ------------------------------------------------------------------
    *************************************************************************/
    long number;
    double * a, * b, * c, * x, * y;
{
    int error;
    int i, j, k;
    double r, s, t, bet, * gam, * vec;
    double * dvector( );
    gam= dvector(0, number-1);
    if (b[0] ==0.0)
      { error=1; goto fre; }
    x[0]=y[0]/ (bet=b[0]);
    for (j=1; j<number ; j++)
        {
        gam[j]=c[j-1]/ bet;
        bet= b[j]- a[j] * gam[j];
        if (bet ==0.0)
          { error=2; goto frc; }
        x[j]=(y[j]-a[j] * x[j-1]) / bet ;
        }
```

```
for (j=(number-2) ; j>=0 ; j--)
    { x[j]-= gam[j+1] * x[j+1]; }
error= 0;
fre:
 free_dvector(gam, 0, number-1);
 return(error);
}
```

人名对照表

A

Aase	阿瑟	Abel	阿贝尔
Abken	阿布肯	Acharya	阿卡雅
Adam	亚当姆	Adams	亚当斯
Adler	阿德勒	Admati	阿德麦第
Ahn	亚恩	Ait-Sahalia	艾特—沙哈利
Ait-Sahlia	艾特—沙亚	Aiyagari	亚加利
Akahari	阿卡哈利	Akian	雅科安
Alexandre	阿雷克安德瑞	Aliprantis	阿利普兰蒂斯
Allegretto	阿勒格兰托	Allingham	阿林汉姆
Aloke	阿洛克	Alvarez	阿瓦瑞茨
Amaro de Matos	阿马罗·德·马托斯	Amendinger	阿蒙丁格
Amin	阿明	Amir	阿密尔
Anat	安雷特	Analiza	安雷里塞
Andersen	安德森	Anderson	安德逊
Andreasen	安德里森	Andreu	安德瑞
Andy	安迪	Ansel	安瑟尔
Antonelli	安东尼里	Apelfeld	阿贝尔弗尔德
Araujo	阿鲁约	Arntzen	阿恩辰
Arrow	阿罗	Artzner	阿兹那
Arvantis	阿凡提斯	Ashaboglu	阿萨博格鲁
Ashcroft	阿希若夫特	Asmundsen	艾姆德森

Aspremont	艾斯普瑞莫特	Assaf	阿沙夫
Atlingham	艾特林汉姆	Au	奥
Auler	奥勒	Avellaneda	阿维兰尼达
Avery	艾卫瑞	Ayman	亚曼

B

Babbs	拜布斯	Bachelier	拜切利尔
Back	拜克	Backus	拜克斯
Bajeux-Besnainou	巴乔克斯—贝斯莱罗	Bakshi	拜克希
Balaji	巴拉基	Balasko	巴拉斯科
Balduzzi	巴都兹	Ball	波尔
Bally	巴利	Bank	班克
Banz	班兹	Barberis	巴贝瑞斯
Barles	巴勒斯	Barndorff-Nielsen	班多夫—尼尔森
Barone	巴罗恩	Barone-Adesi	巴罗恩—安德斯
Barraquand	巴拉库德	Bartle	巴托
Basak	巴沙克	Bates	贝兹
Baxter	巴克斯特	Baz	巴兹
Bazaliy	贝塞利	Beaglehole	比吉荷尔
Becker	贝克	Beckers	贝克斯
Beibel	贝比尔	Bellman	贝尔曼
Beltratti	贝尔拉提	Bensoussan	贝索沙恩
Benth	本斯	Benveniste	本温尼斯特
Benzoni	本索尼	Berardi	贝拉蒂
Bergman	贝尔格曼	Berk	伯克
Bernard	贝纳德	Berndt	贝恩特
Bernstein	贝斯特恩	Bertola	贝托拉
Bertsekas	贝兹卡斯	Bertsimas	贝兹马斯
Bethel	贝瑟尔	Bewley	毕雷
Bhar	巴尔	Bick	比克
Bielecki	别内基	Bill	比尔
Billingsley	别林斯雷	Bjerksund	伯克森德
Björk	博尔克	Black	布莱克
Blackwell	布莱克威尔	Blume	布隆姆

Bodurtha	布德萨	Bollerslev	别勒斯拉夫
Bollier	布利尔	Bonomo	布罗姆
Bossaerts	布沙兹	Bottazzi	布塔兹
Boudoukh	布多克	Bouleau	布罗
Boulware	布威尔	Boyarchenko	布雅琴科
Boyd	布伊德	Boyle	布伊尔
Brace	布雷斯	Bray	布雷
Breeden	布瑞登	Bregman	布瑞格曼
Brémaud	布莱芒德	Brennan	布莱南
Broadie	布洛迪	Brock	布洛克
Brotherton-Ratcliffe	布洛斯顿—莱特克利夫	Brown	布朗
Broze	布洛兹	Bruce	布鲁斯
Buckdahn	布克丹	Buff	布弗
Buhler	布勒	Bühlmann	布尔曼
Bunch	本奇	Buono	布尔诺
Burdeau	布迪尔	Burger	布尔格
Burkinshaw	布尔金肖	Büttler	布特勒

C

Cadenillas	卡登尼拉斯	Caflisch	卡夫里希
Calvet	卡尔威特	Campbell	坎贝尔
Cao	曹	Caplin	凯普林
Carassus	卡拉斯厄斯	Carpenter	卡朋特
Carr	卡尔	Carverhill	卡夫希尔
Cass	卡斯	Cassese	卡斯塞斯
Caton	卡顿	Chacko	查科
Chae	蔡	Chalasani	查拉沙尼
Chaltikian	查尔蒂克林	Chamberlain	查姆伯莱恩
Chan	查恩	Chang	张
Chapman	查普曼	Charretour	查莱特
Chen	陈	Cheng	程
Cherian	切瑞安	Cherif	切瑞夫
Chernoff	切诺夫	Chernov	切诺
Chernozhukov	切诺祝可夫	Cherubini	切鲁比尼

Chesney	切斯尼	Chevance	切梵斯
Chew	丘	Cheyette	基耶迪
Chiarella	切尔瑞拉	Chi fu-Huang	黄之福
Chidambaran	基达姆巴莱	Chien	切恩
Cho	寇	Chou	邹
Choulli	丘奥里	Chow	周
Chris	科瑞斯	Christensen	科瑞斯坦森
Chuan	川	Chuang	庄
Chung	钟	Citanna	斯坦纳
Clark	克拉克	Clarke	克拉凯
Clewlow	克鲁罗	Cohen	科汉
Colell	克莱尔	Coleman	克莱姆
Colgin	克尔金	Constantinides	康斯坦丁尼德斯
Cont	孔特	Conze	孔茨
Cooper	库珀	Corb	科博
Cornell	考奈尔	Corradi	科拉第
Corwin	科威恩	Costis	科斯第斯
Courtadon	科特登	Cover	科弗尔
Cox	考克斯	Crouhy	克劳希
Cuoco	库克	Curran	库瑞安
Cutland	库特兰德	Cvitanić	科威坦尼克

D

Daher	达赫尔	Dahlquist	达尔奎斯特
Dai	戴	Daigler	代格勒
Dalang	戴龙	Daley	达雷
Dana	达纳	Danesi	达耐斯
Darling	达林	Das	达斯
Dash	达什	Dassios	戴丝西奥斯
Davis	戴维斯	David	大卫
Davydov	戴维德夫	Dayal	达亚尔
Debreu	德布鲁	Décamps	戴卡姆伯斯
Deelstra	迪尔斯特拉	Dekel	德卡尔
Delbaen	德尔伯恩	Delgado	德尔加多

Demler	德姆劳	Demange	德曼基
DeMarzo	德马兹奥	Dempster	戴姆博斯特
DeMunnik	代姆尼克	Deng	邓
Dengler	丹格勒	de Matos	德·梅托斯
der Hoek	德·海克	Derman	德曼
Derviz	德威兹	Detemple	迪特姆普勒
Dewynne	迪威尼	Dezhbakhsh	迪兹巴克什
Diament	迪阿尼特	Dick	迪克
Diener	迪安尼	Dijkstra	迪克斯特拉
DiMasi	迪马斯	Dixit	迪科斯特
Dolan	多兰恩	Donaldson	多纳尔森
Doob Meyer	多博·梅尔	Dothan	多斯安
Doug Breeden	道格·布瑞登	Dougherty	道格何蒂
Douglas	道格拉斯	Dritschel	德瑞希尔
Druskin	德罗斯金	Dreze	德鲁兹
Duan	段	Duff	达弗
Duffee	达弗利	Duffie	达菲
Dumas	杜马斯	Duncan	杜恩凯
Dunn	达恩	Dupire	达派
Durrett	达瑞特	Dybvig	迪比威格
Dynkin	迪恩金		

E

Easley	伊斯雷	Eaves	伊威斯
Eberlein	伊伯莱恩	Ederington	伊德瑞登
Edirisinghe	伊迪瑞希	Ekern	伊克恩
El Karoui	伊尔卡洛伊	Elizabeth	伊利扎贝斯
Elliot	艾利奥特	Elliott	艾利奥德
Ellis	艾丽丝	Elmaghraby	爱尔麦瑞贝
Embrechts	爱姆伯瑞茨	Engle	恩格尔
Epstein	爱普斯坦恩	Eraker	爱拉克
Ericsson	爱瑞克森	Esposito	艾斯普希特
Esteghamat	艾斯特菲麦特	Evnine	伊凡
Eydeland	伊德兰德		

F

Faguet	法特	Fan	范
Farkas	法卡斯	Faure-Grimaud	弗瑞—格利马德
Fazel	法泽尔	Fehmi	费密
Fein	费恩	Feldman	费尔德曼
Feller	费勒	Fernandes	弗纳德斯
Ferguson	菲古森	Figlewski	菲格雷威斯基
Finger	菲戈	Filipović	菲利浦威克
Fisher	费希尔	Fitzpatrick	费兹帕曲克
Flannery	弗拉尼瑞	Flavio	弗雷威欧
Fleming	弗莱明	Flesaker	弗莱沙克
Flor	弗罗	Florenzano	弗罗瑞查诺
Foldes	弗德斯	Föllmer	弗莫
Foresi	弗瑞西	Forsyth	弗西斯
Fouque	弗克	Fournié	弗奈
Frachot	弗拉乔特	Freedman	弗里德曼
Freidlin	弗瑞德林	Frey	弗瑞
Friedman	弗瑞德曼	Frittelli	弗瑞特里
Fu	傅	Fuloria	傅罗瑞
Fuqua	弗奎		

G

Gabay	格贝	Gagnon	格诺
Galai	格莱	Gale	格勒
Gallant	格兰特	Gandhi	格恩德西
Gao	高	Garbade	加伯德
Garcia	加西亚	Garleanu	加利鲁
Garman	高曼	Garmaise	高麦斯
Gatarek	格塔瑞克	Gatto	格特
Geanakoplos	加克浦欧斯	Gegout-Petit	基格特—帕特
Geman	基曼	Gennotte	基诺迪
Genon-Catalot	基诺—卡塔洛特	Geoffard	基奥法德
George	乔治	Gerber	格博

Gertler	格特勒	Geske	哥斯克
Ghysels	吉塞尔斯	Gibbons	吉本斯
Gibbs	基伯斯	Gibner	基伯劳
Gibson	基伯森	Gihman	吉曼
Gilles	基勒斯	Ginanni	基兰尼
Giovannini	基瓦尼利	Girsanov	基尔萨诺夫
Girotto	基罗特	Glasserman	格拉斯曼
Glynn	格里恩	Goldberg	格奥德伯格
Goldman	格奥德曼	Goldstein	格奥德斯坦
Goldys	格奥德伊斯	Goll	格尔
Gombani	格姆巴尼	Gonzalez	高扎利茨
Gorman	高曼	Gottardi	格塔瑞德
Gourdel	高德尔	Gouriéroux	高瑞洛克斯
Grabbe	格莱比	Grandchamp	格莱恩德查姆
Grandell	格莱德尔	Grannan	格瑞南
Grant	格拉恩特	Grauer	格拉尔
Graversen	格雷文森	Gregory	格莱哥利
Grenadier	格莱雷第尔	Gregory-Allen	格莱哥利--阿伦
Griffiths	格瑞菲斯	Grinblatt	格瑞恩伯拉特
Grodal	格罗达尔	Grosen	格罗森
Grossman	格罗斯曼	Grueneberg	格洛尼堡
Gruenewald	格洛尼瓦德	Grundfest	格洛恩菲斯特
Grundy	格洛恩迪	Gukhal	古克哈尔
Gul	古尔	Guo	郭
Gustaffson	格斯戴夫森		

H

Haan	哈安	Hahn	哈恩
Hakansson	哈克安森	Hamza	哈姆查
Hammond	哈姆默德	Han	韩
Hansen	哈恩森	Hara	哈拉
Harris	哈瑞斯	Harrison	哈瑞森
Hart	哈特	Harvey	哈威
Hassan	哈斯安	Haug	哈格

He	贺	Heal	希尔
Heath	奚斯	Heaton	希顿
Heemink	希明克	Heidelberger	希德尔伯格
Heinkel	海恩克	Hellwig	赫尔威克
Hemler	海勒	Henrotte	海洛特
Hens	海恩斯	Hernandez	赫尔南德兹
Heston	赫斯顿	Heynen	赫恩
Hildenbrand	希尔顿伯莱德	Hillion	希尔朗
Hindy	辛迪	Hirsch	希瑞斯乔
Ho	何	Hochberg	霍希堡
Hobson	霍布森	Hodges	霍德格斯
Hofmann	霍夫曼	Hogan	何格安
Honda	本田	Hong	洪
Hoshino	星野	Howe	霍威
Howison	霍威森	Hu	胡
Huang	黄	Hubalek	胡巴拉克
Huge	胡季	Hull	胡尔
Huneeus	胡尼尔斯	Husseini	哈塞尼
Hussey	哈塞	Hutton	哈特恩

I

Ibanez	伊班纳兹	Ibbotson	伊博森
Iben	伊恩	Iglehart	伊格里哈特
Ikeda	伊凯达	Imkeller	伊姆凯勒
Ingersoll	英格索	Ingram	英格兰姆
Intriligator	英爵利格托	Irena	艾瑞娜
Iyengar	伊叶格		

J

Jack	杰克	Jacka	杰卡
Jackson	杰克逊	Jackwerth	杰克维斯
Jacobs	杰克伯斯	Jacod	杰科德
Jaganathan	杰格那塞恩	Jaillet	杰尔勒特
Jakobsen	杰克布森	Jamshidian	杰姆斯迪安

Janci	杰恩斯	Jarrow	加罗
Jaschke	杰斯克	Jasiak	杰斯埃克
Jeanblanc	杰安布兰克	Jeff	杰弗
Jeffrey	杰弗瑞	Jegadeesh	杰格迪斯
Jensen	简森	Jha	佳
Jiang	蒋	Jim	吉姆
Jin	金	Joe	琼
Johannes	琼哈恩斯	John	约翰
Johnsen	约翰逊	Jones	琼斯
Jong	琼格	Jordan	乔德安
Jorgensen	乔吉森	Jorion	乔瑞恩
Jorod	乔洛德	Jouini	乔尼
Joy	乔埃	Ju	乔
Judd	茱迪	Jun	俊

K

Kabanov	卡巴诺夫	Kajii	卡基
Kakutani	卡库塔尼	Kallal	卡拉
Kallsen	卡奥森	Kambe	凯姆贝
Kaminsky	凯密斯盖	Kan	凯恩
Kandori	凯恩多利	Kani	卡尼
Kapoudjian	卡普迪简	Karasinski	卡拉辛斯基
Karatzas	卡拉特查斯	Karidi	卡瑞迪
Karlsen	卡尔森	Karolyi	卡诺尔伊
Karr	卡诺	Kat	凯特
Kawazu	川津	Kehoe	凯霍
Keller	凯勒	Kemna	凯姆纳
Ken	肯恩	Kennedy	肯尼迪
Kerry	科瑞	Khanna	克哈那
Kifer	基弗	Kijima	基玛
Kim	金	Kind	凯恩德
Kingston	金斯顿	Kirman	科曼
Kishimoto	岸本	Klapper	克拉普
Klass	克拉丝	Klebaner	克莱巴纳

Knizhnerman	克尼泽曼	Knowles	罗里斯
Kocherlakota	科切拉库塔	Koedijk	克迪贾科
Koehl	科霍尔	Kogan	克格安
Komoribayashi	克姆瑞巴亚斯	Konno	克诺
Koo	古	Koopmans	库普曼斯
Kooros	克罗斯	Kopp	库博
Korn	康恩	Kostek	考斯坦克
Kou	寇	Kramkov	克兰姆克夫
Krasa	克拉沙	Kraus	克劳斯
Krawczyk	克洛兹克	Krishna	克瑞西那
Kreps	克莱普斯	Krey	克雷
Kroner	克莱纳	Kruk	克鲁克
Krylov	克莱洛弗	Ku	顾
Kubler	库博勒	Kulig	库利格
Kunitomo	库尼特莫	Kuwana	库瓦那
Either Kurts	艾若·库兹	Kurz	库茨
Kusuoka	库舒卡	Kuwana	库瓦纳
Kydland	凯德兰		

L

Laciste	兰斯特	Lacoste	雷库斯特
Lagbadi	拉格博迪	Lagnado	拉格纳多
Lai	赖	Lakner	雷科纳
Lamberton	拉姆伯登	Lamoureux	拉姆洛克斯
Lan	兰	Lando	兰德
Lang	郎	Langetieg	兰格特
Langsam	兰格赛姆	Lantto	朗特
Lapeyre	拉佩尔	Laroque	拉洛克
Larry	拉瑞	Lasry	拉斯瑞
Lasse	拉瑟	Lastrapes	拉斯瑞普
Laurence	劳伦斯	Laurent	劳伦特
Laurie	劳瑞	Lawson	罗森
Lazrak	拉兹雷克	Le Van	列·范
Leblanc	莱布朗克	Lebuchoux	莱布希奥斯

Lee	李	Lehoczky	莱何兹克
Leland	理兰德	Lepage	莱佩吉
Lépingle	列宾	Lerche	勒奇
LeRoy	理罗伊	Lesigne	理辛
Lesne	莱森	Levendorskii	列文德斯基
Levental	拉维特	Levhari	拉夫哈瑞
Levine	列文	Levy	列维
Li	李	Linda	琳达
Linetsky	林特斯凯	Lintner	林特纳
Lions	莱恩斯	Lioui	劳伊
Louis	刘易斯	Lipschitz	利普斯基兹
Lipster	利普斯特	Lischka	利斯卡
Litterman	利特曼	Litzenberger	林特博格
Lim	黎姆	Litvak	李特威克
Liu	刘	Lo	罗
Lobo	罗博	Loewenstein	罗文斯坦因
Löffler	罗弗勒	Long	朗恩
Longstaff	朗斯坦夫	Loshak	罗夏克
Lotz	罗茨	Lu	卢
Lucas	卢卡斯	Luciano	卢希安诺
Luenberger	卢安博格	Lund	朗德
Lustig	路斯特格	Luttmer	路特莫
Lynch	林奇		

M

Ma	马	Machina	马奇那
MacKinlay	麦金雷	Madan	麦当
Maghsoodi	玛舒迪	Magill	麦吉尔
Majumdar	麦优姆达	Mankiw	曼昆
Manju	曼优	Marcet	马塞特
Marcozzi	马可茨	Margrabe	玛格瑞博
Mark	马克	Marsh	玛什
Marshall	马歇尔	Martin	马丁
Martineau	马丁诺	Mas-Colell	马斯—科勒

Matt	麦特	Mavroidis	马洛迪斯
McConnell	麦克科耐尔	McFadden	麦克法登
McKean	麦凯恩	McKenzie	麦凯兹
McKonald	麦克科纳德	McLennan	麦克里南
McManus	麦克玛	McMillan	麦克米兰
Mehra	麦拉	Mehrling	梅尔林
Melino	麦里诺	Melissa	麦利沙
Mella-Barral	麦拉—巴洛尔	Mello	麦洛
Menaldi	麦纳尔迪	Merrick	麦瑞克
Merton	默顿	Meyer	梅尔
Michael	米歇尔	Mike	迈克
Miller	米勒	Milne	米尔尼
Milshtein	米尔斯坦因	Miltersen	米尔特森
Mirrlees	米尔里斯	Mitchell	米歇尔
Modest	莫迪斯特	Modigliani	莫迪格利尼
Monat	莫纳特	Monteiro	莫泰罗
Moreleda	摩尔莱达	Morokoff	摩洛克夫
Morozov	摩洛若夫	Morris	莫里斯
Morton	莫顿	Moskowitz	莫斯科维茨
Motolese	莫特里斯	Mueller	缪勒
Mueller	莫雷	Munk	芒克
Mura	穆拉	Murthy	莫什
Musiela	缪塞拉	Myneni	麦纳尼

N

Nahum	纳姆	Naik	奈克
Nakagawa	纳卡加瓦	Nandi	南迪
Neftci	纳夫特茨	Negishi	纳吉什
Nelson	奈尔逊	Newman	纽曼
Newton	牛顿	Ng	吴
Nicolae	尼克黎	Nielsen	尼尔森
Nieuwerburgh	尼尤瓦堡夫	Niko	尼可
Nissen	尼桑	Norman	诺曼
Nunes	纽恩	Nyborg	奈博格

Nychka	奈奇卡

O

Ocone	奥肯	O'Hara	欧哈拉
Ōhashi	大桥	Oliveira	奥利维拉
Ordentlich	奥丹特里奇	Ortu	奥图
Osher	欧歇尔	Overdeck	欧文德克
Owen	欧文	Ozden	欧茨德

P

Packalen	派卡恩	Pagès	佩吉
Pakes	佩克	Pan	潘
Panas	潘纳斯	Pang	庞
Papanicolaou	帕潘尼克拉欧	Pappalardo	帕潘拉多
Parás	帕拉斯	Pardoux	帕多克
Parker	帕克	Parrott	帕洛特
Páscoa	帕斯克	Pastorello	帕斯特瑞罗
Paul	保罗	Pearson	皮尔森
Pedersen	佩德森	Peng	彭
Pennacchi	彭纳奇	Perraudin	帕劳丁
Persson	佩尔森	Perez	皮瑞茨
Peter	彼得	Petkau	佩特考
Pfleiderer	泊雷德尔	Pham	法姆
Philip	菲利浦	Piazzesi	皮尔兹希
Picazo	皮卡若	Pickert	皮克特
Pierides	皮尔瑞德	Pietra	皮尔特拉
Pierre-Yves Geoffard	皮尔瑞—威斯·基奥法德		
Pikovsky	皮克弗斯基	Pindyck	平迪克
Pitts	皮兹	Platen	普雷登
Platten	普拉顿	Pliska	普利斯卡
Polak	普拉克	Polemarchakis	普洛马查克斯
Pollard	波拉德	Polson	波尔森
Pontier	彭迪尔	Portait	波泰特
Porteus	波特斯	Poteshman	波特希曼

Poulsen	帕尔森	Prause	普劳斯
Prabakar	普瑞贝卡	Press	普莱斯
Prescott	普莱斯克特	Prisman	普莱斯曼
Prigent	普莱金特	Pudet	普丹特
Protter	普罗特	Pye	派伊
Puri	普瑞		

Q

Quenez	昆奈兹	Quinzii	昆兹
Quiroz	昆罗兹		

R

Rabus	雷博斯	Radner	雷德纳
Rady	雷迪	Rahi	雷海
Raible	莱博尔	Ralf	雷尔夫
Ramaswamy	拉姆茨沃米	Randall	雷恩达尔
Ranjan	雷杰	Rao	姚
Ravi	雷威	Rebonato	莱博纳特
Redekop	莱德克普	Reikvam	莱克凡姆
Reisman	雷兹曼	Renault	雷诺特
Repcheck	雷普切克	Repullo	雷普洛
Revuz	雷瓦兹	Ricciardi	利歇尔迪
Rich	瑞奇	Richard	理查德
Richardson	理查德森	Riedel	理德尔
Rierson	瑞尔森	Risa	瑞莎
Rishel	瑞歇尔	Ritchken	瑞切肯
Robert Merton	罗伯特·默顿	Rochet	罗切特
Rockafeller	洛克菲勒	Roger	罗杰
Rohit	罗海特	Rogers	罗杰斯
Roma	罗玛	Romano	罗玛诺
Ronn	罗恩	Roseau	罗希欧
Rosenberg	罗森堡	Ross	罗斯
Royden	罗尔登	Rubinstein	鲁宾斯坦因
Rudd	路德	Ruegg	鲁格

Rui	鲁伊	Ruiz	鲁伊茨
Rumsey	拉姆塞	Runggaldier	朗格迪尔
Rustem	路斯特恩	Rutkowski	路特克威斯基
Rydberg	瑞贝格	Ryder	瑞德

S

Saá-Requejo	萨一瑞克尔	Sabarwal	萨巴沃尔
Sadr	萨德	Saito	萨尼托
Salkin	萨尔金	Samsoen	萨姆索恩
Samuelson	萨缪尔森	Sandmann	萨德曼
Sandroni	萨琼尼	Sannikov	萨尼科夫
Sankarasubramanian	萨卡拉萨布拉曼尼	Santa-Clara	圣一卡拉诺
Santos	桑托斯	Sargent	萨金特
Sato	萨托	Saunders	桑德斯
Sbuelz	萨布尔兹	Scaillet	斯卡尔立特
Scarsini	斯卡司尼	Schachermayer	施卡切梅尔
Schaefer	施艾弗	Scheinkman	施埃恩克曼
Schmedders	施迈德斯	Schneider	施内德
Schneller	施雷尔	Schoenmakers	肖恩梅克
Schonbucher	肖恩布切尔	Scholes	斯科尔斯
Schotman	舒特曼	Schroder	施洛德
Schwartz	施瓦茨	Schweizer	施维茨
Scott	斯科特	Sekine	赛肯
Selby	赛尔拜	Selden	萨尔登
Sergio	赛基欧	Serrat	赛拉特
Sethi	赛斯	Shafer	夏弗
Shahabuddin	夏哈布迪恩	Shanno	夏诺
Shannon	夏农	Sharpe	夏普
Shefrin	夏弗林	Shephard	谢泊德
Shepp	施普	Shi	施
Shiller	施勒	Shimko	施姆科
Shin	施恩	Shirakawa	施拉卡瓦
Shiryaev	肖叶弗	Shiu	萧
Shivers	施瓦司	Shreve	施莱弗

Shrikhande	施莱克汉德	Siconolfi	斯科诺尔费
Siegel	希格尔	Sigurgeirsson	希格厄尔森
Simonato	西莫纳托	Sin	辛
Sinconolfi	辛克诺尔费	Singh	辛夫
Singleton	辛格尔顿	Siniscalchi	辛尼卡尔茨
Sircar	瑟卡	Skiadas	思凯达斯
Skiathos	思凯索斯	Skorohod	斯科罗何德
Slud	施拉德	Smale	施梅尔
Smith	史密斯	Sondermann	桑德曼恩
Soner	索纳	Song	宋
Sopranzetti	索普朗扎蒂	Sorenson	索瑞森
Sornette	索纳特	Sosin	索辛
Spivakovsky	斯派维可夫司凯	Srinivasan	施莱尼瓦森
Stambaugh	史丹姆博	Stanton	史丹登
Stapleton	史丹普尔登	Stein	斯坦因
Steenkiste	斯特恩杰斯特	Stensland	思腾斯兰德
Stenson	斯德森	Stephen Smale	史蒂芬·斯马尔
Steve	斯第吾	Stiemke	斯泰尔克
Stokey	斯托克伊	Stoll	斯道尔
Stremme	斯特兰姆	Streufert	司基尔伏特
Stricker	司基克	Strickland	司基克兰德
Strikwerda	司基克沃德	Stulz	思杜尔茨
Stummer	思杜莫	Subrahmanyam	萨博拉曼耶姆
Subramanian	萨博拉曼尼	Sulem	舒勒姆
Sun	孙	Sundaram	桑德拉姆
Sundaresan	桑达尔森	Svensson	斯文森
Swindle	史温德		

T

Tacqu	塔克库	Takahashi	高桥
Takase	塔卡思	Taksar	塔克萨
Talay	塔雷	Taleb	塔莱博
Tamarchenko	塔玛奇恩科	Tan	塔恩
Tanudjaja	塔努迪耶亚	Tauchen	道奇恩

Tavella	塔凡拉	Taylor	泰勒
Teicher	泰切尔	Tejima	特基玛
Telmer	特尔姆	Tenney	腾尼
Tepla	特普拉	Terentyev	特瑞泰卫夫
Teukolsky	特科尔斯基	Tewari	特瓦瑞
Thorlacius	瑟拉希斯	Thorvaldsson	索威尔德森
Thurston	瑟斯顿	Tice	泰斯
Toft	托夫特	Tolstykh	托尔斯泰克
Tom	汤姆	Tony	托尼
Topper	托普尔	Török	托洛克
Torous	托洛斯	Tourin	托林
Touzi	托兹	Toy	托尔
Trevor	切弗尔	Tsiveriotis	茨凡莱尔蒂斯
Tubaro	图巴洛	Tufano	图法诺
Tunca	图恩卡	Turnbull	腾布尔

U

Uglum	尤格拉姆	Uhlig	尤利格
Uhrig-Homburg	尤瑞格—霍姆博格	Umantsev	尤曼特瑟夫
Unal	尤奈尔	Uppal	尤泊尔
Uzawa	尤扎瓦		

V

Vana	范娜	Van Deventer	范·蒂凡特
Van Horne	范·霍恩	Van Moerbeke	范·莫尔贝克
Vargiolu	凡基勒	Varikooty	范瑞库迪
Vasicek	瓦斯塞克	Vayanos	范亚诺斯
Veldkamp	威尔德凯姆	Vere-Jones	范瑞—琼斯
Vetterling	范特林	Vetzal	范加尔
Vigo	维格	Vila	维拉
Villanacci	维拉纳希	Vince	维恩斯
Vind	芬德	Viswanathan	维斯瓦纳莎
Vorst	福斯特	Vyas	亚斯

W

Waldvogel	沃尔德弗格	Wallace	沃尔勒斯
Walras	瓦尔拉斯	Walter	沃尔特
Wang	王	Watanabe	瓦特纳博
Wayne	威尼	Webber	韦博
Weber	维博	Weerasinghe	维拉辛格
Weil	维尔	Weill	威尔
Weinberg	威恩堡	Weingram	威恩格拉姆
Weiss	韦斯	Weisz	维茨
Werner	沃纳	Whaley	韦利
Whalley	维尔利	White	怀特
Whitelaw	怀特洛	Wiener	维纳
Wiggins	维金斯	Willard	维拉德
Williams	威廉姆斯	Willinger	威林格尔
Wilmott	威尔姆特	Wolff	沃尔夫
Won	沃恩	Woodford	伍德福特
Wu	吴		

X

Xu	许	Xue	薛

Y

Yaari	亚瑞	Yacine	亚赛恩
Yamada	亚玛达	Yamazaki	亚玛萨基
Yao	姚	Yared	亚瑞德
Yaroslav	亚若斯雷	Yildiz	易尔德茨
Yong	雍	Yor	约尔
Yu	余	Yushkevich	尤希科维奇

Z

Zacklad	查科兰德	Zakoïan	查克安
Zame	查姆	Zapatero	查帕特罗
Zariphopoulou	查利弗普洛	Zechner	查奇诺

Zeevi	泽威	Zervos	泽弗斯
Ziegler	泽格洛	Zhang	张
Zhao	赵	Zheng	郑
Zhou	周	Zhu	朱
Zin	秦	Zou	邹
Zuasti	朱安斯迪	Zvan	茨凡
Zwiebel	茨威贝尔		

术语对照表

A

absence of arbitrage	无套利
absolute priority	绝对优先权
actions	行动
adapted	适应
adapted process	适应过程
additive utility	可加型效用
admissible controls	可容许的控制
affine	仿射
affine diffusion	仿射扩散
affine, intensity	仿射强度
affine model, empirical estimation	仿射模型,经验估计
affine term-structure model	仿射期限结构模型
affine volatility process	仿射波动性过程
after-tax	税后
agent	行为人
aggregate endowment	总资源禀赋
aggregation	集合体,总量
algebra	代数
allocation	配置
almost everywhere	几乎处处成立
almost surely	几乎肯定成立

ambiguity aversion	模糊厌恶
American barrier options	美式障碍期权
American call	美式看涨期权,美式买权
American call, with dividends	含股利的美式看涨期权
American option, early exercise premium	美式期权提前履约酬金
American option, free boundary problem	美式期权无边界问题
American option price	美式期权定价
American option price, numerical solution	美式期权定价数值解方法
American option, Stefan problem	美式期权,斯特芬问题
American options with jumps	带跳跃的美式期权
American put	美式看跌期权,美式卖权
American securities, using the semi-group approach to	美式期权半群方法运用
American security	美式证券
analytic	解析的
antithetic sampling	正反取样
approximate arbitrage	近似套利
arbitrage	套利
arbitrage pricing theory	套利定价理论
ARCH	自回归条件异方差
arrears	保留,余下
Arrow-Debreu equilibria in infinite-dimensional settings	无限维阿罗—德布鲁均衡
Arrow-Debreu equilibrium	阿罗—德布鲁均衡
Arrow-Pratt measure	阿罗—普拉特测度
Asian option	亚式期权
asset pricing formula	资产定价公式
asset pricing, nonadditive utility	不可加型效用资产定价
asset substitution	资产替代
assets	资产
asymmetric information	不对称信息
asymptotic distribution	渐进分布
at market	置于市场水平
augmented filtration of a process	过程的被增过滤

average-rate options	平均率期权
Azema's martingale	阿泽玛鞅

B

Bachelier	巴奇勒
backward difference equation	向后差分方法
backward Kolmogorov equation	向后柯尔莫哥洛夫方程
backward SDE	向后 SDE
backward stochastic differential equations	向后随机微分方程
Banach lattice	巴拿赫格子
bankruptcy	破产
barrier option	障碍期权
basic HJM drift restriction	基本 HJM 漂移限制
Bellman condition	贝尔曼条件
Bellman equation	贝尔曼方程
Bellman's principle of optimality	贝尔曼最优化法则
Bermudan swaption	百慕大互换
Bernoulli trials	贝努利实验
Bessel function	贝塞耳函数
beta	贝塔
betweenness certainty equivalent	中间状态确定型等价
binary options	二项期权
Binomial Approximation of the Black-Derman-Toy	布莱克—德曼—托尔二项近似
Binomial Option Pricing	二项期权定价
binomial option pricing, limit	二项期权定价极限
binomial stock returns	二项股票回报
binomial term-structure models	二项期限结构模型
bivariate binary options	二变量二项期权
Black-Derman-toy model	布莱克—德曼—托尔模型
Black-Karasinski model	布莱克—卡拉辛司基模型
Black-Scholes	布莱克—斯科尔斯
Black-Scholes, convergence to	布莱克—斯科尔斯,收敛
Black-Scholes formula	布莱克—斯科尔斯公式

Black-Scholes implied volatilities	布莱克—斯科尔斯隐含波动性
Black-Scholes option pricing formula, in equilibrium	均衡状态下布莱克—斯科尔斯期权定价公式
Black-Scholes-Merton model	布莱克-斯科尔斯—默顿模型
Blackwell's Theorem	布莱克威尔定理
bond	债券
bond options, American	美式债券期权
bond-option pricing in a Gaussian setting	高斯分布下的债券期权定价
Borel	波莱尔
boundary condition	边界条件
bounded	有界的
bounded adapted processes	有界适应过程
Brownian motion, geometric	几何布朗运动
Brownian motion, martingale	布朗运动,鞅
budget-feasible consumption set	预算可行消费集
buy-at-the-min	最低点买入

C

calibration	校准
call option	看涨期权
callable bonds	可赎回债券
callable convertible debt	可赎回可转换债券
cancellable call option	可撤消看涨期权
cap pricing	上限(顶部)定价
Capital Asset Pricing Model	资本资产定价模型
capital structure	资本结构
capital-stock process	资本—股票过程
caplet	小额上限现金流
CAPM	资本资产定价模型
CAPM, two factor	二因素资本资产定价模型
carrying costs	搬运成本
cash settlement	现金结算
Cauchy problem	柯西问题
CBI processes	CBI 过程

CCAPM	消费资本资产定价模型
Central Limit Theorem	中心极限定理
changes of numeraire	计价标准变化
cheapest-to-deliver option	最廉价交付期权
CIR, density function	CIR 密度函数
CIR, discrete-time model	CIR 离散时间模型
CIR, empirical estimation	CIR 经验估计
CIR, empirical results	CIR 实证结果
CIR, Laplace transform	CIR 拉普拉斯变形
CIR model	CIR 模型
CIR model, calibration	CIR 模型校准
CIR, nonnegativity of interest rate	CIR 利率非负性
closed	闭型
collateral	抵押
collateral constraints	抵押约束
collateralized debt obligations	附担保债务
commodity prices	商品价格
commodity term-structure models	商品期限结构模型
compact metric space	紧致冲击测量空间
compensated counting process	补偿计数过程
complement	补充
complementary slackness condition	互补型松弛条件
complete	完备
complete markets	完备市场
completed	闭
completion	完全
complex options	复杂期权
compound options	复合期权
computation of equilibrium	均衡计算
concave program	凹性规划
conditional expectation	条件期望
conditional expected rate of return	条件期望回报率
cone	锥
consistency of GMM estimators	广义矩法估计的一致性

consistent	一致
consol	联合公债
consol rate	联合公债率
constrained participation	受约束的参与
constraints	约束
consumption	消费
consumption process	消费过程
consumption-based CAPM	基于消费的资本资产定价模型
consumption-based CAPM, incomplete markets	不完备市场中基于消费的资本资产定价模型
consumption CAPM, transaction costs	消费资本资产定价模型,交易成本
continually compounding interest rate	连续复利率
continuation region	连续区域
continuous	连续
Continuous Mapping Theorem	连续映射定理
continuous-branching processes	连续分支过程
continuously compounding yield	连续复利收益率
control problem	控制问题
controlled diffusion function	控制扩散函数
controlled drift function	控制漂移函数
controls	控制
convergence	收敛
convergence of the binomial model	二项模型的收敛性
converges in distribution	依分布收敛
converges in probability	依概率收敛
convertible bond	可转换债券
convexity	凸性
corporate debt	公司债务
correlation	相关性
cost-of-carry formula	运送成本公式
counting process	计数过程
covariance	协方差
Cox Ingersoll-Ross	考克斯—英格索—罗斯
Cox-Ingersoll-Ross, fundamental solution	考克斯—英格索—罗斯基本解

Crank Nicholson approach	科朗克—尼科尔森方法
credit derivatives	信用衍生产品
credit constrained	信用约束
cum-dividend	累积券息
cum-dividend value	累积券息价值
cumulative dividend	累积券息
cumulative dividend process	累积券息过程
cumulative-return process	累积回报过程
currency convergence	货币集聚
currency options	货币期权
curve fitting	拟合曲线

D

debt overhang	债务延迟
decentralized production decisions	分散化生产决策
default correlation	违约相关性
default risk premium	违约风险酬金
defaultable swaps	违约互换
default-adjusted short rate	基于违约调整后的短期利率
deflated cumulative-dividend process	缩减的累积券息过程
deflated gain process	缩减的盈利过程
deflator	缩子
delivery arbitrage	交付套利
delivery date	交付日
density process	密度过程
derivative asset pricing	衍生资产定价
derivative security	衍生证券
derivatives, credit risk	信用风险衍生品
determinacy	确定性
diff swaps	利差互换
differential approach	差分方法
diffusion	扩散
Diffusion Invariance Principle	扩散不变性原理
Dirac measure	迪拉克测度

directional 方向性
disappointment aversion 失望厌恶
discount 折价，贴现
discount function 贴现函数
discount rate 贴现率
discretization errors 离散化误差
dispersed expectations 分散期望
distance 距离
dividend process 券息过程
dividend yield 券息收益率
dividend price pair 券息—价格偶
dividend-rate process 券息率过程
Dominated Convergence Theorem 控制收敛定理
double-barrier 双重障碍
double-step 两步
double-step options 两步期权
doubling strategies 加倍策略
doubling strategy 加倍策略
doubly stochastic 双重随机
doubly stochastic, counter-example 双重随机反例
down-and-outs 跌出局
drift 漂移
driven by some filtration 由过滤驱动
duality and optimality 二元性和最优性
duality techniques 二元性技术
Dudley's Theorem 杜德利定理
dynamic programming 动态规划
dynamic programming, recursive-utility 递归效用动态规划
dynamic spanning condition 动态张量条件

E

early exercise 提前履约
econometric estimation of term-structure models 期限结构的计量经济估计

econometrics	计量经济学
economy	经济
efficient allocation	有效配置
EGARCH	广义自回归条件异方差
elliptic	椭圆形
empirical average	经验平均
empirical distribution vector	经验分布向量
endowment	资源禀赋
enlargement of filtrations	扩大后的过滤
equilibrium	均衡
equilibrium, indeterminacy	均衡不确定性
equilibrium, recursive utility	递归效用均衡
equity	股东权益
equity Premium puzzle	股权贴水之谜
equivalent	等价
equivalent martingale measure	等价鞅测度
equivalent martingale measure, constraints	等价鞅测度约束
equivalent martingale measure, counterexample	等价鞅测度反例
equivalent martingale measure, infinite-horizon case	等价鞅测度无限期例子
equivalent martingale measure, transactions costs	等价鞅测度交易成本
equivalent measures	等价测度
error coefficient	误差系数
Escher transform	埃希尔变形
essential supremum	实质上确界
essentially bounded	实质有界
Euclidean norm	欧基里德标准
Euler approximation	欧拉近似
European call option	欧式看涨期权,欧式买权
European put option	欧式看跌期权,欧式卖权
events	事件
ex dividend	除息

exercise, American calls	美式卖权的执行
exercise boundary	执行边界
exercise policy	执行方针
exercise price	执行价格
exercise region	执行区域
existence with recursive utility	递归效用的存在
exotic options	奇异期权
expectation	期望
expectations hypothesis	期望假设
expected utility	期望效用
expiration time	失效时间
explicit methods	明晰解
exponential-affine	指数仿射

F

fair price	公平价格
Farkas's Lemma	法卡斯定理
fast Fourier transform	快速傅立叶转换
FBSDE	向前向后随机微分方程
feasible	可行
feasible allocation	可行配置
feasible directions	可行方向
feedback	反馈
Feynman-Kac solution	费恩曼—凯科解
field	场
filtering	过滤
filtration	过滤
filtration, right-continuous	右连续过滤
filtration, usual conditions	一般条件过滤
finances a consumption process	为消费过程融资
finite-difference	有限差分
finite-difference, binomial method	二项式有限差分
finite-variation process	有限方差过程
first to default	首次违约

first-order risk aversion	一阶风险厌恶
first order scheme	一阶方案
fixed point	不动点
Fixed Point Theorem	不动点定理
fixed-income securities	固定收入证券
fixed point	不动点
floating rate note	浮动利率票据
floating-rate notes	浮动利率票据
floor	底限(底部)
Fokker-Planck equation	福克—普朗克方程
Fokker-Planck equation.	福克—普朗克方程
foreign bond options	外国债券期权
foreign exchange rates	外汇汇率
foreign term-structure models	外国期限结构模型
foreign currency	外币
foreign-exchange option	外汇期权
forward contract	远期合约
forward curves, commodities	商品远期曲线
forward difference equation	向前差分方程
forward Kolmogorov equation	向前柯尔莫哥洛夫方程
forward measure	远期测度
forward price	远期价格
forward-backward stochastic differential equations(FBSDE)	向前—向后随机差分方程
forward-measure approach	向前测度方法
forward-rate model	远期率模型
forwards and futures	远期和期货
Fourier transform	傅立叶变换
Fourier transform methods	傅立叶变换方法
fractional Brownian motion	分数布朗运动
free boundary problem	无边界问题
free lunch	免费的午餐
free lunch with vanishing risk	风险弱化的午餐
free-boundary problem	无边界问题

Frobenius-Perron Theorem	弗洛班努斯—佩隆定理
Fubini's Theorem	福比尼定理
Fubini's Theorem for stochastic integrals	随机积分福比尼定理
fundamental solution	基本解
fundamental solution, CIR model	CIR 模型基本解
futures and forwards	期货和远期
futures contract	期货合约
futures, hedging	期货,对冲应用
futures, interest rate	期货,利息率
futures position process	期货头寸过程
futures price	期货价格
Futures-Forward Price Equivalence	期货—远期价格等价
futures-price process	期货—价格过程
gain process	盈利过程

G

GARCH	广义自回归条件异方差
GARCH, option pricing	广义自回归条件异方差,期权定价
Gateaux	加特奥斯
Gaussian	高斯
Gaussian forward-rate model	高斯远期利率模型
Gaussian short-rate model	高斯短期利率模型
general equilibrium	一般均衡
generalized autoregressive conditional hetcroscedastic	广义自回归条件异方差
generalized method of moments	广义矩法
generated	生成
generic	一般
generic existence of equilibrium	均衡的一般存在性
geometric Brownian motion	几何布朗运动
Girsanov's Theorem	基尔萨诺夫定理
gradient	梯度
gradient, utility	效用的梯度
Green's function	格林函数

Green's function, numerical solution	格林函数数值解
grid	栅格
growth	增长
growth condition	增长条件
growth-optimal policies	最优增长方针

H

habit-formation	习惯养成
Hahn-Banach Theorem	哈恩—巴拿赫定理
Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)	汉密尔顿—雅可比- -贝尔曼(HJB)
HARA	双曲线风险厌恶
hazard function	风险函数
hazard rate	风险率
Heath-Jarrow-Morton	奚斯—加罗—莫顿
Heath-Jarrow-Morton model	奚斯—加罗—莫顿模型
hedging under leverage constraints	杠杆约束下的对冲应用
Hessian matrix	海塞矩阵
Heston	赫斯顿
Heston model	赫斯顿模型
heterogeneous agents and incomplete markets	异质行为人和不完备市场
heterogeneous beliefs	异质信念
high-order-contact	高阶联系
Hilbert space	希尔伯特空间
HJM drift restriction	HJM 漂移限制
HJM, estimation	HJM 估计
HJM model	HJM 模型
HJM, model Markov variation	HJM 马尔可夫方差
HJM, numerical methods	HJM 数值解
Hölder continuous	赫德连续
Ho-Lee	何—李
hyperbolic absolute risk averse (HARA)	双曲线风险厌恶(HARA)
hyperbolic SPDE	双曲线 SPDE

I

illiquidity	非流动性
imperfect information	不完美信息
implicit	隐含的
Implicit Function Theorem	隐函数定理
implied volatility	隐含波动性
inada conditions	英纳达条件
irreversible investment	不可逆投资
Ito process	伊藤过程
Ito's Formula	伊藤公式
Ito's Lemma	伊藤引理

J

jointly measurable	交可测度
Jump	跳跃
jump-diffusion	跳跃—扩散

K

Kakutuni's Fixed Point Theorem	卡库图尼不动点定理
Knightian uncertainty	柯尼蒂安不确定性
knock-ins	撞入
knock-outs	撞出
Kreps-Porteus	克瑞普斯—波特乌斯
Kreps-Yan Theorem	克瑞普斯—严定理

L

Lévy Inversion Formula	列维反转公式
Lévy's characterization of Brownian motion	布朗运动的列维特征
Lagrange multiplier	拉格朗日乘子
Lagrangian	拉格朗日函数
Large Deviations Theorem	大偏差定理
large investor	大投资者
latent	隐身

law of iterated expectations	重复期望定律
law of large numbers	大数定理
law of large numbers for Markov chains	适用马尔可夫链的大数定律
left limits	左极限
left-continuous	左连续
leverage constraints	杠杆约束
LIBOR	伦敦银行间利率
limit in probability	概率上的极限
limited liability	有限责任
limited-rationality	有限理性
limited-risk options	有限风险期权
Lindeberg-Feller Central Limit Theorem	林德伯格—费勒中心极限定理
linear equations of the tridiagonal form	三角对角线形式的线性方程
linear regression	线性回归
linear stochastic differential equation	线性随机微分方程
linear subspace	线性子空间
linearity of stochastic integrals	随机积分的线性
Lipschitz	利普斯基茨
local martingale	局部鞅
local martingale measure	局部鞅测度
local substitution for consumption	消费的局部替代
local time	局部时间
local-expected-utility	局部期望效用
locally	局部地
locally Lipschitz	局部利普斯基茨
lock-in options	锁定期权
logarithmic additive utility	对数可加性效用
log-normal	对数正态
log-optimal	对数最优
long-term interest rates	长期利率
lookback options	回望期权
Lucas model	卢卡斯模型
lump-sum dividend	一次性总券息

M

Malliavin calculus	莫里亚文微积分
marginal rates of substitution	边际替代率
marginal utility	边际效用
marginal utility of a representative agent	代表性行为人的边际效用
marginal-rate-of-substitution process	边际替代率过程
market completeness under a change of measure	在测度变化下保全市场完全性
market imperfections	市场不完美性
market model	市场模型
market model, cap pricing	市场模型上限(顶部)定价
market return	市场回报
market risk aversion	市场风险厌恶
market time	市场时间
marketed space	买卖空间
marketed space, L^2-closedness	买卖空间, L^2 闭型
marketprice-of-risk process	风险市场价格过程
market-value process	市场价值过程
marking to market	盯市
Markov	马尔可夫
Markov chain	马尔可夫链
Markov chain, continuous-time	连续时间马尔可夫链
Markov dynamic programming	马尔可夫动态规划
Markov equilibrium	马尔可夫均衡
Markov single-agent asset pricing model	马尔可夫单一行为人资产定价模型
Markovian versions of the HJM model	HJM 模型的马尔可夫版本
martingale	鞅
martingale approach to optimal invesiment	最优投资的鞅方法
martingale generator	鞅发生器
martingale representation property	鞅表述特征
martingale representation theorem	鞅表述定理
maturity goes to infinity	到期期限趋于无限
Mean Value Theorem	中值定理

mean-reversion	转向均值
mean-summable	均值可加
mean-variance criteria in a continuous-time setting	连续时间情形下的均值方差标准
measurable	可测度的
median-price options	中间价期权
Merton	默顿
Merton model	默顿模型
mesh sizes	网孔尺寸
method-of-moments estimation	矩法估计
Milshtein approximation	米尔斯坦近似
minimax hedging	最小最大对冲应用
Modigliani-Miller Theorem	莫迪格利尼—米勒定理
monetary integration	货币统一
money	货币
Monte Carlo simulation	蒙特卡洛模拟
Monte Carlo simulation of the jump times	带跳跃时间的蒙特卡洛模拟
mortgage-backed securities	附担保证券
multifactor term-structure model	多因子期限结构模型

N

negative interest rates	负利息率
negative semi-definite	半负定
Newton-Raphson	牛顿—拉夫森
Newton-Raphson search	牛顿—拉夫森搜索
no free lunch with vanishing risk	没有无风险的免费午餐
nominal consumption-price process	名义消费—价格过程
nominal dividends	名义股利
nominal price process	名义价格过程
nonadditive recursive utility	非可加型递归效用
non-Brownian information	非布朗信息
non-bushy trees	无灌木丛的树
nonexplosive counting process	非爆炸性计数过程
nonlinear least squares	非线性最小平方

nonnegative wealth constraint	非负财富约束
nonseparable preferences	不可分偏好
nonstandard analysis	非标准分析
norm on matrices	矩阵模化
Novikov's condition	诺维可夫条件
null	空
null set	空集
numeraire	计量标准
numeraire, changes	计量标准变化
numeraire deflator	计量标准缩子
numeraire portfolio	计量标准组合
Numerical Recipes in C	C语言的数值方法
numerical solution	数值解

O

oil, term-structure models	石油，期限结构模型
one-factor term-structure models	单因素期限结构模型
optimal control	最优控制
optimal exercise boundary	最优执行边界
optimal exercise policy	最优执行方针
optimal feedback control	最优反馈控制
optimal stopping	最佳停止
optimal stopping problem	最佳停止问题
optimality	最优化
option	期权
option, econometric estimation	期权计量经济估计
option price, convexity	期权价格，凸性
option pricing, with jumps	带跳跃的期权定价
option, unobservable underlying	不可观察的期权
options, average rate	平均率期权
options, binary	二项期权
options, bonds, American	美式债券期权
options, double-step	两步期权
options, general equilibrium	期权，一般均衡

options, interest rate	期权,利息率
options, median-price	期权,中间价
options, on multiple assets	多期资产的期权
options, on yields	收益率期权
options, spanning	期权时间张量
options, step	期权,步
order of convergence	收敛的阶数

P

par	面值
par coupon rate	息票率面值
par floating-rate note	按面值发行的浮动利率票据
parabolic	抛物线
Pareto inefficiency of incomplete-markets	不完备市场的帕累托非效率性
Pareto optimal	帕累托最优
Pareto optimality in infinite-dimensional economies	无限维经济中的帕累托最优性
Parisian	巴黎式
partial derivatives	偏导数
partial differential inequality	偏微分不等式
partition	分割
passport options	通行证期权
path dependent	路径依赖
path integrals	路径积分
pathwise integral	沿路径积分
perpetual options	永续期权
point process	点过程
Poisson distribution	泊松分布
Poisson process	泊松过程
Poisson random variable	泊松随机变量
policy function	方针函数
polynomial growth condition	多项式增长条件
portfolio constraints	组合约束
portfolio insurance	组合保险

positive linear functionals	正线性函数
pre-default price	违约前价格
predictable	可预期的
price function	价格函数
price impact	价格影响
price, state	状态价格
pricing kernel	定价核
pricing semi-groups	半群定价
probabilistic solution	概率解
probability	概率
probability measure	概率测度
probability space	概率空间
process	过程
product measurable	积可测的
production under uncertainty	不确性条件下的生产
proportional transactions costs	比例交易成本
protective covenant	保护性条款
pseudo-price process	准价格过程
pseudo random	准随机
put option	看跌期权(卖权)
put-call parity	看涨看跌期权平价,买卖权平价
puttable	可赎回的

Q

quadratic utilities	二次型效用
quadratic utility	二次型效用
quality option	质量期权

R

Radon-Nikodym derivative	拉顿—尼科代姆导数
random field	随机场
random variable	随机变量
rational exercise policy	理性执行方针
rational-beliefs	理性信念

rationality	理性
real options	实物期权
real price process	实物价格过程
real short	真实短期(利率)
recursive	递归
recursive utility	递归效用
recursive utility in continuous-time settings	连续时间情形下的递归效用
recursive utility, dynamic programming	递归效用动态规划
reduced-form models of debt	债务简化形式模型
redundant	富余
regime switching	政体转换
regression coefficient	回归系数
regular preferences	规则偏好
relative risk aversion	相对风险厌恶
replicates	复制
repo rates	回购利率
representative agent	代表性行为人
resettlement	重新结算
resolution of uncertainty	不确定性的解决
return	回报
Riccati equation	瑞加蒂方程
Riesz representation	利茨表述
Riesz Representation Theorem for $L^2(P)$	$L^2(P)$的利茨表述定理
Riesz-Frechet Theorem	利茨--弗莱吉定理
right continuous	右连续
risk-neutral intensity process	风险中性强度过程
risk-neutral probabilities	风险中性概率
risk-neutral valuation	风险中性估价
riskless	无风险
rolled over	滚动
rolling spot futures contract	滚动现期期货合约
Runge-Kutta method	朗基—库塔方法
running reward function	运行奖励函数

S

Saddle Point Theorem	鞍点定理
sample path	样本路径
scrambled-net	攀缘网
SDE	随机微分方程
SDE existence	随机微分方程存在性
second order discretization schemes	二阶离散方案
securities	证券
security prices	证券价格
security Price process	证券价格过程
security-Spot market equilibrium	现货证券市场均衡
self-financing	自融资
sell-at-the-max option	最高价卖出期权
semi-group	半群
semimartingale	半鞅
Separating Hyperplane Theorem	分离超平面定理
separation of cones	锥的分离
separation-of-variables	变量分离
sharp-brackets process	角括弧过程
short position	空头
short rate	短期利率
short-sales constraints	卖空约束
short-term riskless borrowing	短期无风险借贷
simple	简单的
simple process	简单过程
simple random variables	简单随机变量
simulated-method-of-moments estimation	矩阵估计模拟法
single-agent equilibrium	单个行为人均衡
singular price	单一价格
skew	弯曲
Slater condition	斯莱特条件
smile curve	微笑曲线
smirk	假笑

smooth-additive	光滑可加
smoothness	光滑
smooth-pasting condition	平缓粘贴条件
Snell envelope	斯耐尔包络
sovereign debt	政府债券
span	张量
spanning	张量
spanning number	张量数
SPDE	随机偏微分方程
special repo rates	特别回购利率
spline	薄片
square root" diffusions	平方根扩散
square-integrable	平方可积的
standard Brownian motion	标准布朗运动
standard filtration	标准过滤
standard normal	标准正态
state-price	状态价格
state-price beta	状态价格贝塔
state-price deflator	状态价格缩子
state price density	状态价格密度
state-price kernel	状态价格核
state price, uniqueness	状态价格惟一性
state-price vector	状态价格向量
states	状态
stationarity	静态性
steady-state distribution	稳态分布
Stefan problem	斯特芬问题
Stieltjes integrals	斯蒂尔基斯积分
Stiemke's Lemma	斯蒂莫科引理
stochastic control	随机控制
stochastic differential	随机微分
stochastic differential equation(SDE)	随机微分方程
stochastic differential utility	随机微分效用
stochastic Euler equation	随机欧拉方程

stochastic exponential	随机指数型
stochastic flows	随机流
stochastic game	随机博弈
stochastic integral	随机积分
stochastic integration, linearity	线性随机积分
stochastic return distributions	随机回报分布
stochastic volatility	随机波动性
stochastic volatility affine model	随机波动仿射模型
stochastic volatility econometric estimation	随机波动性的计量经济估计
stock	股票
stock-market equilibrium	股票市场均衡
stopping game	停止博弈
stopping time	停止时间
stopping time, non trivial	非无意义的停止时间
strict priority	严格优先权
strictly variance-averse	严格厌恶方差
string	串
strong law of large numbers	强大数定律
strong law of large numbers, uniform	强大数定律一致性
strong Markov	强马尔可夫
strong solution	强解
structural models of debt	债务结构化模型
submartingale	子鞅
subtribe	子族
sunspot	太阳黑子
superdifferential	超微分
supermartingale	上鞅
super-replicating trading strategy	超级复制交易策略
survival function	生存函数
swaps	互换
swaps, defaultable	可违约的互换
swap-spread model	互换利差模型
swaption	互换

T

tax, interest expense deduction	税收，利息成本税前扣除
taxable and nontaxable bonds	纳税和非纳税债券
temporary-equilibrium	暂时均衡
tenor	路程
term structure	期限结构
term structure, binomial	二项期限结构
term structure, Black-Derman-Toy	布莱克-德曼—托尔期限结构
term structure, calibration	期限结构标准
term simctllre, econometrics	期限结构计量经济学
term structure, Ho-Lee	何—李期限结构
term structure of credit spreads	信用利差期限结构
term structure of interest rates	利率期限结构
terminal arbitrage issue	期终套利问题
terminal ex-dividend prices	期终除息价格
terminal reward function	终端奖励函数
term-structure derivatives	期限结构衍生证券
term-structure model	期限结构模型
term-structure models, foreign exchange	外汇期限结构模型
term-structure, numerical methods	期限结构数值方法
test moment function	检验矩阵函数
Theorem of the Alternative	二中择一定律
theory of choice	选择理论
time aggregation	时间加总
time-homogeneous Markov chain	时间均性马尔可夫链
timing of information	信息时间
totally inaccessible stopping times	完全不可接近的停止时间
tower property	宝塔性质
trace	迹
trading strategy	交易策略
transactions costs	交易成本
transform	变形
transition matrix	转换矩阵

translated CIR model 转换后的 CIR 模型
transversality condition 横截性条件
triangular array 三角数组
tribe 族
tribe generated 由族生成的
tridiagonal matrix 三角形矩阵
turnpike 收费栅
two-fund separation 两基金分离

U

uniform strong law of large numbers 一致强大数定律
uniformly in t 对 t 一致
uniformly integrable 均匀可积
uniformly parabolic 一致抛物线
unique decomposition property of Ito processes 伊藤过程的惟一分解特征
uniqueness of equilibria 均衡惟一性
uniqueness of equivalent martingale measures 等价鞅测度的惟一性
unit zero-coupon riskless bond 单位无风险零息债券
up-and-ins 涨进局
usual conditions 通常条件
utility function 效用函数
utility gradients 效用梯度
utility process 效用过程
utility representations 效用表述

V

value 价值
value function 价值函数
value function, differentiability 价值函数可微性
value iteration 价值迭代
variance reduction techniques 降低方差技术
Vasicek term-structure model 瓦斯塞克期限结构模型
viscosity solutions 粘性解

volatility	波动性
volatility,CIR process	CIR 过程波动性
volatility,GARH limit	GARCH 极限波动性
volatility,Heston model	赫斯顿模型波动性
volatility process	波动性过程
volatility stochastic	随机波动性
von Neumann-Morgenstern	冯·诺伊曼—摩根斯坦恩

W

weak solution	弱解
weakly arbitrage-free	弱无套利
wealth process	弱过程
weighting matrices	权重矩阵
Wiener-Chaos	维纳混沌
wildcard option	不规则期权

Y

yield	收益率
yield options	收益期权
yield-spread option	收益差距期权

Z

zero-beta return	零贝塔回报
zero-coupon bond	零息债券

参考文献

Aase, K. (1984). "Optimum Portfolio Diversification in a General Continuous Time Model." *Stochastic Processes and Their Application* 18: 81—98.

Aase, K. (1999). "An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads." *Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 24: 69—96.

Abel, A. (1988). "Stock Prices under Time-Varying Dividend Risk: An Exact Solution in an Infinite-Horizon General Equilibrium Model." *Journal of Monetary Economics* 22:375—393.

Abken, P. (1993). "Valuation of Default-Risky Interest-Rate Swaps." *Advances in Futures and Options Research* 6:93—116.

Acharya, S., and D. Madan. (1993). "Arbitrage-Free Econometric Option Pricing Models in an Incomplete Market with a Locally Risky Discount Factor." Working Paper, Federal Reserve Board.

Acharya, V., and J. Carpenter. (1999). "Corporate Bonds: Valuation, Hedging, and Optimal Exercise Boundaries." Working Paper, Department of Finance, Stern School of Business.

Adams, K., and D. Van Deventer. (1994). "Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness." *Journal of Fixed Income* 4(June): 52—62.

Adler, M., and J. Detemple. (1988). "On the Optimal Hedge of a Non-Traded Cash Position." *Journal of Finance* 43: 143—153.

Ahn, H. (1993). "A Review on Stochastic Differential Utility." Working Paper, Mathematics Department, Purdue University.

Ahn, H., M. Dayal, E. Grannan, and G. Swindle. (1995). "Hedging with Transaction Costs." *Annals of Applied Probability* 8:341—366.

Aït-Sahalia, Y. (1996a). "Do Interest Rates Really Follow Continuous-Time Markov Diffusions?" Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago and NBER.

Aït-Sahalia, Y. (1996b). "Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities." *Econometrica* 64:527—560.

Aït-Sahalia, Y. (1996c). "Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate." *Review of Financial Studies* 9: 385—342.

Aït-Sahalia, Y., and A. Lo. (1998). "Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices." *Journal of Finance* 53:499—547.

Aït-Sahalia, Y., and A. Lo. (2000). "Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion." *Journal of Econometrics* 94: 9—51.

Aït-Sahalia, Y., Y. Wang, and F. Yared. (1998). "Do Option Markets Correctly Price the Probabilities of Movement of the Underlying Asset?"Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago. Forthcoming in *Journal of Econometrics*.

Ait-Sahlia, F. (1995). "Optimal Stopping and Weak Convergence Methods for Some Problems in Financial Economics."Working Paper, Ph. D. Dissertation. Operations Research Department, Stanford University.

Ait-Sahlia, F., and T. Lai. (1997a). "Random Walk Duality and the Valuation of Discrete Lookback Options."Working Paper, Hewlett-Packard Laboratories.

Ait-Sahlia, F., and T. Lai. (1997b). "Valuation of Discrete Barrier and Hindsight Options."Working Paper, Hewlett-Packard Laboratories.

Ait-Sahlia, F., and T. -L. Lai. (1996). "Approximations for American Options." Working Paper, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University.

Ait-Sahlia, F., and T. -L. Lai. (1998). "Efficient Approximations to American Option Prices, Hedge Parameters and Exercise Boundaries."Working Paper, Hewlett-Packard Laboratories, Palo Alto, CA.

Aiyagari, S., and M. Gertler. (1991). "Asset Returns with Transaction Costs and Uninsured Individual Risk: A Stage Ⅲ Exercise." *Journal of Monetary Economics* 27: 311—331.

Akahari, J. (1993). "Some Formulas for a New Type of Path-Dependent Option." Working Paper, Department of Mathematics, University of Tokyo.

Akian, M., J. -L. Menaldi, and A. Sulem. (1996). "On an Investment-Consumption Model with Transaction Costs." *SIAM Journal on Control and Optimization* 34: 329—364.

Akian, M., A. Sulem, and M. Taksar. (1999). "Dynamic Optimisation of a Long Term Growth Rate for a Mixed Portfolio with Transaction Costs. The Logarithmic Utility Case."Working Paper, INRIA Rocquencourt.

Aliprantis, C., and O. Burkinshaw. (1985). *Positive Operators*. Orlando: Academic Press.

Allegretto, W., C. Barone-Adesi, and R. Elliott. (1993). "Numerical Evaluation of the Critical Price and American Options." Working Paper, Department of Mathematics, University of Alberta.

Allingham, M. (1991). "Existence Theorems in the Capital Asset Pricing Model." *Econometrica* 59: 1169—1174.

Alvarez, O. (1991). "Gestion de Portefeuille avec Coutt de Transaction." Working Paper, École Polytechnique.

Alvarez, O., and A. Tourin. (1996). "Viscosity Solutions of Nonlinear Integro-Differential Equations." *Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Non Lineaire* 13: 293—317.

Amendinger, J. (1999). "Martingale Representation Theorems for Initially Enlarged Filtrations." Working Paper, Technische Universität Berlin.

Amendinger, J., P. Imkeller, and M. Schweizer. (1998). "Additional Logarithmic Utility of an Insider." *Stochastic Processes and Their Applications* 75: 263—286.

Amin, K. (1991). "On the Computation of Continuous Time Option Prices Using Discrete Approximations." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 26: 477—495.

Amin, K. (1993a). "Jump-Diffusion Option Valuation in Discrete-Time." *Journal of Finance* 48:1833—1863.

Amin, K. (1993b). "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility." *Journal of Finance* 48:881—910.

Amin, K., and J. Bodurtha. (1995). "Discrete-Time Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates." *Review of Financial Studies* 8: 193—234.

Amin, K., and R. Jarrow. (1993). "Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy." *Mathematical Finance* 2:217—237.

Amin, K., and A. Khanna. (1994). "Convergence of American Option Values from Discrete to Continuous-Time Financial Models." *Mathematical Finance* 4:289—304.

Amin, K., and A. Morton. (1994). "Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models." *Journal of Financial Economics* 35:141—180.

Amin, K., and V. Ng. (1993). "Options Valuation with Systematic Stochastic Volatility." *Journal of Finance* 48:881—909.

Andersen, L. (1995). "Bivariate Binary Options." Working Paper, Research General Re Financial Products Corp.

Andersen, L. (1996). "Monte Carlo Simulation of Barrier and Lookback Options with Continuous or High-Frequency Monitoring of the Underlying Asset." Working Paper, General Re Financial Products Corp.

Andersen, L., and J. Andreasen. (1998). "Volatility Skew and Extensions of the Libor Market Model." Working Paper, General Re Financial Products, New York. Forthcoming in *Applied Mathematical Finance*.

Andersen, L., and J. Andreasen. (1999). "Jump-Diffusion Processes: Volatility Smile Fitting and Numerical Methods for Pricing." Working Paper, General Re Financial Products. Forthcoming in *Review of Derivatives Research*.

Andersen, L., J. Andreasen, and R. Brotherton-Ratcliffe. (1998). "The Passport Option." *Journal of Computational Finance* 1(3).

Andersen, L., and R. Brotherton-Ratcliffe. (1995). "The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach." Working Paper, General Re Financial Products Corp.

Andersan, R., Y. Pan, and S. Sundaresan. (1995). "Corporate Bond Yield Spreads and the Term Structure." Working Paper, CORE, Belgium.

Anderson, R., and S. Sundaresan. (1996). "Design and Valuation of Debt Contracts." *Review of Financial Studies* 9:37—68.

Andreasen, J. (1998). "Fast and Accurate Pricing of Path Dependent Options: A Finite Difference Approach." *Journal of Computational Finance* 2(Fall).

Andreasen, J., and B. Gruenewald. (1996). "American Option Pricing in the Jump-Diffusion Model." Working Paper, Aarhus University, Denmark.

Andreasen, J., B. Jensen, and R. Poulsen. (1998). "Eight Valuation Methods in Financial Mathematics: The Black-Scholes Formula as an Example." *Mathematical Scientist* 23:18—40.

Ansel, J., and C. Stricker. (1992). "Quelques Remarques sur un Theoreme de Yan." Working Paper, Université de Franche-Comté.

Ansel, J., and C. Stricker. (1994a). "Couverture des Actifs Contingents et Prix Maximum." *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilites Statistiques* 30:303—315.

Ansel, J., and C. Stricker. (1994b). "Lois de Martingale, Densités et Decomposition de Föllmer Schweizer." Working Paper, Université de Franche-Comté.

Antonelli, F. (1993). "Backward-Forward Stochastic Differential Equations." *Annals of Applied Probability* 3:777—793.

Apelfeld, R., and A. Conze. (1990). "The Term Structure of Interest Rates: The Case of Imperfect Information." Working Paper, Department of Economics. University of Chicago.

Araujo, A., and P. Monteiro. (1987). "Generic Non-Existence of Equilibria in Finance Models." *Journal of Mathematical Economics* 20:480—501.

Araujo, A., and P. Monteiro. (1989). "Equilibrium Without Uniform Conditions." *Journal of Economic Theory* 48:416—427.

Araujo, A., P. Monteiro, and M. Páscoa. (1996). "Infinite Horizon Incomplete Markets with a Continuum of States." *Mathematical Finance* 6:119—132.

Arntzen, H. (1994). "Solution to a Class of Stochastic Investment Problems Involving Finite Variation Controls." Working Paper, Mathematics Institute, University of Oslo.

Arrow, K. (1951). "An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics." In J. Neyman (Ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pp. 507—532. Berkeley: University of California Press.

Arrow, K. (1953). "Le Rôle des Valeurs Boursières pour la Repartition la Meillure des Risques." *Econometrie*. Colloq. Internat. Centre National de la Recherche Scientifique 40 (Paris 1952), pp. 41—47; discussion, pp. 47—48. C. N. R. S. (Paris 1953). English Translation in *Review of Economic Studies* 31(1964):91—96.

Arrow, K. (1970). *Essays in the Theory of Risk Bearing*. London: North-Holland.

Arrow, K., and G. Debreu. (1954). "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy." *Econometrica* 22: 265—290.

Artzner, P. (1995). "References for the Numeraire Portfolio." Working Paper, Institut de Recherche Mathématique Avancée Université Louis Pasteur et CNRS, et Laboratoire de Recherche en Gestion.

Artzner, P., and F. Delbaen. (1990a). "Finem Lauda' or the Risk of Swaps." *Insurance: Mathematics and Economics* 9:295—303.

Artzner, P., and F. Delbaen. (1990b). "Term Structure of Interest Rates: The Martingale Approach." *Advances in Applied Mathematics* 10:95—129.

Artzner, P., and F. Delbaen. (1992). "Credit Risk and Prepayment Option." *ASTIN Bulletin* 22:81—96.

Artzner, P., and F. Delbaen. (1995). "Default Risk and Incomplete Insurance Markets." *Mathematical Finance* 5:187—195.

Artzner, P., and D. Heath. (1990). "Completeness and Non-Unique Pricing." Working Paper, Department of Operations Research, Cornell University.

Artzner, P., and D. Heath. (1995). "Approximate Completeness with Multiple Martingale Measures." *Mathematical Finance* 5:1—11.

Artzner, P., and P. Roger. (1993). "Definition and Valuation of Optional Coupon Reinvestment Bonds." *Finance* 14: 7—22.

Arvantis, A., J. Gregory, and J.-P. Laurent. (1999). "Building Models for Credit Spreads." *Journal of Derivatives* 6 (3):27—43.

Au, K., and D. Thurston. (1993). "Markovian Term Structure Movements." Working Paper, School of Banking and Finance, University of New South Wales.

Avellaneda, M., R. Buff, C. Friedman, N. Grandchamp, L. Kruk, and J. Newman. (1999). "Weighted Monte Carlo: A New Technique for Calibrating Asset-Pricing Models." Working Paper, Courant Institute of Mathematical Sciences.

Avellaneda, M., and A. Parás. (1994). "Dynamic Hedging Strategies for Derivative Securities in the Presence of Large Transaction Costs." *Applied Mathematical Finance* 1: 165—194.

Avelleneda, M., and P. Laurence. (2000). *Financial Models and Derivative Securities*. Forth-coming.

Babbs, S. (1991). "A Family of Ito Process Models for the Term Structure of Interest Rates." Working Paper. Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Babbs, S., and M. Selby. (1996). "Pricing by Arbitrage in Incomplete Markets." *Mathematical Finance* 8: 163—168.

Babbs, S., and N. Webber. (1994). "A Theory of the Term Structure with an Official Short Rate." Working Paper, Midland Global Markets and University of Warwick.

Bachelier, L. (1900). "Théorie de la Speculation." *Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure* 3d ser., 17: 21—88. Translation in *The Random Character of Stock Market Prices*, ed. Paul Cootner, pp. 17—79. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.

Back, K. (1986). "Securities Market Equilibrium without Bankruptcy: Contingent Claim Valuation and the Martingale Property." Working Paper, Center for Math-

ematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University.

Back, K. (1991). "Asset Pricing for General Processes." *Journal of Mathematical Economics* 20: 371—396.

Back, K. (1996). "Yield Curve Models: A Mathematical Review." Working Paper, Olin School of Business, Washington University in St. Louis, St. Louis.

Back, K., H. Cao, and G. Willard. (2000). "Imperfect Competition among Informed Traders." *Journal of Finance* 55: 2117—2155.

Back, K., and S. Pliska. (1986). "Discrete versus Continuous Trading in Securities Markets with Net Worth Constraints." Working Paper, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University.

Back, K., and S. Pliska. (1987). "The Shadow Price of Information in Continuous Time Decision Problems." *Stochastics* 22: 151—186.

Back, K., and S. Pliska. (1991). "On the Fundamental Theorem of Asset Pricing with an Infinite State Space." *Journal of Mathematical Economics* 20: 1—18.

Backus, D., S. Foresi, and S. Zin. (1998). "Arbitrage Opportunities in Arbitrage-Free Models of Bond Pricing." *Journal of Business and Economic Statistics* 16: 13—26.

Bajeux-Besnainou, I., and R. Portait. (1993). "Dynamic Asset Allocation in a Mean-Variance Framework." Working Paper, ESSEC and Laboratoire d'Econométrie de L'École Polytechnique.

Bajeux-Besnainou, I., and R. Portait. (1997). "The Numeraire Portfolio: A New Methodology for Financial Theory." *European Journal of Finance* 3: 291—309.

Bajeux-Besnainou, I., and R. Portait. (1998). "Pricing Derivative Securities with a Multi-Factor Gaussian Model." *Applied Mathematical Finance* 5: 1—19.

Bajeux-Besnainou, I., and J.-C. Rochet. (1996). "Dynamic Spanning: Are Options an Appropriate Instrument?" *Mathematical Finance* 6: 1—16.

Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen. (1997). "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models." *Journal of Finance* 52: 2003—2049.

Bakshi, G., and D. Madan. (1997). "Pricing Average-Rate Contingent Claims." Working Paper, Department of Finance, College of Business and Management, University of Maryland.

Bakshi, G., and D. Madan. (2000). "Spanning and Derivative Security Valuation." *Journal of Financial Economics* 55: 205—238.

Balasko, Y. (1989). *Foundations of the Theory of General Equilibrium*. New York: Academic Press.

Balasko, Y., and D. Cass. (1986). "The Structure of Financial Equilibrium with Exogenous Yields: The Case of Incomplete Markets." Econometrica 57: 135—162.

Balasko, Y., D. Cass, and P. Siconolfi. (1990). "The Structure of Financial Equilibrium with Exogenous Yields: The Case of Restricted Participation." *Journal of Mathematical Economics* 19: 195—216.

Balduzzi, P. (1994). "A Second Factor in Bond Yields." Working Paper, Department of Finance, Stern School of Business, New York University.

Balduzzi, P., G. Bertola, S. Foresi, and L. Klapper. (1998). "Interest Rate Targeting and the Dynamics of Short-Term Interest Rates." *Journal of Money, Credit, and Banking* 30: 26—50.

Balduzzi, P., S. Das, and S. Foresi. (1998). "The Central Tendency: A Second Factor in Bond Yields." *Review of Economics and Statistics* 80: 62—72.

Balduzzi, P., S. Das, S. Foresi, and R. Sundaram. (1996). "A Simple Approach to Three Factor Affine Term Structure Models." *Journal of Fixed Income* 6 (December): 43—53.

Balduzzi, P., and A. Lynch. (1997). "Samuelson's Irrelevance Result Reconsidered: The Case of Transaction Costs." Working Paper, New York University.

Balduzzi, P., and A. Lynch. (1999). "Transaction Costs and Predictability: Some Utility Cost Calculations." *Journal of Financial Economics* 52: 47—78.

Ball, C., and A. Roma. (1994). "Stochastic Volatility Option Pricing." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 29: 589—607.

Ball, C., and W. Torous. (1985). "On Jumps in Common Stock Prices and their Impact on Call Option Pricing." *Journal of Finance* 40: 155—173.

Ball, C., and W. Torous. (1994). "Regime Shifts in Short-Term Interest Rate Dynamics." Working Paper, Owen Graduate School of Management, Vanderbilt University.

Bally, V. (1995), "An Approximation Scheme for BSDE's and Applications to Control and Nonlinear PDE's." Working Paper, Laboratoire De Statistique et Processus, Universités du Maine et D'Angers.

Bally, V., and D. Talay. (1996). "The Law of the Euler Scheme for Stochastic Differential Equations: Ⅱ. Convergence Rate of the Density." *Monte Carlo Methods and Applications* 2: 93—128.

Bank, P., and F. Riedel. (1999). "Optimal Consumption Choice under Uncertainty with Intertemporal Substitution." Working Paper, Mathematics Department, Humboldt-University of Berlin.

Banz, R., and M. Miller. (1978). "Prices for State-Contingent Claims: Some Evidence and Applications." *Journal of Business* 51: 653—672.

Barberis, N., M. Huang, and T. Santos. (2001). "Prospect Theory and Asset Prices." *Quarterly Journal of Economics*, 116:1—53.

Barles, G., R. Buckdahn, and E. Pardoux. (1997). "Backward Stochastic Differential Equations and Integral-Partial Differential Equations." *Stochastics and Stochastics Reports* 60: 57—83.

Barles, G., J. Burdeau, M. Romano, and N. Samsoen. (1993). "Estimation de la Frontière Libre des Options Américaines au Voisinage de l'Echéance." *Comtes Rendus de l'Academie de Science de Paris* 316—Ⅰ:171—174.

Barles, G., J. Burdeau, M. Romano, and N. Samsoen. (1995). "Critical Stock Price Near Expiration." *Mathematical Finance* 2: 77—96.

Barles, G., C. Daher, and M. Romano. (1992). "Convergence of Numerical Schemes for Parabolic Equations Arising in Finance Theory." Working Paper, Cahier 9244, CEREMADE, Université de Paris.

Barles, G., and E. Lesigne. (1997). "SDE, BSDE and PDE." In N. El Karoui and L. Mazliak (Eds.), *Backward Stochastic Differential Equations*, pp. 47—80. Essex: Addison Wesley Longman Ltd.

Barles, G., M. Romano, and N. Touzi. (1993). "Contingent Claims and Market Completeness in a Stochastic Volatility Model." Working Paper, Département de Mathématiques, Université de Tours, France.

Barles, G., and M. Soner. (1998). "Option Pricing with Transaction Costs and a Nonlinear Black-Scholes Equation." *Finance and Stochastics* 2: 369—397.

Barndorff-Nielsen, O. (1997). "Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling." *Scandinavian Journal of Statistics* 24: 1—13.

Barone, E., and S. Risa. (1994). "Valuation of Floaters and Options on Floaters under Special Repo Rates." Working Paper, Instituto Mobiliare Italiano, Rome.

Barone-Adesi, G., and R. Elliott. (1991). "Approximations for the Values of American Options." *Stochastic Analysis and Applications* 9:115—131.

Barraquand, J. (1993). "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate European Securities." Working Paper, Digital Research Laboratory, Paris.

Barraquand, J., and D. Martineau. (1995). "Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 30: 383—405.

Barraquand, J., and T. Pudet. (1996). "Pricing of American Path-Dependent Contingent Claims." *Mathematical Finance* 6: 17—51.

Bartle, R. (1976). *The Elements of Real Analysis* (2nd ed.). New York: Wiley.

Basak, S. (1995). "A General Equilibrium Model of Portfolio Insurance." *Review of Financial Studies* 8: 1059—1090.

Basak, S. (1997). "Consumption Choice and Asset Pricing with a Non-Price-Taking Agent." *Economic Theory* 10: 437—462.

Basak, S., and D. Cuoco. (1999). "An Equilibrium Model with Restricted Stock Market Participation." *Review of Financial Studies* 11:309—341.

Bates, D. (1996). "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Option." *Review of Financial Studies* 9: 69—107.

Bates, D. (1997). "Post-87' Crash Fears in S-and-P 500 Futures Options." Working Paper, Finance Department, Wharton School, University of Pennsylvania.

Baxter, M. (1996). "General Interest-Rate Models and the Universality of HJM." Working Paper, Statistical Laboratory, University of Cambridge, Cambridge.

Baz, J., and S. Das. (1996). "Analytical Approximations of the Term Structure for Jump-Diffusion Processes: A Numerical Analysis." *Journal of Fixed Income* 6 (1): 78—86.

Beaglehole, D. (1990). "Tax Clientele and Stochastic Processes in the Gilt Market." Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago.

Beaglehole, D., and M. Tenney. (1991). "General Solutions of Some Interest Rate Contingent Claim Pricing Equations." *Journal of Fixed Income* 1: 69—84.

Becker, R., and J. Boyd. (1993). "Recursive Utility: Discrete Time Theory." *Hitotsubashi Journal of Economics* 34: 49—98.

Beckers, S. (1981). "Standard Deviations Implied in Option Process as Predictors of Future Stock Price Variability." *Journal of Banking and Finance* 5: 363—382.

Beibel, M., and H. Lerche. (1995). "A New Look at Warrant Pricing and Related Optimal Stopping Problems." Working Paper, Institut für Mathematische Stochastik, University of Bonn.

Beibel, M., and H. Lerche. (1997). "A New Look at Optimal Stopping Problems Related to Mathematical Finance." *Statistica Sinica* 7: 93—108.

Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton, N. J. : Princeton University Press.

Bensoussan, A. (1983). "Lectures on Stochastic Control." In S. Mitter and A. Moro (Eds.), *Nonlinear Filtering and Stochastic Control*, Lecture Notes in Mathematics 972, pp. 1—62. New York: Springer-Verlag.

Bensoussan, A. (1984). "On the Theory of Option Pricing." *Acta Applicandae Mathematicae* 2: 139—158.

Bensoussan, A., M. Crouhy, and D. Galai. (1995a). "Black-Scholes Approximation of Complex Option Values: The Cases of European Compound Call Options and Equity Warrants." Working Paper, Université Paris Dauphine and INRIA, France.

Bensoussan, A., M. Crouhy, and D. Galai. (1995b). "Stochastic Equity Volatility Related to the Leverage Effect Ⅱ: Valuation of European Equity Options and Warrants." *Applied Mathematical Finance* 2: 43—59.

Benth, R., K. Karlsen, and K. Reikvam. (1999). "Optimal Portfolio Selection with Consumption and Nonlinear Integro-Differential Equations with Gradient Constraint: A Viscosity Solution Approach." Working Paper, Centre for Mathmatical Physics and Stochastics.

Benveniste, L., and J. Scheinkman. (1979). "On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics," *Econometrica* 47: 727—732.

Benzoni, L. (1998). "Pricing Options under Stochastic Volatility: An Econometric Analysis." Working Paper, J. L. Kellog Graduate School of Management, Northwestern University.

Berardi, A., and M. Esposito. (1990). "A Base Model for Multifactor Specifications of the Term Structure." *Economic Notes* 28: 145—170.

Bergman, Y. (1985b). "Time Preference and Capital Asset Pricing Models." *Journal of Financial Economics* 14: 145—159.

Bergman, Y. (1995). "Option Pricing with Differential Interest Rates." *Review of Financial Studies* 8: 475—500.

Bergman, Y., B. Grundy, and Z. Wiener. (1996). "Generalized Theory of Rational Optional Pricing." *Journal of Finance* 51: 1573—1610.

Berk, J. (1992). "The Necessary and Sufficient Conditions that Imply the CAPM." Working Paper, Faculty of Commerce, University of British Columbia, Canada.

Berk, J. (1997). "Necessary Conditions for the CAPM." *Journal of Economic Theory* 73: 245—257.

Berk, J., and H. Uhlig. (1993). "The Timing of Information in a General Equilibrium Framework." *Journal of Economic Theory* 59: 275—287.

Bernard, P., D. Talay, and L. Tubaro. (1994). "Rate of Convergence of a Stochastic Particle Method for the Kolmogorov Equation with Variable Coefficients." *Mathematics of Computation* 63: 555—587.

Bertsekas, D. (1976). *Dynamic Programming and Stochastic Control*. New York: Academic Press.

Bertsekas, D., and S. Shreve. (1978). *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*. New York: Academic Press.

Bertsimas, D., L. Kogan, and A. Lo. (1998). "When is Time Continuous?" Working Paper, MIT Sloan School of Management. Forthcoming in *Journal of Financial Economics*.

Bewley, T. (1972). "Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities." *Journal of Economic Theory* 4: 514—540.

Bewley, T. (1982). "Thoughts on Volatility Tests of the Intertemporal Asset Pricing Model." Working Paper, Department of Economics, Northwestern University.

Bhar, R., and C. Chiarella. (1995). "Transformation of Heath-Jarrow-Morton Models to Markovian Systems." Working Paper, School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney.

Bick, A. (1986). "On Viable Diffusion Price Processes." *Journal of Finance* 45: 673—689.

Bick, A. (1988). "Producing Derivative Assets with Forward Contracts." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 2: 153—160.

Bick, A. (1994). "Futures Pricing via Futures Strategies." Working Paper, Faculty of Business Administration, Simon Fraser University, Vancouver, Canada.

Bick, A. (1995). "Quadratic Variation Based Dynamic Strategies." *Management Science* 41: 722—732.

Bick, A. (1997). "Two Closed-Form Formulas for the Futures Price in the Presence of a Quality Option." *European Finance Review* 1: 81—104.

Bick, A., and H. Reisman. (1993). "Generalized Implied Volatility." Working Paper, Faculty of Business Administration, Simon Fraser University, Vancouver, Canada.

Bick, A., and W. Willinger. (1994). "Dynamic Spanning without Probabilities." *Stochastic Processes and Their Applications* 50: 349—374.

Bielecki, T., and M. Rutkowski. (1999a). "Credit Risk Modelling: A Multiple Ratings Case." Working Paper, Northeastern Illinois University and Technical University of Warsaw.

Bielecki, T., and M. Rutkowski. (1999b). "Modelling of the Defaultable Term Structure: Conditionally Markov Approach." Working Paper, Northeastern Illinois University and Technical University of Warsaw.

Bielecki, T., and M. Rutkowski. (2000). "Credit Risk Modelling: Intensity Based Approach." Working Paper, Department of Mathematics, Northeastern Illinois University.

Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure* (2d ed.). New York: Wiley.

Bjerksund, P., and G. Stensland. (1993). "Closed-Form Approximation of American Options." *Scandinavian Journal of Management* 9: S87—S99.

Björk, T. (1996). "Interest Rate Theory." Working Paper, Department of Finance, Stockholm School of Economics.

Björk, T. (1998). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. New York: Oxford University Press.

Björk, T., and B. Christensen. (1999). "Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves." *Mathematical Finance* 22: 17—23.

Björk, T., G. DiMasi, Y. Kabanov, and W. Runggaldier. (1997). "Towards a General Theory of Bond Markets." *Finance and Stochastics* 1: 141—174.

Björk, T., and A. Gombani. (1999). "Minimal Realizations of Interest Rate Models." *Finance and Stochastics* 3: 413—432.

Björk T., Y. Kabanov, and W. Runggaldier. (1995). "Bond Markets where Prices are Driven by a General Marked Point Process." Working Paper, Optimization and Systems Theory, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm.

Black, F. (1972). "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing." *Journal of Business* 45: 444—454.

Black, F. (1976). "The Pricing of Commodity Contracts." *Journal of Financial Economics* 3: 167—179.

Black, F. (1990). "Mean Reversion and Consumption Smoothing." *Review of Financial Studies* 3: 107—114.

Black, F. (1995). *Exploring General Equilibrium*. Cambridge, MA: MIT Press.

Black, F., and J. Cox. (1976). "Valuing Corporate Securities: Liabilities: Some

Effects of Bond Indenture Provisions."*Journal of Finance* 31: 351—367.

Black, F., E. Derman, and I. Kani. (1992). "A Two-Factor Model of Interest Rates." Working Paper, Goldman, Sachs and Company, New York.

Black, F., E. Derman, and W. Toy. (1990). "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options."*Financial Analysts Journal* January-February : 33—39.

Black, F., and P. Karasinski. (1991). "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal."*Financial Analysts Journal of* (July-August): 52—59.

Black, F., and M. Scholes. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities."*Journal of Political Economy* 81: 637—654.

Blackwell, D. (1965). "Discounted Dynamic Programming."*Annals of Mathematical Statistics* 36: 226—235.

Blume, L., D. Easley, and M. O'Hara. (1982). "Characterization of Optimal Plans for Stochastic Dynamic Programs."*Journal of Economic Theory* 28: 221—234.

Bollerslev, T., R. Chou, and K. Kroner. (1992). "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence."*Journal of Econometrics* 52: 5—59.

Bonomo, M., and R. Garcia. (1993). "Disappointment Aversion as a Solution to the Equity Premium and the Risk-Free Rate Puzzles."Working Paper, CRDE 2793, Université de Montréal.

Bossaerts, P. (1990). "Modern Term Structure Theory."Working Paper, California Institute of Technology, Pasadena.

Bossaerts, P., E. Ghysels, and C. Gouriéroux. (1996). "Arbitrage-Based Pricing when Volatility is Stochastic." Working Paper, California Institute of Technology, Pasadena.

Bossaerts, P., and P. Hillion. (1997). "Local Parametric Analysis of Hedging in Discrete Time."*Journal of Econometrics* 81: 243—272.

Bottazzi, J., T. Hens, and A. Löffler. (1994). "Market Demand Functions in the CAPM."Working Paper, Delta, Université de Paris.

Bottazzi, J.-M. (1995). "Existence of Equilibria with Incomplete Markets: The Case of Smooth Returns."*Journal of Mathematical Economics* 24: 59—72.

Bottazzi, J.-M., and T. Hens. (1996). "Excess Demand Functions and Incomplete Markets."*Journal of Economic Theory* 68: 49—63.

Boudoukh, J., M. Richardson, R. Stanton, and R. Whitelaw. (1995). "Pricing Mortgage-Backed Securities in a Multifactor Interest Rate Environment: A Multivari-

ate Density Estimation Approach. "Working Paper, Institute of Business and Economic Research, University of California at Berkeley.

Bouleau, N., and D. Lamberton. (1989). "Residual Risks and Hedging Strategies in Markovian Markets." *Stochastic Processes and Their Applications* 33:131—150.

Bouleau, N., and D. Lépingle. (1994). *Numerical Methods for Stochastic Processes*. New York: Wiley.

Boyarchenko, S., and S. Levendorskii. (2000a). "Pricing of the Perpetual American Call Under Lévy Processes." Working Paper, Department of Mathematics, University of Pennsylvania.

Boyarchenko, S., and S. Levendorskii. (2000b). "Pricing of the Perpetual American Put Under Lévy Processes." Working Paper, Department of Mathematics, University of Pennsylvania.

Boyle, P. (1977). "Options: A Monte Carlo Approach." *Journal of Financial Economics* 4: 323—338.

Boyle, P. (1988). "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Veriables." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23: 1—12.

Boyle, P. (1990). "Valuation of Derivative Securities Involving Several Assets using Discrete Time Methods." Working Paper, Accounting Group, University of Waterloo. Waterloo, Canada.

Boyle, P., M. Broadie, and P. Glasserman. (1997). "Monte Carlo Methods for Security Pricing." *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 1267—1321.

Boyle, P., J. Evnine, and S. Gibbs. (1989). "Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims." *Review of Financial Studies* 2: 241—250.

Boyle, P., and T. Vorst. (1992). "Options Replication in Discrete Time with Transaction Costs." *Journal of Finance* 47: 271—293.

Boyle, P., and T. Wang. (1999). "Valuation of New Securities in an Incomplete Marker: The Catch of Derivative Pricing." Working Paper, School of Accountancy, University of Waterloo.

Brace, A. (1996). "Non-Bushy Trees for Gaussian HJM and Lognormal Forward Models." Working Paper, School of Mathematics, University of New South Wales, Australia.

Brace, A., and M. Musiela. (1994a). "A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath Jarrow, and Morton." *Mathematical Finance* 4: 259—284.

Brace, A., and M. Musiela. (1994b). "Swap Derivatives in a Gaussian HJM Frame-

work. "Working Paper, Treasury Group, Citibank, Sydney, Australia.

Brace, A., and M. Musiela. (1995a). "Duration, Convexity and Wiener Chaos. "Working Paper, Treasury Group, Citibank, Sydney, Australia.

Brace, A., and M. Musiela. (1995b). "Hedging, Duration, Bucketing and Convexity in a Gaussian Heath Jarrow Morton Framework. "Working Paper, Treasury Group, Citibank, Sydney, Australia.

Brace, A., and M. Musiela. (1995c). "The Market Model of Interest Rate Dynamics." *Mathematical Finance* 7: 127—155.

Bray, M. (1994a). "The Arbitrage Pricing Theory is Not Robust 1: Variance Matrices and Portfolio Theory in Pictures. "Working Paper, London School of Economics.

Bray, M. (1994b). "The Arbitrage Pricing Theory is Not Robust 2: Factor Structure and Factor Pricing. "Working Paper, London School of Economics.

Breeden, D. (1979). "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities." *Journal of Financial Economics* 7: 265—296.

Breeden, D. (1986). "Consumption, Production, Inflation and Interest Rates," *Journal of Financial Economics* 16: 3—39.

Breeden, D., M. Gibbons, and R. Litzenberger. (1989). "Empirical Tests of the Consumption Oriented CAPM." *Journal of Finance* 44: 231—262.

Breeden, D., and R. Litzenberger. (1978). "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices." *Journal of Business* 51: 621—651.

Brémaud, P. (1981). *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*. New York: Springer.

Brennan, M., and E. Schwartz. (1977). "The Valuation of American Put Options." *Journal of Finance* 32: 449—462.

Brennan, M., and E. Schwartz. (1979). "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds." *Journal of Banking and Finance* 3: 133—155.

Brennan, M., and E. Schwartz. (1980a). "Analysing Convertible Bonds." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15: 907—929.

Brennan, M., and E. Schwartz. (1980c). "Conditional Predictions of Bond Prices and Returns." *Journal of Finance* 35: 405—419.

Brennan, M., and E. Schwartz. (1982). "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17: 301—329.

Brennan, M., E. Schwartz, and R. Lagnado. (1997). "Strategic Asset Allocation." *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 1377—1403.

Broadie, M., J. Cvitanić, and M. Soner. (1998). "Optimal Replication of Contingent Claims Under Portfolio Constraints." *Review of Financial Studies* 11: 59—79.

Broadie, M., and J. Detemple. (1995). "American Capped Call Options on Dividend-Paying Assets." *Review of Financial Studies* 8: 161—191.

Broadie, M., and J. Detemple. (1996). "American Option Valuation: New Bounds, Approximations and a Comparison of Existing Methods." *Review of Financial Studies* 9: 1211—1250.

Broadie, M., and J. Detemple. (1997). "The Valuation of American Options on Multiple Assets." *Mathematical Finance* 7: 241—285.

Broadie, M., and P. Glasserman. (1996). "Estimating Security Price Derivatives Using Simulation." *Management Science* 42: 269—285.

Broadie, M., and P. Glasserman. (1997). "Pricing American Style Securities Using Simulation." *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 1323—1353.

Broadie, M., and P. Glasserman. (1998). "A Stochastic Mesh Method for Pricing High Dimensional American Options." Working Paper, Graduate School of Business, Columbia University, New York, NY.

Broadie, M., P. Glasserman, and S. Kou. (1997). "A Continuity Corretcion for Discrete Barrier Options." *Mathematical Finance* 7: 325—349.

Broadie, M., P. Glasserman, and S. Kou. (1999). "Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options." *Finance and Stochastics* 3:55—82.

Brock, W. (1979). "An Integration of Stochastic Growth Theory and the Theory of Finance, Part I: The Growth Model." In J. Green and J. Scheinkman (Eds.), *General Equilibrium, Growth, and Trade*, pp. 165—192. New York: Academic Press.

Brock, W. (1982). "Asset Prices in a Production Economy." In J. McCall (Ed.), *The Economics of Information and Uncertainty*, pp. 1—46. Chicago: University of Chicago Press.

Brown, D., P. DeMarzo, and C. Eaves. (1996a). "Computing Equilibria when Asset Markets are Incomplete." *Econometrica* 64: 1—27.

Brown, D., P. DeMarzo, and C. Eaves. (1996b). "Computing Zeros of Sections Vector Bundles Using Homotopies and Relocalization." *Mathematics of Operations Research* 21: 26—43.

Brown, D., and M. Gibbons. (1985). "A Simple Econometric Approach for Utility-Based Asset Pricing Models." *Journal of Finance* 40: 359—381.

Brown, R., and S. Schaefer. (1994a). "Interest Rate Volatility and the Shape of the Term Structure." *Philosophical Transactions of the Royal Society: Physical Sciences and Engineering* 347: 449—598.

Brown, R., and S. Schaefer. (1994b). "The Term Structure of Real Interest Rates and the Cox, Ingersoll, and Ross Model." *Journal of Financial Economics* 35: 3—42.

Brown, R., and S. Schaefer. (1996). "Ten Years of the Real Term Structure: 1984—1994." *Journal of Fixed Income* 6(March): 6—22.

Broze, L., O. Scaillet, and J.-M, Zakoïan. (1993). "Testing for Continuous-Time Models of the Short-Term Interest Rate." Working Paper, CORE, Louvain-la-Neuve, Belgium.

Buckdahn, R. (1995a). "Backward Stochastic Differential Equations Driven by a Martingale." Working Paper, FB Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin.

Buckdahn, R. (1995b). "BSDE with Non-Square Integrable Terminal Value—FBSDE with Delay." Working Paper, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France.

Buckdahn, R., and Y. Hu. (1995). "Pricing of American Contingent Claims with Jump Stock Price and Constrained Portfolios." Working Paper, Département de Mathématiques, Université de Bretagne Occidentale.

Bühler, W., M. Uhrig-Homburg, U. Walter, and T. Weber. (1995). "An Empirical Comparison of Alternative Models for Valuing Interest Rate Options." Working Paper, Lehrstuehle für Finanzwirtschaft, Universität Mannheim.

Bühlmann, H., F. Delbaen, P. Embrechts, and A. Shiryaev. (1998). "On Esscher Transforms in Discrete Finance Models." *ASTIN Bulletin* 28: 171—186.

Bunch, D., and H. Johnson. (1993). "A Simple and Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach." *Journal of Finance* 47: 809—816.

Buono, M., R. Gregory-Allen, and U. Yaari. (1992). "The Efficacy of Term Structure Estimation Techniques: A Monte Carlo Study." *Journal of Fixed Income* 2: 52—63.

Büttler, H. (1995). "Evaluation of Callable Bonds: Finite Difference Methods, Stability

and Accuracy. "*Economic Journal* 105: 374—384.

Büttler, H., and J. Waldvogel. (1996). "Pricing Callable Bonds by Means of Green's Function. "*Mathematical Finance* 6: 53—88.

Cadenillas, A., and S. Pliska. (1999). "Optimal Trading of a Security when there are Taxes and Transaction Costs. "*Finance and Stochastics* 3: 137—165.

Caflisch, R., and W. Morokoff. (1995). "Quasi-Monte Carlo Computation of a Finance Problem. "Working Paper, Department of Mathematics, University of California, Los Angeles.

Caflisch, R., and W. Morokoff. (1996). "Valuation of Mortgage Backed Securities using the Quasi-Monte Carlo Method. "Working Paper, Department of Mathematics, University of California, Los Angeles.

Caflisch, R., W. Morokoff, and A. Owen. (1997). "Valuation of Mortgage Backed Securities Using Brownian Bridges to Reduce Effective Dimension. "*Journal of Computational Finance* 1(Fall).

Calvet, L. (1999). "Incomplete Markets and Volatility. "Working Paper, Department of Economics, Littauer Center, Cambridge, MA.

Campbell, J. (1986a). "Bond and Stock Returns in a Simple Exchange Model. "*Quarterly Journal of Economics* 101: 785—803.

Campbell, J. (1986b). "A Defense of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates. "*Journal of Finance* 41: 183—193.

Campbell, J. (1993). "Intertemporal Asset Pricing without Consumption. "*American Economic Review* 83: 487—512.

Campbell, J. (1995). "Some Lessons from the Yield Curve. "*Journal of Economic Perspectives* 9: 129—152.

Campbell, J., A. Lo, and C. MacKinlay. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.

Carassus, L., and E. Jouini. (1998). "Investment and Arbitrage Opportunities with Shortsale Constraints. "*Mathematical Finance* 8: 169—178.

Carr, P. (1989). "European Option Valuation when Carrying Costs are Unknown. " Working Paper, Johnson Graduate School of Management, Cornell University.

Carr, P. (1991). "Deriving Derivatives of Derivative Securities. "Working Paper, Johnson Graduate School of Management, Cornell University. Forthcoming in *Journal of Computational Finance*.

Carr, P. (1993a). "European Put Call Symmetry. "Working Paper, Johnson Graduate

School of Management, Cornell University.

Carr, P. (1993b). "Valuing Bond Futures and the Quality Option." Working Paper, Johnson Graduate School of Management, Cornell University.

Carr, P. (1994). "On Approximations for the Values of American Options." Working Paper, Johnson Graduate School of Management, Cornell University.

Carr, P. (1995). "Two Extensions to Barrier Option Valuation." *Applied Mathematical Finance* 2: 173—209.

Carr, P. (1998). "Randomization and the American Put." *Review of Financial Studies* 11: 598—626.

Carr, P., and R.-R. Chen. (1993). "Valuing Bond Futures and the Quality Option." Working Paper, Johnson Graduate School of Management, Cornell University.

Carr, P., and K. Ellis. (1994). "Non-Standard Valuation of Barrier Options." Working Paper, Johnson Graduate School of Management, Cornell University.

Carr, P., and D. Faguet. (1994). "Fast Accurate Valuation of American Options." Working Paper, Johnson Graduate School of Management, Cornell University.

Carr, P., and D. Faguet. (1996). "Valuing Finite-Lived Options as Perpetual." Working Paper, Johnson School of Management, Cornell University.

Carr, P., and R. Jarrow. (1990). "The Stop-Loss Start-Gain Paradox and Option Valuation: A New Decomposition into Intrinsic and Time Value." *Review of Financial Studies* 3: 469—492.

Carr, P., R. Jarrow, and R. Myneni. (1992). "Alternative Characterizations of American Put Options." *Mathematical Finance* 2: 87—106.

Carr, P., and D. Madan. (1998). "Option Valuation Using the Fast Fourier Transform." *Journal of Computational Finance* 2 (Summer).

Carr, P., and D. Madan. (1999). "Option Valuation using the Fast Fourier Transform." *Journal of Computational Finance* 2: 61—74.

Carverthill, A. (1988). "The Ho and Lee Term Structure Theory: A Continuous Time Version." Working Paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Carverhill, A. (1990). "A Survey of Elementary Techniques for Pricing Options on Bonds and Interest Rates." Working Paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Carverhill, A. (1991). "The Term Structure of Interest Rates and Associated Options: Equilibrium versus Evolutionary Models." Working Paper, Financial Options Re-

search Centre, University of Warwick.

Carverhill, A. (1995). "A Simplified Exposition of the Heath, Jarrow, and Morton Model." *Stochastics* 53: 227—240.

Carverhill, A. (1996). "Arbitrage, the Term Structure of Volatility, and the Long Forward Rate." Working Paper, Department of Finance, University of Science and Technology, Hong Kong.

Carverhill, A., and K. Pang. (1995). "Efficient and Flexible Bond Option Valuation in the Heath, Jarrow, and Morton Framework." *Journal of Fixed Income* 5 (September): 70—77.

Cass, D. (1984). "Competitive Equilibria in Incomplete Financial Markets." Working Paper, Center for Analytic Research in Economics and the Social Sciences. University of Pennsylvania.

Cass, D. (1989). "Sunspots and Incomplete Financial Markets: The Leading Example." In G. Feiwel (Ed.), *The Economics of Imperfect Competition and Employment: Joan Robinson and Beyond*, pp. 677—693. London: Macmillan.

Cass, D. (1991). "Incomplete Financial Markets and Indeterminacy of Financial Equilibrium." In J.-J. Laffont (Ed.), *Advances in Economic Theory*, pp. 263—288. Cambridge: Cambridge University Press.

Cassese, G. (1996). "An Elementary Remark on Martingale Equivalence and the Fundamental Theorem of Asset Pricing." Working Paper, Istituto di Economia Politica, Università Commerciale "Luigi Bocconi," Milan.

Chacko, G., and S. Das. (1998). "Pricing Average Interest Rate Options: A General Approach." Working Paper, Harvard Business School.

Chae, S. (1988). "Existence of Equilibria in Incomplete Markets." *Journal of Economic Theory* 44: 9—18.

Chalasani, P., S. Jha, and A. Varikooty. (1998). "Accurate Approximations for European Asian Options." *Journal of Computational Finance* 1(Summer).

Chamberlain, G. (1988). "Asset Pricing in Multiperiod Securities Markets." *Econometrica* 56: 1283—1300.

Chan, K.-C., A. Karolyi, F. Longstaff, and A. Saunders. (1992). "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate." *Journal of Finance* 47: 1209—1227.

Chan, Y.-K. (1992). "Term Structure as a Second Order Dynamical System, and Pricing of Derivative Securities." Working Paper, Bear Stearns and Company, New

York.

Chang, F.-R. (1993). "Adjustment Costs, Optimal Investment and Uncertainty." Working Paper, Department of Economics, Indiana University.

Chapman, D. (1998). "Habit Formation, Consumption, and State-Prices." *Econometrica* 66: 1223—1230.

Charretour, F., R. Elliott, R. Myneni, and R. Viswanathan. (1992). "American Option Valuation Notes." Working Paper, Oberwohlfach Institute, Oberwohlfach, Germany.

Chen, L. (1996). *Stochastic Mean and Stochastic Volatility: A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives: Part* 1. Oxford: Blackwell Publishers.

Chen, R.-R., and L. Scott. (1992a). "Maximum Likelihood Estimation for a Multi-Factor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates." Working Paper. Department of Finance, Rutgers University.

Chen, R.-R., and L. Scott. (1992b). "Pricing Interest Rate Options in a Two-Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure." *Review of Financial Studies* 5: 613—636.

Chen, R.-R., and L. Scott. (1993a). "Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests from a State-Space Model using a Kalman Filter" Working Paper, Department of Finance, Rutgers University.

Chen, R.-R., and L. Scott. (1993b). "Pricing Interest Rate Futures Options with Futures-Style Margining." *Journal of Futures Markets* 13: 15—22.

Chen, R.-R. and L. Scott. (1995). "Interest Rate Options in Multifactor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure." *Journal of Derivatives* 3: 53—72.

Chen, R.-R., and B. Sopranzetti. (1999). "The Valuation of Default-Triggered Credit Derivatives." Working Paper, Rutgers Business School, Department of Finance and Economics.

Chen, Z., and L. Epstein. (1999). "Ambiguity, Risk and Asset Returns in Continuous Time." Working Paper, Department of Mathematics, Shandong University.

Chen, Z.-W. (1994). "Viable Costs and Equilibrium Prices in Frictional Securities Markets." Working Paper, Graduate School of Business, University of Wisconsin.

Cheng, S. (1991). "On the Feasibility of Arbitrage-Based Option Pricing when Stochastic Bond Price Processes are Involved." *Journal of Economic Theory* 53: 185—198.

Cherian, J., and R. Jarrow. (1998). "Options Markets, Self-Fulfilling Prophecies, and Implied Volatilities." *Review of Derivatives Research* 2: 5—37.

Cherif, T., N. El Karoui, R. Myneni, and R. Viswnathan. (1995). "Arbitrage Pricing and Hedging of Quanto Options and Interest Rate Claims with Quadratic Gaussian State Variables." Working Paper, Laboratoire de Probabilités, Université de Paris, VI.

Chernoff, H., and A. Petkau. (1984). "Numerical Methods for Bayes Sequential Decisions Problems." Working Paper, Technical Report 34, Statistics Center, Massachusetts Institute of Technology.

Chernov, M., and E. Ghysels. (2000). "A Study towards a Unified Approach to the Joint Estimation of Objective and Risk Neutral Measures for the Purpose of Options Valuation." *Journal of Financial Economics* 56: 407—458.

Cherubini, U. (1993). "The Orthogonal Polynomial Approach to Contingent Claim Pricing." Working Paper, Banco Commerciale Italiana, Ufficio Studi, Milan.

Cherubini, U., and M. Esposito. (1992). "Using Pearson's System to Characterize Diffusion Processes: A Note." Working Paper, Banco Commerciale Italiana, Ufficio Studi, Milan.

Cherubini, U., and M. Esposito. (1995). "Options in and on Interest Rate Futures Contracts: Results from Martingale Pricing Theory." *Applied Mathematical Finance* 2: 1—15.

Chesney, M., R. Elliott, and R. Gibson. (1993). "Analytical Solution for the Pricing of American Bond and Yield Options." *Mathematical Finance* 3: 277—294.

Chesney, M., M. Jeanblanc, and M. Yor. (1997). "Brownian Excursions and Barrier Options." *Advances in Applied Probability* 29: 165—184.

Chevance, D. (1995). "Discrétisation des Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades." Working Paper, I. N. R. I. A.

Chevance, D. (1996). "Discretization of Pardoux-Peng's Backward Stochastic Differential Equations." Working Paper, Université de Provence.

Chew, S.-H. (1983). "A Generalization of the Quasilinear Mean with Applications to the Measurement of Income Inequality and Decision Theory Resolving the Allais Paradox." *Econometrica* 51: 1065—1092.

Chew, S.-H. (1989). "Axiomatic Utility Theories with the Betweenness Property." *Annals of Operations Research* 19: 273—298.

Chew, S.-H., and L. Epstein. (1991). "Recursive Utility under Uncertainty." In A.

Khan and N. Yannelis (Eds.), *Equilibrium Theory with an Infinite Number of Commodities*, pp. 353—369. New York: Springer-Verlag.

Cheyette, O. (1995). "Markov Representation of the Heath-Jarrow-Morton Model." Working Paper, BARRA Inc., Berkeley, California.

Cheyette, O. (1996). "Implied Prepayments." Working Paper, BARRA Inc., Berkeley, California.

Chiarella, C., and N. E. Hassan. (1997). "Evaluation of Derivative Security Prices in the Heath-Jarrow-Morton Framework as Path Integrals." *Journal of Financial Engineering* 6: 121—147.

Chidambaran, N., and S. Figlewski. (1995). "Streamlining Monte-Carlo Simulation with the Quasi-Analytic Method: An Analysis of a Path-Dependent Option Strategy." *Journal of Derivatives* 3: 29—51.

Choulli, T., L. Krawczyk, and C. Stricker. (1998). "$\mathcal{E}$-Martingales and Their Applications in Mathematical Finance." *Annals of Probability* 26: 853—876.

Chow, Y., and H. Teicher. (1978). *Probability Theory: Independence Interchangeability Martingales*. New York: Springer-Verlag.

Christensen, B. J. (1991). "Statistics for Arbitrage-Free Asset Pricing." Working Paper, Department of Finance, New York University.

Christensen, P. (1987). "An Intuitive Approach to the Harrison and Kreps Concept of Arbitrage Pricing for Continuous Time Diffusions." Working Paper, Department of Management, Odense University, Denmark.

Christensen, P., S. Graversen, and K. Miltersen. (1996). "Dynamic Spanning in the Consumption-Based Capital Asset Pricing Model." Working Paper, Department, of Management Odense University, Denmark.

Chuang, C. (1994). "Joint Distribution of Brownian Motion and Its Maximum, with a Generalization to Correlated BM and Applications to Barrier Options." Working Paper, Department of Statistics, Stanford University.

Chung, K. (1982). *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*. New York: Springer-Verlag.

Chung, K.-L. (1974). *A Course in Probability Theory* (2d ed.). New York: Academic Press.

Chung, K.-L. and R. Williams. (1990). *An Introduction to Stochastic Integration* (2d ed.). Boston: Birkhäuser.

Citanna, A., A. Kajii, and A. Villanacci. (1994). "Constrained Suboptimality in In-

complete Markets: A General Approach and Two Applications." *Economic Theory* 11: 495—521.

Citanna, A., and A. Villanacci. (1993). "On Generic Pareto Improvement in Competitive Economies with Incomplete Asset Structure." Working Paper, Center for Analytic Research in Economics and the Social Sciences, University of Pennsylvania.

Clark, P. (1973). "A Subordinated Stochastic Process with Finite Variance for Speculative Prices." *Econometrica* 41: 135—155.

Clark, S. (1993). "The Valuation Problem in Arbitrage Price Theory." *Journal of Mathematical Economics* 22: 463—478.

Clarke, N., and K. Parrott. (1996). "The Multigrid Solution of Two-Factor American Put Options." Working Paper, Oxford University Computing Laboratory.

Clewlow, L. (1990). "Finite Difference Techniques for One and Two Dimensional Option Valuation Problems." Working Paper, Financial Options Research Center, University of Warwick.

Clewlow, L., and A. Carverhill. (1992). "Efficient Monte Carlo Valuation and Hedging of Contingent Claims." Working Paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Clewlow, L., and A. Carverhill. (1995). "A Note on the Efficiency of the Binomial Option Pricing Model." Working Paper, Financial Options Research Center, University of Warwick.

Clewlow, L., and S. Hodges. (1996). "Optimal Delta-Hedging under Transactions Costs." Working Paper, Financial Options Research Center, University of Warwick.

Clewlow, L., K. Pang, and C. Strickland. (1997). "Efficient Pricing of Caps and Swaptions in a Multi-Factor Gaussian Interest Rate Model." Working Paper, University of Warwick.

Clewlow, L., and C. Strickland. (1996). "Monte Carlo Valuation of Interest Rate Derivatives under Stochastic Volatility." *Journal of Fixed Income* 7(3): 35—45.

Cohen, H. (1995). "Isolating the Wild Card Option." *Mathematical Finance* 2: 155—166.

Coleman, T., L. Fisher, and R. Ibbotson. (1992). "Extimating the Term Structure of Interest Rates from Data that include the Prices of Coupon Bonds." *Journal of Fixed Income* 2(September): 85—116.

Collin-Dufresne, P., and R. Goldstein. (1999). "Do credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios? Reconciling Structural and Reduced Form Frameworks." Working Paper, GSIA, Carnegie Mellon.

Constantinides, G. (1982). "Intertemporal Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and without Demand Aggregation." *Journal of Business* 55: 253—267.

Constantinides, G. (1986). "Capital Market Equilibrium with Transactions Costs." *Journal of Political Economy* 94: 842—862.

Constantinides, G. (1990). "Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle." *Journal of Political Economy* 98: 519—543.

Constantinides, G. (1992). "A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates." *Review of Financial Studies* 5: 531—552.

Constantinides, G. (1993). "Option Pricing Bounds with Transactions Costs." Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago.

Constantinides, G., and D. Duffie. (1996). "Asset Pricing with Heterogeneous Consumers." *Journal of Political Economy* 104: 219—240.

Constantinides, G., and T. Zariphopoulou. (1999). "Bounds on Prices of Contingent Claims in an Intertemporal Economy with Proportional Transaction Costs and General Preferences." *Finance and Stochastics* 3: 345—369.

Cont, R. (1998). "Modeling Term Structure Dynamics: An Infinite Dimensional Approach." Working Paper, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.

Conze, A., and R. Viswanathan. (1991a). "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options." *Journal of Finance* 5: 1893—1907.

Conze, A., and R. Viswanathan. (1991b). "Probability Measures and Numeraires." Working Paper, CEREMADE, Université de Paris.

Cooper, I., and M. Martin. (1996). "Default Risk and Derivative Products." *Applied Mathematical Finance* 3: 53—74.

Cooper, I., and A. Mello. (1991). "The Default Risk of Swaps." *Journal of Finance* XLVI: 597—620.

Cooper, I., and A. Mello. (1992). "Pricing and Optimal Use of Forward Contracts with Default Risk." Working Paper, Department of Finance, London Business School, University of London.

Cornell, B. (1981). "The Consumption Based Asset Pricing Model." *Journal of Financial Economics* 9: 103—108.

Corradi, V. (2000). "Degenerate Continuous Time Limits of GARCH and GARCH-type Processes." *Journal of Econometrics* 96: 145—153.

Courtadon, G. (1982). "The Pricing of Options on Default-Free Bonds." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17: 75—100.

Cover, T., and E. Ordentlich. (1996). "Universal Portfolios with Side Information." *IEEE Transactions on Information Theory* 42: 348—363.

Cox, J. (1983). "Optimal Consumption and Portfolio Rules when Assets Follow a Diffusion Process." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Cox, J., and C.-F. Huang. (1989). "Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process." *Journal of Economic Theory* 49: 33—83.

Cox, J., and C.-F. Huang. (1991). "A Variational Problem Arising in Financial Economics with an Application to a Portfolio Turnpike Theorem." *Journal of Mathematical Economics* 20: 465—488.

Cox, J., and C.-F. Huang. (1992). "A Continuous-Time Portfolio Turnpike Theorem." *Journal of Economic Dynamics and Control* 16: 491—508.

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. (1981a). "A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates." *Journal of Finance* 36: 769—799.

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. (1981b). "The Relation between Forward Prices and Futures Prices." *Journal of Financial Economics* 9: 321—346.

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. (1985a). "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices." *Econometrica* 53: 363—384.

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. (1985b). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica* 53: 385—408.

Cox, J., and S. Ross. (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes." *Journal of Financial Economics* 3: 145—166.

Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein. (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach." *Journal of Financial Economics* 7: 229—263.

Cox, J., and M. Rubinstein. (1985). *Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Cuoco, D. (1997). "Optimal Consumption and Equilibrium Prices with Portfolio Constraints and Stochastic Income." *Journal of Economic Theory* 72: 33—73.

Cuoco, D., and J. Cvitanić. (1998). "Optimal Consumption Choices for a 'Large' Investor." *Journal of Economic Dynamics and Control* 22: 401—436.

Cuoco, D., and H. He. (1992a). "Dynamic Aggregation and Computation of Equilibria in Finite-Dimensional Economies with Incomplete Financial Markets." Working Paper, Haas School of Business, University of California, Berkeley.

Cuoco, D., and H. He. (1992b). "Dynamic Equilibrium in Infinite-Dimensional Economies with Incomplete Financial Markets." Working Paper, Wharton School, University of Pennsylvania.

Cuoco, D., and H. Liu. (2000). "Optimal Consumption of a Divisible Durable Good." *Journal of Economic Dynamics and Control* 24: 561—613.

Cuoco, D., and F. Zapatero. (2000). "On the Recoverability of Preferences and Beliefs in Financial Models." *Review of Financial Studies* 13: 417—431.

Curran, M. (1996). "Adaptive Importance Sampling for Pricing Path Dependent Options." Working Paper, Banque Paribas, London.

Cutland, N., P. Kopp, and W. Willinger. (1991). "A Nonstandard Approach to Option Pricing." *Mathematical Finance* 1: 1—38.

Cutland, N., P. Kopp, and W. Willinger. (1993a). "From Discrete to Continuous Financial Models: New Convergence Results for Options Pricing." *Mathematical Finance* 3: 101—124.

Cutland, N., P. Kopp, and W. Willinger. (1993b). "Stock Price Returns and the Joseph Effect: Fractional Version of the Black-Scholes Model." Working Paper, School of Mathematics, University of Hull, England.

Cvitanić, J. (1995). "Nonlinear Financial Markets: Hedging and Portfolio Optimization." In *Mathematics of Derivative Securities*, pp. 227—254. Cambridge: Cambridge University Press.

Cvitanić, J. (1997). *Optimal Trading under Constraints*. Lecture Notes in Mathematics 1656. New York: Springer-Verlag.

Cvitanić, J. (1999). "Methods of Partial Hedging." *Asia-Pacific Financial Markets* 6: 7—35.

Cvitanić, J., and I. Karatzas. (1992). "Convex Duality in Constrained Portfolio Optimization." *Annals of Applied Probability* 2: 767—818.

Cvitanić, J., and I. Karatzas. (1993). "Hedging Contingent Claims with Constrained Portfolios." *Annals of Applied Probability* 3: 652—681.

Cvitanić, J., and I. Karatzas. (1995). "On Portfolio Optimization under 'Drawdown'

Constraints." *IMA Volumes in Mathematics and its Applications* 65: 35—46.

Cvitanić, J., and I. Karatzas. (1996a). "Backward Stochastic Differential Equations with Reflection and Dynkin Games." *Annals of Probability* 24: 2024—2056.

Cvitanić, J., and I. Karatzas. (1996b). "Hedging and Portfolio Optimization under Transaction Costs: A Martingale Approach." *Mathematical Finance* 6: 133—165.

Cvitanić, J., I. Karatzas, and M. Soner. (1998). "Backward Stochastic Differential Equations with Constraints on the Gains-Process." *Annals of Probability* 26: 1522—1551.

Cvitanić, J., and J. Ma. (1996). "Hedging Options for a Large Investor and Forward-Backward SDEs." *Annals of Applied Probability* 6: 370—398.

Cvitanić, J., W. Schachermayer, and H. Wang. (1999). "Utility Maximization in Incomplete Markets with Random Endowment." Working Paper, Department of Mathematics, University of Southern California. Forthcoming in *Finance and Stochastics*.

Daher, C., M. Romano, and G. Zacklad. (1992). "Determination du Prix de Produits Optionnels Obligatoires à Partir d'un Modèle Multi-Facteurs de la Courbe des Taux." Working Paper, Caisse Autonome de Refinancement, Paris.

Dai, Q. (1994). "Implied Green's Function in a No-Arbitrage Markov Model of the Instantaneous Short Rate." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Dai, Q. (1995). "Understanding the Interest Rate Yield Curve Dynamics with the Correlated Three-Factor Vasicek Model." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Dai, Q. (1996). "Technical Notes on CIR Model." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Dai, Q. (2000). "From Equity Premium Puzzle to Expectations Puzzle: A General Equilibrium Production Economy with Stochastic Habit Formation." Working Paper, Stern School, New York University.

Dai, Q., and K. Singleton. (2000). "Specification Analysis of Affine Term Structure Models." *Journal of Finance* 55: 1943—1978.

Daigler, R. (1993). *Financial Futures Markets*. New York: Harper Collins.

Dalang, R., A. Morton, and W. Willinger. (1990). "Equivalent Martingale Measures and No-Arbitrage in Stochastic Securities Market Models." *Stochastics and Sto-*

chastic Reports 29: 185—201.

Daley, D., and D. Vere-Jones. (1988). *An Introduction to the Theory of Point Processes*. New York: Springer-Verlag.

Dana, R., and M. Jeanblanc. (1998). *Marchés Financiers en Temps Continu* (2d ed.), Paris: Economica.

Dana, R. -A. (1993a). "Existence and Uniqueness of Equilibria when Preferences are Additively Separable." *Econometrica* 61: 953—958.

Dana, R. -A. (1993b). "Existence, Uniqueness and Determinacy of Arrow-Debreu Equilibria in Finance Models." *Journal of Mathematical Economics* 22: 563—580.

Dana, R. -A., and C. Le Van. (1996). "Asset Equilibria in L^p Spaces with Complete Markets: A Duality Approach." *Journal of Mathematical Economics* 25: 263—280.

Dana, R. -A., and M. Pontier. (1990). "On the Existence of a Stochastic Equilibrium." Working Paper, Université de Paris VI, Paris.

Danesi, V., J. -P. Garcia, V. Genon-Catalot, and J. -P. Laurent. (1993). "Parameter Estimation for Yield Curve Models using Contrast Methods." Working Paper, Université Marne-La-Valeé, Noisy-Le-Grand, France.

Darling, R. (1995). "Constructing Gamma-Martingales with Prescribed Limit, Using Backward SDE." *Annals of Probability* 3: 431—454.

Das, S. (1993a). "Jump-Diffusion Processes and the Bond Markets." Working Paper, Department of Finance, Harvard Business School.

Das, S. (1993b). "Jump-Hunting Interest Rates." Working Paper, Department of Finance, New York University.

Das, S. (1993c). "Mean Rate Shifts and Alternative Models of the Interest Rate: Theory and Evidence." Working Paper, Department of Finance, New York University.

Das, S. (1995). "Pricing Interest Rate Derivatives with Arbitrary Skewness and Kurtosis: A Simple Approach to Jump-Diffusion Bond Option Pricing." Working Paper, Division of Research, Harvard Business School.

Das, S. (1997). "Discrete-Time Bond and Option Pricing for Jump-Diffusion Processes." *Review of Deivatives Research* 1: 211—243.

Das, S. (1998). "Poisson-Gaussian Processes and the Bond Markets." Working Paper, Department of Finance, Harvard Business School.

Das, S., and S. Foresi. (1996). "Exact Solutions for Bond and Option Prices with Systematic Jump Risk." *Review of Derivatives Research* 1: 7—24.

Das, S., and R. K. Sundaram. (2000). "A Discrete-Time Approach to Arbitrage-Free Pricing of Credit Derivatives." *Management Science* 46: 46—62.

Das, S., and P. Tufano. (1995). "Pricing Credit Sensitive Debt when Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic." *Journal of Financial Engineering* 5(2): 161—198.

Dash, J. (1989). "Path Integrals and Options—I." Working Paper, Financial Strategies Group, Merrill Lynch Capital Markets, New York.

Dassios, A. (1994). "The Distribution of the Quantiles of a Brownian Motion with Drift and the Pricing of Related Path-Dependent Options." Working Paper, Department of Statistics. London School of Economics.

Davis, M. (1998). "A Note on the Forward Measure." *Finance and Stochastics* 2: 19—28.

Davis, M., and M. Clark. (1993). "Analysis of Financial Models including Transactions Costs." Working Paper, Imperial College, University of London.

Davis, M., and F. Lischka. (1999). "Convertible Bonds with Market Risk and Credit Risk." Working Paper, Tokyo-Mitsubishi International plc.

Davis, M., and V. Lo. (1999). "Infectious Defaults." Working Paper, Tokyo-Mitsubishi International plc.

Davis, M., and V. Lo. (2000). "Modelling Default Correlation in Bond Portfolios." Working Paper, Tokyo-Mitsubishi International plc.

Davis, M., and T. Mavroidis. (1997). "Valuation and Potential Exposure of Default Swaps." Working Paper, Research and Product Development, Tokyo-Mitsubishi International plc.

Davis, M., and A. Norman. (1990). "Portfolio Selection with Transaction Costs." *Mathematics of Operations Research* 15: 676—713.

Davis, M., and V. Panas. (1991). "European Option Pricing with Transaction Costs." Proceedings of the Thirtieth IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, December, pp. 1299—1304.

Davis, M., A. Panas, and T. Zariphopoulou. (1993). "European Option Pricing with Transaction Costs." *SIAM Journal of Control and Optimization* 31: 470—493.

Davydov, D., and V. Linetsky. (1998). "Double Step Options." Working Paper, University of Michigan. Forthcoming in *Journal of Computational Finance*.

Davydov, D., and V. Linetsky. (1999a). "Pricing Options on One-Dimensional Diffusions: A Sturm-Liouville Approach." Working Paper, University of Michigan.

Davydov, D., and V. Linetsky. (1999b). "The Valuation and Hedging of Barrier and Look-back Options for Alternative Stochastic Processes." Working Paper, University of Michigan.

Davydov, D., V. Linetsky, and C. Lotz. (1999). "The Hazard-Rate Approach to Pricing Risky Debt: Two Analytically Tractable Examples." Working Paper, Department of Economics, University of Michigan.

Debreu, G. (1953). "Une Economie de l'Incertain." Working Paper, Electricité de France.

Debreu, G. (1954). "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 40: 588—592.

Debreu, G. (1959). *Theory of Value*. Cowles Foundation Monograph 17. New Haven, CT: Yale University Press.

Debreu, G. (1972). "Smooth Preferences." *Econometrica* 40: 603—615; Corrigendum 44(1976): 831—832.

Debreu, G. (1982). "Existence of Competitive Equilibrium." In K. Arrow and M. Intriligator (Eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, *Volume* Ⅱ, pp. 697—743. Amsterdam: North-Holland.

Décamps, J.-P., and A. Faure-Grimaud. (1998). "Pricing the Gamble for Resurrection and the Consequences of Renegotiation and Debt Design." Working Paper, Universite of Toulouse.

Décamps, J.-P., and A. Faure-Grimaud. (1999). "Should I Stay or Should I Go? Excessive Continuation and Dynamic Agency Costs of Debt." Working Paper, University of Toulouse.

Décamps, J.-P., and P. Koehl. (1994). "Pricing and Hedging Asian Options: A PDE Approach." Working Paper, GREMAQ, University des Sciences Sociales.

Décamps, J.-P., and J.-C. Rochet. (1997). "A Variational Approach for Pricing Options and Corporate Bonds." *Economic Theory* 9: 557—569.

Deelstra, G., and F. Delbaen. (1994). "Existence of Solutions of Stochastic Differential Equations Related to the Bessel Process." Working Paper, Department of Mathematics, Vrije Universiteit Brussel.

Deelstra, G., and F. Delbaen. (1995). "Long-Term Returns in Stochastic Interest Rate Models." *Insurance: Mathematics and Economics* 17: 163—169.

Dekel, E. (1989). "Asset Demands without the Independence Axiom." *Econometrica* 57: 163—169.

Delbaen, F. (1992). "Representing Martingale Measures when Asset Prices are Continuous and Bounded." *Mathematical Finance* 2: 107—130.

Delbaen, F. (1993). "Consols in the CIR Model." *Mathematical Finance* 3: 125—134.

Delbaen, F., P. Monat, W. Schachermayer, M, Schweizer, and C. Stricker. (1994). "Inégalités de Normes avec Poids et Fermeture d'un Espace d'Intégrales Stochastiques." *Comtes Rendus de l'Academie de Science de Paris* 319I: 1079—1081.

Delbaen, F., and W. Schachermayer. (1994a). "Arbitrage and Free Lunch with Bounded Risk for Unbounded Continuous Processes." *Mathematical Finance* 4: 343—348.

Delbaen, F., and W. Schachermayer. (1994b). "A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing." *Mathematische Annalen* 300: 463—520.

Delbaen, F., and W. Schachermayer. (1995a). "Arbitrage Possibilities in Bessel Processes and Their Relations to Local Martingales." *Probability Theory and Related Fields* 102: 357—366.

Delbaen, F., and W. Schachermayer. (1995b). "The Existence of Absolutely Continuous Local Martingale Measures." *Annals of Applied Probability* 5: 926—945.

Delbaen, F., and W. Schachermayer. (1995c). "The No-Arbitrage Property under a Choice of Numéraire." *Stochastics* 53: 213—226.

Delbaen, F., and W. Schachermayer. (1996a). "Attainable Claims with p', th Moments." *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 33: 113—144.

Delbaen, F., and W. Schachermayer. (1996b). "A Compactness Principle for Bounded Sequences of Martingales with Applications." Working Paper, Department für Mathematik, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.

Delbaen, F., and W. Schachermayer. (1998). "The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes." *Mathematische Annalen* 312: 215—250.

Delbaen, F., and W. Schachermayer. (1999). "A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing." *Mathematische Annalen* 300: 463—520.

Delbaen, F., and H. Shirakawa. (1996). "A Note on the No Arbitrage Condition for International Financial Markets." *Financial Engineering and the Japanese Markets* 3: 239—251.

Delbaen, F., and M. Yor. (1999). "Passport Options." Working Paper, Presentation at Strobl, Austria.

Delgado, F., and B. Dumas. (1993). "How Far Apart Can Two Riskless Interest Rates Be?" Working Paper, Fuqua School of Business, Duke University.

Demange, G., and J.-C. Rochet. (1992). *Methodes Mathematique de la Finance*. Paris: Economica.

DeMarzo, P. (1988). "An Extension of the Modigliani-Miller Therorem to Stochastic Economics with Incomplete Markets." *Journal of Economic Theory* 45: 353—369.

DeMarzo, P., and B. Eaves. (1996). "A Homotopy, Grassmann Manifold, and Relocalization for Computing Equilibria of GEI." *Journal of Mathematical Economics* 26: 479—497.

de Matos, J. A. (1993). "MSM Estimators of American Option Pricing Models." Working Paper, INSEAD, Foutainebleau, France.

Dempster, M. (1994). "Fast Numerical Valuation of American, Exotic and Complex Options." Working Paper, Finance Research Group, Department of Mathematics and Institute for Studies in Finance, University of Essex.

Dempster, M., and J. Hutton. (1997). "Fast Numerical Valuation of American, Exotic and Complex Options." *Applied Mathematical Finance* 4: 1—20.

DeMunnik, J. (1992). *The Valuation of Interest Rate Derivative Securities*. Amsterdam: Tinbergen Institute.

Dengler, H., and R. Jarrow. (1996). "Option Pricing using a Binomial Model with Random Time Steps." *Review of Derivatives Research* 1: 107—138.

Derman, E., and I. Kani. (1994). "Riding on the Smile." *Risk* 7 (February): 32—39.

Derviz, A. (1996). "Adjoint Equations in Stochastic Optimal Control and Application to Portfolio Optimization with Borrowing Constraints." Working Paper, Institute of Information Theory and Automation, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague.

Detemple, J. (1986). "Asset Pricing in a Production Economy with Incomplete Information." *Journal of Finance* 41: 383—391.

Detemple, J. (1991). "Further Results on Asset Pricing with Incomplete Information." *Journal of Economic Dynamics and Control* 15: 425—454.

Detemple, J. (1995). "Asset Pricing in an Intertemporal Noisy Rational Expectations Equilibrium." Working Paper, Sloan School of Management, Massachusetts Institution of Technology. Forthcoming in *Journal of Mathematical Economics*.

Detemple, J., and S. Murthy. (1994b). "Intertemporal Asset Pricing with Heterogencous Beliefs." *Journal of Economic Theory* 62: 294—320.

Detemple, J., and S. Murthy. (1997a). "Equilibrium Asset Prices and No-Arbitrage with Portfolio Constraints." *Review of Financial Studies* 10: 1133—1174.

Detemple, J., and S. Murthy. (1997b). "Pricing and Trade of Index Options under Heterogeneous Beliefs." Working Paper, Faculty of Management, McGill University and CIRANO.

Detemple, J., and L. Selden. (1991). "A General Equilibrium Analysis of Option and Stock Market Interactions." *International Economic Review* 32: 279—303.

Detemple, J., and A. Serrat. (1999). "Dynamic Equilibrium with Liquidity Constraints." Working Paper, Faculty of Management, McGill University and CIRANO.

Detemple, J., and F. Zapatero. (1991). "Asset Prices in an Exchange Economy with Habit Formation." *Econometrica* 59: 1633—1658.

Detemple, J., and F. Zapatero. (1992). "Optimal Consumption-Portfolio Policies with Habit Formation." *Mathematical Finance* 2: 251—274.

Dewynne, J., and P. Wilmott. (1994). "Exotic Options: Mathematical Models and Computation." Working Paper, Department of Mathematics, Southampton University.

Dezhbakhsh, H. (1994). "Foreign Exchange Forward and Futures Prices: Are They Equal?" *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 1: 75—87.

Diament, P. (1993). "Semi-Empirical Smooth Fit to the Treasury Yield Curve." Working Paper, Graduate School of Business, Columbia University.

Diener, F., and M. Diener. (1999). "Asymptotics of the Binomial Formula for Option Pricing." Working Paper, Université de Nice Sophia-Antipolis.

Dijkstra, T. (1996). "On Numeraires and Growth-Optimum Portfolios." Working Paper, Faculty of Economics, University of Groningen.

Dixit, A. (1989). "Entry and Exit Decisions Under Uncertainty." *Journal of Political Economy* 97: 620—638.

Dixit, A., and R. Pindyck. (1994). *Investment Under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.

Donaldson, J., T. Johnsen, and R. Mehra. (1990). "On the Term Structure of Interest Rates." *Journal of Economic Dynamics and Control* 14: 571—596.

Donaldson, J., and R. Mehra. (1984). "Comparative Dynamics of an Equilibrium Inter-

temporal Asset Pricing Model. "*Review of Economic Studies* 51: 491—508.

Dothan, M. (1978). "On the Term Structure of Interest Rates. "*Journal of Financial Economics* 7: 229—264.

Dothan, M. (1990). *Prices in Financial Markets*. New York: Oxford University Press.

Dothan, M., and D. Feldman. (1986). "Equilibrium Interest Rates and Multiperiod Bonds in a Partially Observable Economy. "*Journal of Finance* 41:369—382.

Douglas, J., J. Ma, and P. Protter. (1996). "Numerical Methods for Forward-Backward Stochastic Differential Equations. "*Annals of Applied Probability* 6: 940—968.

Drèze, J. (1971). "Market Allocation under Uncertainty. "*European Economic Review* 15(Winter): 133—165.

Dritschel, M., and P. Protter. (1998). "Complete Markets with Discontinuous Security Price. "Working Paper, Department of Statistics, Purdue University, West Lafayette.

Druskin, V., L. Knizhnerman, T. Tamarchenko, and S. Kostek. (1997). "Kryloy Subspace Reduction and Its Extensions for Option Pricing. "*Journal of Computational Finance* 1(Fall).

Duan, J.-C. (1995). "The Garch Option Pricing Model. "*Mathematical Finance* 5: 13—32.

Duan, J.-C., and J. G. Simonato. (1993). "Estimating Exponential-Affine Term Structure Models. "Working Paper, Department of Finance, McGill University and CIRANO.

Duffee, G. (1999a). "Estimating the Price of Default Risk. "*Review of Financial Studies* 12: 197—226.

Duffee, G. (1999b). "Forecasting Future Interest Rates: Are Affine Models Failures?" Working Paper, Federal Reserve Board.

Duffie, D. (1985). "Predictable Representation of Martingale Spaces and Changes of Probability Measure." In J. Azéma and M. Yor (Eds.), *Séminaire de Probabilités XIX*, Lecture Notes in Mathematics Number 1123, pp. 278—284. Berlin: Springer-Verlag.

Duffie, D. (1986). "Stochastic Equilibria: Existence, Spanning Number, and the 'No Expected Financial Gain from Trade' Hypothesis. "*Econometrica* 54: 1161—1184.

Duffie, D. (1987). "Stochastic Equilibria with Incomplete Financial Markets. "*Journal of Economic Theory* 41, 405—416; Corrigendum 49 (1989): 384.

Duffie, D. (1988a). "An Extension of the Black-Scholes Model of Security Valuation." *Journal of Economic Theory* 46: 194—204.

Duffie, D. (1988b). *Security Markets: Stochastic Models*. New York: Academic Press.

Duffie, D. (1989). *Futures Markets*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Duffie, D. (1992). *The Nature of Incomplete Markets*, pp. 214—262. Cambridge: Cambridge University Press.

Duffie, D. (1996). "Special Repo Rates." *Journal of Finance* 51: 493—526.

Duffie, D. (1998a). "Defaultable Term Structures with Fractional Recovery of Par." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Duffie, D. (1998b). "First to Default Valuation." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Duffie, D., and L. Epstein. (1992a). "Asset Pricing with Stochastic Differential Utility." *Review of Financial Studies* 5: 411—436.

Duffie, D., and L. Epstein. (1992b). "Stochastic Differential Utility." *Econometrica* 60: 353—394; Appendix with C. Skiadas.

Duffie, D., W. Fleming, M. Soner, and T. Zariphopoulou. (1997). "Hedging in Incomplete Markets with HARA Utility." *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 753—782.

Duffie, D., and N. Gârleanu. (2001). "Risk and Valuation of Collateralized Debt Valuation." *Financial Analysis Journal* 57: 41—62.

Duffie, D., and M. Garman. (1991). "Intertemporal Arbitrage and the Markov Valuation of Securities." *Cuadernos economicos de ICE* 49: 37—60.

Duffie, D., J. Geanakoplos, A. Mas-Colell, and A. McLennan. (1994). "Stationary Markov Equilibria." *Econometrica* 62: 745—781.

Duffie, D., P.-Y. Geoffard, and C. Skiadas. (1994). "Efficient and Equilibrium Allocations with Stochastic Differential Utility." *Journal of Mathematical Economics* 23: 133—146.

Duffie, D., and P. Glynn. (1995). "Efficient Monte Carlo Estimation of Security Prices." *Annals of Applied Probability* 5: 897—905.

Duffie, D., and M. Harrison. (1993). "Arbitrage Pricing of Russian Options and Perpetual Lookback Options." *Annals of Applied Probability* 3: 641—651.

Duffie, D., and C.-F. Huang. (1985). "Implementing Arrow-Debreu Equilibria by Continuous Trading of Few Long-Lived Securities." *Econometrica* 53: 1337—1356.

Duffie, D., and C.-F. Huang. (1986). "Multiperiod Security Markets with Differential Information: Martingales and Resolution Times." *Journal of Mathematical Economics* 15: 283—303.

Duffie, D., and M. Huang. (1996). "Swap Rates and Credit Quality." *Journal of Finance* 51: 921—949.

Duffie, D., and M. Jackson. (1990). "Optimal Hedging and Equilibrium in a Dynamic Futures Market." *Journal of Economic Dynamics and Control* 14: 21—33.

Duffie, D., and R. Kan. (1996). "A Yield-Factor Model of Interest Rates." *Mathematical Finance* 6: 379—406; reprinted in *Options Markets*, edited by G. Constantinides and A. Malliaris, London: Edward Elgar, 2000.

Duffie, D., and D. Lando. (1998). "Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University. Forthcoming in *Econometrica*.

Duffie, D., and P.-L. Lions. (1990). "PDE Solutions of Stochastic Differential Utility." *Journal of Mathematical Economics* 21: 577—606.

Duffie, D., J. Ma, and J. Yong. (1995). "Black's Consol Rate Conjecture." *Annals of Applied Probability* 5: 356—382.

Duffie, D., J. Pan, and K. Singleton. (2000). "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions." *Econometrica* 68: 1343—1376.

Duffie, D., L. Pedersen, and K. Singleton, (2000). "Modeling Sovereign Yield Spreads: A Case Study of Russian Debt." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Duffie, D., and P. Protter. (1988). "From Discrete to Continuous Time Finance: Weak Convergence of the Financial Gain Process." *Mathematical Finance* 2: 1—16.

Duffie, D., and H. Richardson. (1991). "Mean-Variance Hedging in continuous Time." *Annals of Applied Probability* 1: 1—15.

Duffie, D., M. Schroder, and C. Skiadas. (1996). "Recursive Valuation of Defaultable Securities and the Timing of the Resolution of Uncertainty." *Annals of Applied Probability* 6: 1075—1090.

Duffie, D., M. Schroder, and C. Skiadas. (1997). "A Term Structure Model with Preferences for the Timing of Resolution of Uncertainty." *Economic Theory* 9: 3—22.

Duffie, D., and W. Shafer. (1985). "Equilibrium in Incomplete Markets Ⅰ: A Basic Model of Generic Existence." *Journal of Mathematical Economics* 14: 285—300.

Duffie, D., and W. Shafer. (1986a). "Equilibrium and the Role of the Firm in Incomplete Markets." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Duffie, D., and W. Shafer. (1986b). "Equilibrium in Incomplete Markets Ⅱ: Generic Existence in Stochastic Economies." *Journal of Mathematical Economics* 15: 199—216.

Duffie, D., and K. Singleton. (1993). "Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices." *Econometrica* 61: 929—952.

Duffie, D., and K. Singleton. (1997). "An Econometric Model of the Term Structure of Interest Rate Swap Yields." *Journal of Finance* 52: 1287—1321; reprinted in *Options Markets*, edited by G. Constantinides and A. Malliaris, London: Edward Elgar. 2001.

Duffie, D., and K. Singleton. (1999). "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds." *Review of Financial Studies* 12: 687—720.

Duffie, D., and C. Skiadas. (1994). "Continuous-Time Security Pricing: A Utility Gradient Approach." *Journal of Mathematical Economics* 23: 107—132.

Duffie, D., and R. Stanton. (1988). "Pricing Continuously Resettled Contingent Claims." *Journal of Economic Dynamics and Control* 16: 561—574.

Duffie, D., and T.-S. Sun. (1990). "Transactions Costs and Portfolio Choice in a Discrete-Continuous Time Setting." *Journal of Economic Dynamics and Control* 14: 35—51.

Duffie, D., and W. Zame. (1989). "The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model." *Econometrica* 57: 1279—1297.

Duffie, D., and T. Zariphopoulou. (1993). "Optimal Investment with Undiversifiable Income Risk." *Mathematical Finance* 3: 135—148.

Dumas, B. (1989). "Two-Person Dynamic Equilibrium in the Capital Market." *Review of Financial Studies* 2: 157—188.

Dumas, B., and E. Luciano. (1989). "An Exact Solution to a Dynamic Portfolio Choice Problem under Transactions Costs." *Journal of Finance* 46: 577—595.

Dumas, B., R. Uppal, and T. Wang. (2000). "Efficient Intertemporal Allocations with Recursive Utility." *Journal of Economic Theory* 93: 240—259.

Dunn, K., and K. Singleton. (1986). "Modeling the Term Structure of Interest Rates under Nonseparable Utility and Durability of Goods." *Journal of Financial Economics* 17: 27—55.

Dupire, B. (1994b). "Pricing with a Smile." *Risk* January: 18—20.

Durrett, R. (1991). *Probability: Theory and Examples*. Belmont. CA: Wadsworth Publishing Co.

Dybvig, P. (1988). "Bond and Bond Option Pricing Based on the Current Term Structure." Working Paper, School of Bussiness, Washington University, St. Louis.

Dybvig, P. (1989). "Hedging Nontraded Wealth." Working Paper, School of Business, Washington University, St. Louis.

Dybvig, P. (1995). "Duesenberry's Ratcheting of Consumption: Optimal Dynamic Consumption and Investment Given Intolerance for Any Decline in Standard of Living." *Review of Economic Studies* 62: 287—313.

Dybvig, P., and C.-F. Huang. (1988). "Nonnegative Wealth, Absence of Arbitrage, and Feasible Consumption Plans." *Review of Financial Studies* 1: 377—401.

Dybvig, P., J. Ingersoll, and S. Ross. (1996). "Long Forward and Zero-Coupon Rates Can Never Fall." *Journal of Business* 69: 1—25.

Dybvig, P., C. Rogers, and K. Back. (1999). "Portfolio Turnpikes." *Review of Financial Studies* 12: 165—195.

Dynkin, E., and A. Yushkevich. (1979). *Controlled Markov Processes*. Berlin, New York: Springer-Verlag.

Eberlein, E. (1991). "On Modelling Questions in Security Valuation." Working Paper, Institutfür Mathematische Stochastik, Universität Freiburg.

Eberlein, E., and J. Jacod. (1997). "On the Range of Option Prices." *Finance and Stochastics* 1: 131—140.

Eberlein, E., and U. Keller. (1995). "Hyperbolic Distributions in Finance." *Bernoulli* 1: 281—299.

Eberlein, E., U. Keller, and K. Prause. (1998). "New Insights into Smile, Mispricing, and Value at Risk: The Hyperbolic Model." *Journal of Business* 71: 371—405.

Eberlein, E., and S. Raible. (1999). "Term Structure Models Driven by General Lévy Processes." *Mathematical Finance* 9: 31—53.

Ederington, L., G. Caton, and C. Campbell. (1997). "To Call or Not to Call Convertible Debt." *Financial Management* 26: 22—31.

Edirisinghe, C., V. Naik, and R. Uppal. (1993). "Optimal Replication of Options with Transactions Costs." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28: 117—138.

Ekern, S. (1993). "Entry and Exit Decisions with Restricted Reversibility." Working Paper, Norwegian School of Economics, Bergen.

El Karoui, N. (1997). "Backward Stochastic Differential Equations: A General Introduction." In N. El Karoui and L. Mazliak (Eds.), *Backward Stochastic Differential Equations*, pp. 7—26. Essex: Addison Wesley Longman Ltd.

El Karoui, N., A. Frachot, and H. Geman. (1997). "On the Behavior of Long Zero Coupon Rates in a No Arbitrage Framework." *Review of Derivatives Research* 1: 351—369.

El Karoui, N., and H. Geman. (1994). "A Probabilistic Approach to the Valuation of General Floating-Rate Notes with an Application to Interest Rate Swaps." *Advances in Futures and Options Research* 7: 47—63.

El Karoui, N., and S.-J. Huang. (1997). "A General Result of Existence and Uniqueness of Backward Stochastic Differential Equations." In N. El Karoui and L. Mazliak (Eds.), *Backward Stochastic Differential Equations*, pp. 27—36. Essex: Addison Wesley Longman Ltd.

El Karoui, N., and M. Jeanblanc. (1998). "Optimization of Consumption with Labor Income." *Finance and Stochastics* 2: 409—440.

El Karoui, N., M. Jeanblanc, and S. Shreve. (1998). "Robustness of the Black-Scholes Formula." *Mathematical Finance* 8: 93—126.

El Karoui, N., G. Kapoudjian, E. Pardoux, S. Peng, and M. Quenez. (1997). "Reflected Solutions of Backward SDE's, and Related Obstacle Problems for PDE's." *Annals of Probability* 2: 702—737.

El Karoui, N., and V. Lacoste. (1992). "Multifactor Models of the Term Structure of Interest Rates." Working Paper, Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI.

El Karoui, N., C. Lepage, R. Myneni, N. Roseau, and R. Viswanathan. (1991a). "The Pricing and Hedging of Interest Rate Claims: Applications." Working Paper, Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI.

El Karoui, N., C. Lepage, R. Myneni, N. Roseau, and R. Viswanathan. (1991b). "The Valtuation and Hedging of Contingent Claims with Gaussian Markov Interest Rates." Working Paper, Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI.

El Karoui, N., R. Myneni, and R. Viswanathan. (1992). "Arbitrage Pricing and Hedging of Interest Rate Claims with State Variables I: Theory." Working Paper, Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI.

El Karoui, N., S. Peng, and M. Quenez. (1997). "Backward Stochastic Differential Equations in Finance." *Mathematical Finance* 1: 1—71.

El Karoui, N., and M. Quenez. (1991). "Programmation Dynamique et Evaluation des Actifs Contingents en Marché Incomplet." *Comtes Rendus de l'Academie de Science de Paris* 3131: 851—854.

El Karoui, N., and M. Quenez. (1995). "Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in an Incomplete Market." *SIAM Journal of Control and Optimzation* 33: 29—66.

El Karoui, N., and J.-C. Rochet. (1989). "A Pricing Formula for Options on Coupon Bonds." Working Paper, October, Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI.

Elliot, R., and J. Van der Hoek. (1999). "Stochastic Flows and the Forward Measure." Working Paper, Department of Mathematical Sciences, University of Alberta, Canada. Forthcoming, in *Finance and Stochastics*.

Elliott, R., M. Jeanblanc, and M. Yor. (1999). "Some Models on Default Risk." Working Paper, Department of Mathematics, University of Alberta. Forthcoming in *Mathematical Finance*.

Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica* 50: 987—1008.

Epstein, L. (1988). "Risk Aversion and Asset Prices." *Journal of Monetary Economics* 22: 179—192.

Epstein, L. (1992). "Behavior under Risk: Recent Developments in Theory and Application." In J. Laffont (Ed.), *Advances in Economic Theory*, pp. 1—63. Cambridge: Cambridge University Press.

Epstein, L., and A. Melino. (1995). "A Revealed Preference Analysis of Asset Pricing under Recursive Utility." *Review of Economic Studies* 62: 597—618.

Epstein, L., and T. Wang. (1994). "Intertemporal Asset Pricing under Knightian Uncertainty." *Econometrica* 62: 283—322.

Epstein, L., and S. Zin. (1989). "Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns Ⅰ: A Theoretical Framework." *Econometrica* 57: 937—969.

Epstein, L., and S. Zin. (1999). "Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis." *Journal of Political Economy* 99: 263—286.

Eraker, B., M. Johannes, and N. Polson. (1999). "Asset Return Dynamics with Jumps, Stochastic Volatility and Jumps to Volatility." Working Paper, Norwegian School of Economics and University of Chicago.

Ericsson, J., and O. Renault. (1999). "Credit and Liquidity Risk." Working Paper, Faculty of Management, McGill University.

Ethier, S., and T. Kurtz. (1986). *Markov Processes: Characterization and Convergence*. New York: Wiley.

Eydeland, A. (1994a). "A Fast Algorithm for Computing Integrals in Function Spaces: Financial Applications." Working Paper, Fuji Capital Markets Corporation, New York.

Eydeland, A. (1994b). "A Spectral Algorithm for Pricing Interest Rate Options." Working Paper, Department of Mathematics, University of Massachusetts.

Fan, H., and S. Sundaresan. (1997). "Debt Valuation, Strategic Debt Service and Optimal Dividend Policy." Working Paper, Columbia University.

Feller, W. (1951). "Two Singular Diffusion Problems." *Annals of Mathematics* 54: 173—182.

Filipović, D. (1999a). "A General Characterization of Affine Term Structure Models." Working Paper, ETH, Zurich. Forthcoming in *Finance and Stochastics*.

Filipović, D. (1999b). "A Note on the Nelson-Siegel Family." *Mathematical Finance* 9: 349—359.

Finger, C. (2000). "A Comparison of Stochastic Default Rate Model." Working Paper, The Risk Metrics Group.

Fisher, E., R. Heinkel, and J. Zechner. (1989). "Dynamic Capital Structure Choice: Theory and Tests." *Journal of Finance* 44: 19—40.

Fisher, M., and C. Gilles. (1996). "The Term Structure of Repo Spreads." Working Paper, Research and Statistics, Board of Governors of the Federal Reserve System.

Fisher, M., and C. Gilles. (1997). "The Equity Premium and the Term Structure of Interest Rates with Recursive Preferences." Working Paper, Research and Statistics, Board of Governors of the Federal Reserve System.

Fisher, M., and C. Gilles. (1998a). "Around and Around: The Expectations Hypothesis." *Journal of Finance* 53: 365—383.

Fisher, M., and C. Gilles. (1998b). "Consumption and Asset Prices with Recursive Preferences." Working Paper, Board of Governors of the Federal Reserve Sys-

tem.

Fisher, M., D. Nychka, and D. Zervos. (1994). "Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines." Working Paper, Board of Governors of the Federal Reserve Board, Washington D. C.

Fitzpatrick, B., and W. Fleming. (1991). "Numerical Methods for Optimal Investment -Consumption Models." *Mathematics of Operations Research* 16: 823—841.

Fleming, J., and R. Whaley. (1994). "The Value of Wildcard Options." *Journal of Finance* 1: 215—236.

Fleming, W., S. Grossman, J.-L. Vila, and T. Zariphopoulou. (1989). "Optimal Portfolio Rebalancing with Transaction Costs." Working Paper, Department of Applied Mathematics, Brown University.

Fleming, W., and R. Rishel. (1975). *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Berlin: Springer-Verlag.

Fleming. W., and M. Soner. (1993). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. New York: Springer-Verlag.

Fleming, W., and T. Zariphopoulou. (1991). "An Optimal Investment/Consumption Model with Borrowing Constraints." *Mathematics of Operations Research* 16: 802—822.

Flesaker, B. (1991). "Valuing European Options when the Terminal Value of the Underlying Asser is Unobservable." Working Paper, Department of Finance, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Flesaker,B. (1993). "Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee Model of Interest Rate Contingent Claims Pricing." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28: 483—495.

Florenzano, M., and P. Gourdel. (1993). "Incomplete Markets in Infinite Horizon: Debt Constraints versus Node Prices." *Mathematical Finance* 6: 167—196.

Florenzano, M., and P. Gourdel. (1994). "T-Period Economics with Incomplete Markets." *Economics Letters* 44: 91—97.

Foldes, L. (1978a). "Martingale Conditions for Optimal Saving-Discrete Time." *Journal of Mathematical Economics* 5: 83—96.

Foldes, L. (1978b). "Optimal Saving and Risk in Continuous Time." *Review of Economic Studies* 45: 39—65.

Foldes, L. (1990). "Conditions for Optimality in the Infinite-Horizon Portfolio-Cum-Saving Problem with Semimartingale Investments." *Stochastics and Stochastics*

Reports 29: 133—170.

Foldes, L. (1991a). "Certainty Equivalence in the Continuous-Time Portfolio-Cum-Saving Model."In *Applied Stochastic Analysis*. London: Gordon and Breach.

Foldes, L. (1991b). "Optimal Sure Portfolio Plans."*Mathematical Finance* 1: 15—55.

Foldes. L. (1992). "Existence and Uniqueness of an Optimum in the Infinite-Horizon Portfolio-Cum-Saving Model with Semimartingale Investments."*Stochastic and Stochastic Reports* 41: 241—267.

Foldes, L. (1996). "The Optimal Consumption Function in a Brownian Model of Accumulation, Part A: The Consumption Function as Solution of a Boundary Value Problem."Working Paper, London School of Economics and Political Science.

Föllmer, H. (1981). "Calcul d'Ito Sans Probabilities."In J. Azéma and M. Yor (Eds.), *Séminaire de Probabilités XV*. Lecture Notes in Mathematics, pp. 143—150. Berlin: Springer-Verlag.

Föllmer, H. (1993). "A Microeconomic Approach to Diffusion Models for Stock Prices."*Mathematical Finance* 3: 1—23.

Föllmer, H., and M. Schweizer. (1990). "Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information"In M. Davis and R. Elliott (Eds.), *Applied Stochastic Analysis*, pp. 389—414. London: Gordon and Breach.

Föllmer, H., and D. Sondermann. (1986). "Hedging of Non-Redundant Contingent Claims."In W. Hildenbrand and A. Mas-Colell (Eds.), *Contributions to Mathematical Economics*, pp. 205—224. Amsterdam: North-Holland.

Fouque, J., G. Papanicolaou, and K. Sircar. (1999a). "Financial Modeling in a Fast Mean-Reverting Stochastic Volatility Environment."*Asia-Pacific Financial Markets* 6: 37—48.

Fouque, J., G. Papanicolaou, and K. Sircar. (1999b). "Mean-Reverting Stochastic Volatility."Working Paper, Department of Mathematics, North Carolina State University.

Fouque, J., G. Papanicolaou, and K. Sircar. (1999c). "Stochastic Volatility Correction to Black-Scholes."Working Paper, Department of Mathematics, North Carolina State University.

Fournié, E. (1993). "Statistiques des Diffusions Ergodiques avec Applications en Finance."Working Paper, Université de Nice-Sophia Antipolis.

Fournié, E., and J.-M. Lasry. (1996). "Some Nonlinear Methods to Study Far-from-the-Money Contingent Claims."Working Paper, Caisse Autonome de Refinance-

ment, Paris.

Fournié, E., J.-M. Lasry., J. Lebuchoux, P. -L. Lions, and N. Touzi. (1999). "Applications of Malliavin Calculus to Monte Carlo Methods in Finance." *Finance and Stochastics*3: 391—412.

Fournié, E., J.-M. Lasry, and N. Touzi. (1996). "Méthode de Monte Carlo pour les Modéles á Volatilité Stochastique." Working Paper, Caisse Autonome de Refinancement, Paris.

Fournié, E., and D. Talay. (1991). "Application de la Statistique des Diffusions à un Modéle de Taux d'Interet." *Finances*12: 79—111.

Frachot, A. (1995). "Factor Models of Domestic and Foreign Interest Rates with Stochastic Volatilities." *Mathematical Finance*5: 167—185.

Frachot, A. (1996). "A Reexamination of the Uncovered Interest Rate Parity Hypothesis." *Journal of International Money and Finance*15: 419—437.

Frachot, A., D. Janci, and V. Lacoste. (1993). "Factor Analysis of the Term Structure: A Probabilistic Approach." Working Paper, Banque de France, Paris.

Frachot, A., and J.-P. Lesne. (1993a). "Econometrics of Linear Factor Models of Interest Rates." Working Paper, Banque de France, Paris.

Frachot, A., and J.-P. Lesne. (1993b). "Expectations Hypotheses and Stochastic Volatilities." Working Paper, Banque de France, Paris.

Frachot, A., and J. -P. Lesne. (1993c). "Factor Models of Interest Rates with Stochastic Volatilities." Working Paper, Banque de France, Paris.

Freedman, D. (1983). *Markov Chains*. New York: Springer-Verlag.

Freidlin, M. (1985). *Functional Integration and Partial Differential Equations*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Frey, R. (1996). "The Pricing and Hedging of Options in Finitely Elastic Markets." Working Paper, Department of Statistics, Faculty of Economics, University of Bonn.

Frey, R., and C. Sin. (1997). "Bounds on European Option Prices under Stochastic Volatility." Working Paper, Department Mathematik, ETH Zentrum, Zürich.

Frey, R., and A. Stremme. (1997). "Market Volatility and Feedback Effects from Dynamic Hedging." *Mathematical Finance*7: 351—374.

Friedman, A. (1964). *Partial Differential Equations of the Parabolic Type*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Friedman, A. (1975). *Stochastic Differential Equations and Applications, Vol.* I.

New York: Academic Press.

Frittelli, M., and P. Lakner. (1995). "Arbitrage and Free Lunch in a General Financial Market Model: The Fundamental Theorem of Asset Pricing." *Mathematical Finance*5: 237—261.

Fu, M., D. Madan, and T. Wang. (1999). "Pricing Continuous-Time Asian Options: A Comparison of Monte Carlo and Laplace Transform Methods." *Journal of Computational Finance*2(Winter): 49—74.

Gabay, D. (1982). "Stochastic Processes in Models of Financial Markets." Proceedings of the IFIP Conference on Control of Distributed Systems, Toulouse. Toulouse, France: Pergamon Press.

Gagnon, J., and J. Taylor. (1990). "Solving Stochastic Equilibrium Models with the Extended Path Method." *Economic Modelling*7: 251—257.

Galai, D., and M. Schneller. (1978). "Pricing of Warrants and the Value of the Firm." *Journal of Finance*33: 1333—1342.

Gale, D. (1960). *The Theory of Linear Economic Models*. New York: McGraw-Hill.

Gallant, R., and H. White. (1988). *A Unified Theory of Estimation and Inference for Nonlinear Dynamic Models*. New York: Basil Blackwell.

Gandhi, S., A. Kooros, and G. Salkin. (1993). "An Improved Analytic Approximation for American Option Pricing." Working Paper, Imperial College, University of London.

Gao, B., J.-Z. Huang, and M. Subrahmanyam. (1996). "An Analytical Approach to the Valuation of American Path-Dependent Options." Working Paper, Kenan-Flagler Business School, University of North Carolina. Forthcoming in *Journal of Economic Dynamics and Control*.

Garbade, K. (1996). *Fixed Income Analytics*. Cambridge, MA: MIT Press.

Garman, M. (1985). "Towards a Semigroup Pricing Theory." *Journal of Finance*40: 847--861.

Gatarek, D., and M. Musiela. (1995). "Pricing of American Receiver Swaptions as Optimal Stopping of an Ornstein-Uhlenbeck Process." Working Paper, School of Mathematics, University of New South Wales, Sydney.

Geanakoplos, J. (1990). "An Introduction to General Equilibrium with Incomplete Asset Markets." *Journal of Mathematical Economics*19: 1—38.

Geanakoplos, J., and A. Mas-Colell. (1989). "Real Indeterminacy with Financial Assets." *Journal of Economic Theory* 47: 22—38.

Geanakoplos, J., and H. Polemarchakis. (1986). "Existence, Regularity, and Constrained Suboptimality of Competitive Allocations when the Asset Market is Incomplete."In W. Heller and D. Starrett (Eds.), *Essays in Honor of Kenneth J. Arrow*, Volume Ⅲ, pp. 65—96. Cambridge: Cambridge University Press.

Geanakoplos, J., and W. Shafer. (1990). "Solving Systems of Simultaneous Equations in Economics."*Journal of Mathematical Economics* 19: 69—94.

Geanakoplos, J., and W. Zame. (1999). "Collateral, Default, and Market Crashes." Working Paper, Cowles Foundation Working Paper, Yale University.

Gegout-Petit, A., and E. Pardoux. (1996). "Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades Réfléchies dans un Convexe."*Stochastics and Stochastics Reports* 57: 111—128.

Geman, H., N. El Karoui, and J. Rochet. (1995). "Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing."*Journal of Applied Probability* 32: 443—458.

Geman, H., D. Madan, and M. Yor. (1999). "Time Changes for Lévy Processes. Working Paper, Université Paris IX Dauphine and ESSEC.

Geman, H., and M. Yor. (1993). "Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities." *Mathematical Finance* 3: 349—375.

Gennotte, G. (1986). "Continuous-Time Production Economies under Incomplete Information Ⅰ: A Separation Theorem."*Journal of Finance* 41: 733—746.

Gerber, H., and E. Shiu. (1994). "Option Pricing by Esscher Transforms."*Transactions of the Society of Actuaries* 46: 51—92.

Geske, R. (1977). "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options." *Journal of Financial Economics* 7: 63—81.

Geske, R. (1979). "The Valuation of Compound Options."*Journal of Financial Economics*7: 63—81.

Geske, R., and H. Johnson. (1984). "The American Put Option Valued Analytically." *Journal of Finance*39: 1511—1524.

Ghysels, E. (1986). "Asset Prices in an Economy with Latent Technological Shocks-Econometric Implications of a Discrete Time General Equilibrium Model."Working Paper, Department of Economics and Gentre de Recherche et Développement en Économique, Université de Montréal.

Ghysels, E., C. Gouriéroux, and J. Jasiak. (1995). "Market Time and Asset Price Movements Theory and Estimation."Working Paper, C. R. D. E., Université

de Montreal.

Gibbons, M., and K. Ramaswamy. (1993). "A Test of the Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure of Interest Rates." *Review of Financial Studies* 6: 619—658.

Gibbons, M., and T. Sun. (1986). "The Term Structure of Interest Rates: A Simple Exposition of the Cox, Ingersoll, and Ross Model." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Gibson, R., and S. Sundaresan. (1999). "A Model of Sovereign Borrowing and Sovereign Yield Spreads." Working Paper, School of HEC, University of Lausanne.

Gihman, I., and A. Skorohod. (1972). *Stochastic Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag.

Gilles, C., and S. LeRoy. (1991). "On the Arbitrage Pricing Theory." *Economic Theory* 1: 213—230.

Gilles, C., and S. LeRoy. (1992a). "Bubbles and Charges." *International Economic Review* 33: 323—339.

Gilles, C., and S. LeRoy. (1992b). "Stochastic Bubbles in Markov Economies." Working Paper, Board of Governors of The Federal Reserve System, Washington, D. C.

Gilles, C., and S. LeRoy. (1998). "Arbitrage, Martingales, and Bubbles." *Economics Letters* 60: 357—362.

Giovannini, A., and P. Weil. (1989). "Risk Aversion and Intertemporal Substitution in the Capital Asset Pricing Model." Working Paper, National Bureau of Economic Research, Cambridge, Massachusetts.

Girotto, B., and F. Ortu. (1994). "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Contraints in the Finite-Dimensional Case: Some Remarks." *Mathematical Finance* 4: 69—73.

Girotto, B., and F. Ortu. (1996). "Existence of Equivalent Martingale Measures in Finite Dimensional Securities Markets." *Journal of Economic Theory*69: 262—277.

Girotto, B., and F. Ortu. (1997a). "Generic Existence and Robust Non-Existence of Numeraires in Finite Dimensional Securities Markets." Working Paper, Dipartimento di Matematica Applicata "B. de Finetti," Universitá di Trieste, Trieste.

Girotto, B., and F. Ortu. (1997b). "Numeraires, Equivalent Martingale Measures and Completeness in Finite Dimensional Securities Markets." *Journal of Mathemati-*

*cal Economics*27: 283—294.

Glasserman, P., P. Heidelberger, and P. Shahabuddin. (1999). "Asymptotically Optimal Importance Sampling and Stratification for Pricing Path-Dependent Options." *Mathematical Finance*9: 117—152.

Glasserman, P., and Y. Jin. (1999). "Comparing Stochastic Discount Factors through their Implied Measures." Working Paper, Columbia University.

Glasserman, P., and S. Kou. (1999). "The Term Structure of Simple Forward Rates with Jump Risk." Working Paper, Columbia University.

Glasserman, P., and X. Zhao. (1999). "Fast Greeks by Simulation in Forward LIBOR Models." *Journal of Computational Finance*3 (Fall): 5—40.

Goldberg, L. (1998). "Volatility of the Short Rate in the Rational Lognormal Model." *Finance and Stochastics*2: 199—211.

Goldman, B., H. Sosin, and M. Gatto. (1979). "Path Dependent Options: 'Buy at the Low, Sell at the High'." *Journal of Finance*34: 1111—1127.

Goldstein, R. (1995). "On the Term Structure of Interest Rates in the Presence of Reflecting and Absorbing Boundaries." Working Paper, Walter A. Haas School of Business, University of California at Berkeley.

Goldstein, R. (1997). "Beyond HJM: Fitting the Current Term Structure While Maintaining a Markovian System." Working Paper, Fisher College of Business, The Ohio State University.

Goldstein, R. (2000). "The Term Structure of Interest Rates as a Random Field." *Review of Financial Studies* 13: 365—384.

Goldstein, R., and F. Zapatero. (1996). "General Equilibrium with Constant Relative Risk Aversion and Vasicek Interest Rates." *Mathematical Finance* 6: 331—340.

Goldys, B., and M. Musiela. (1996). "On Partial Differential Equations Related to Term Structure Models." Working Paper, School of Mathematics, University of New South Wales, Sydney.

Goldys, B., M. Musiela, and D. Sondermann. (1994). "Lognormality of Rates and Term Structure Models." Working Paper, School of Mathematics, University of New South Wales.

Goll, T., and J. Kallsen. (1999). "Optimal Portfolios for Logarithmic Utility." Working Paper, University of Freiburg.

Gorman, W. (1953). "Community Preference Fields." *Econometrica* 21: 63—80.

Gottardi, P. (1995). "An Analysis of the Conditions for the Validity of the Modigliani-

Miller Theorem with Incomplete Markets."*Economic Theory* 5: 191—208.

Gottardi, P., and T. Hens. (1996). "The Survival Assumption and Existence of Competitive Equilibria when Asset Markets are Incomplete."*Journal of Economic Theory* 71: 313—323.

Gottardi, P., and A. Kajii. (1999). "The Structure of Sunspot Equilibria: The Role of Multiplicity."*Review of Economic Studies* 66: 713—732.

Gourieroux, C., and J. Jasiak. (2000). *Financial Econometrics*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Gourieroux, C., and J. -P. Laurent. (1994). "Estimation of a Dynamic Hedging." Working Paper, CREST and CEPREMAP, Paris.

Gourieroux, C., J. -P. Laurent, and H. Pham. (1998). "Mean-Variance Hedging and Numeraire."*Mathematical Finance* 3: 179—200.

Gourieroux, C., and O. Scaillet. (1994). "Estimation of the Term Structure from Bond Data."Working Paper, CREST and CEPREMAP, Paris.

Grabbe, J. (1983). "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange."*Journal of International Money and Finance* 2: 239—253.

Grandell, J. (1976). *Doubly Stochastic Poisson Processes*. Lecture Notes in Mathematics, Number 529. New York: Springer-Verlag.

Grannan, E., and G. Swindle. (1996). "Minimizing Transaction Costs of Option Hedging Strategies."*Mathematical Finance* 6: 341—364.

Grant, S., A. Kajii, and B. Polak. (2000). "Temporal Resolution of Uncertainty and Recursive Non-Expected Utility Models."*Econometrica* 68: 425—434.

Grauer, F., and R. Litzenberger. (1979). "The Pricing of Commodity Futures Contracts, Nominal Bonds, and Other Risky Assets under Commodity Price Uncertainty."*Journal of Finance* 44: 69—84.

Grinblatt, M. (1994). "An Analytic Solution for Interest Rate Swap Spreads."Working Paper, Anderson Graduate School of Management, University of California, Los Angeles.

Grinblatt, M., and N. Jegadeesh. (1996). "The Relative Pricing of Eurodollar Futures and Forward Contracts."*Journal of Finance* 51: 1499—1522.

Grodal, B., and K. Vind. (1988). "Equilibrium with Arbitrary Market Structure." Working Paper, Department of Economics, University of Copenhagen.

Grosen, A., and P. Jorgensen. (1995). "The Valuation of Interest Rate Guarantees: An Application of American Option Pricing Theory."Working Paper, Depart-

ment of Banking and Finance, Aarhus School of Business.

Grossman, S., and G. Laroque. (1990). "Asset Pricing and Optimal Portfolio Choice in the Presence of Illiquid Durable Consumption Goods." *Econometrica* 58: 25—51.

Grossman, S., and R. Shiller. (1982). "Consumption Correlatedness and Risk Measurement in Economies with Non-Traded Assets and Heterogeneous Information." *Journal of Financial Economics* 10:195—210.

Grossman, S., and Z. Zhou. (1996). "Equilibrium Analysis of Portfolio Insurance." *Journal of Finance* 51: 1379—1403.

Gukhal, C. (1995a). "American Call Options on Stocks with Discrete Dividends." Working Paper, Graduate School of Business, Columbia University, New York.

Gukhal, C. (1995b). "The Analytic Valuation of American Options on Jump-Diffusion Processes."Working Paper, Graduate School of Business, Columbia University, New York.

Gul, F., and O. Lantto. (1990). "Betweeness Satisfying Preferences and Dynamic Choice." *Journal of Economic Theory* 52: 162—177.

Guo, D. (1998). "The Risk Premium of Volatility Implicit in Currency Options." *Journal of Business and Economics Statistics* 16: 498—507.

Haan, W. D. (1996). "Heterogeneity, Aggregate Uncertainty, and the Short-Term Interest Rate." *Journal of Business and Economic Statistics* 14: 399—411.

Hahn, F. (1994). "On Economies with Arrow Securities."Working Paper, Department of Economics, Cambridge University.

Hahn, F. (1999). "A Remark on Incomplete Markets Equilibrium."In G. Chichilnisky (Ed.), *Markets, Information and Uncertainty*, pp. 67—71. New York: Cambridge University Press.

Hakansson, N. (1970). "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions." *Econometrica* 38: 587—607.

Hakansson, N. (1974). "Convergence to Isoelastic Utility and Policy in Multiperiod Portfolio Choice." *Journal of Financial Economics* 1: 201—224.

Hamza, K., and F. Klebaner. (1995). "A Stochastic Partial Differential Equation for Term Structure of Interest Rates."Working Paper, Department of Statistics, University of Melbourne.

Hansen, A., and P. Jorgensen. (1998). "Exact Analytical Valuation of Bonds when Spot Interest Rates are Log-Normal."Working Paper, Centre for Analytical Finance, University of Aarhus, Aarhus School of Business.

Hansen, L. (1982). "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators." *Econometrica* 50: 1029—1054.

Hansen, L., and R. Jaganathan. (1990). "Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies." *Journal of Political Economy* 99: 225—262.

Hansen, L., and S. Richard. (1987). "The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models." *Econometrica* 55: 587—614.

Hansen, L., and T. Sargent. (1990). "Recursive Linear Models of Dynamic Economies." Working Paper, Department of Economics, University of Chicago.

Hansen, L., and K. Singleton. (1982). "Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models." *Econometrica* 50: 1269—1286.

Hansen, L., and K. Singleton. (1983). "Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns." *Journal of Political Economy* 91: 249—265.

Hansen, L., and K. Singleton. (1996). "Efficient Estimation of Linear Asset-Pricing Models with Moving Average Errors." *Journal of Business and Economic Statistics* 14: 53—68.

Hara, C. (1993). "A Role of Redundant Assets in the Presence of Transaction Costs." Working Paper, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

Hara, C. (1994). "Marginal Rates of Substitution for Uninsurable Risks with Constraint-Efficient Asset Structures." Working Paper, Center for Operations Research and Econometrics, Université Catholique de Louvain.

Harris, M. (1987). *Dynamic Economic Analysis*. New York: Oxford University Press.

Harrison, M. (1985). *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*. New York: Wiley.

Harrison, M., and D. Kreps. (1979). "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets." *Journal of Economic Theory* 20: 381—408.

Harrison, M., and S. Pliska. (1981). "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading." *Stochastic Processes and Their Applications* 11: 215—260.

Hart, O. (1975). "On the Optimality of Equilibrium when the Market Structure is Incomplete." *Journal of Economic Theory* 11: 418—430.

Harvey, A., E. Ruiz, and N. Shephard. (1994). "Multivariate Stochastic Variance

Models. "*Review of Economic Studies* 61: 247—264.

Harvey, A., and N. Shephard. (1993). "The Econometrics of Stochastic Volatility." Working Paper, Department of Statistical and Mathematical Sciences, London School of Economics.

Haug, E. (1999). "Closed Form Valuation of American Barrier Options." Working Paper, Derivatives Research, Tempus Financial Engineering, Norway.

He, H. (1990). "Convergence from Discrete-to Continuous-Time Contingent Claims Prices." *Review of Financial Studies* 3: 523—546.

He, H. (1991). "Optimal Consumption-Portfolio Policies: A Convergence from Discrete to Continuous Time Models." *Journal of Economic Theory* 55: 340—363.

He, H., and C. Huang. (1994). "Consumption-Portfolio Policies: An Inverse Optimal Problem." *Journal of Economic Theory* 62: 294—320.

He, H., and H. Leland. (1993). "On Equilibrium Asset Price Processes." *Review of Financial Studies* 6: 593—617.

He, H., and D. Modest. (1995). "Market Frictions and Consumption-Based Asset Pricing." *Journal of Political Economy* 103: 94—117.

He, H., and H. Pagès. (1993). "Labor Income, Borrowing Constraints, and Equilibrium Asset Prices." *Economic Theory* 3: 663—696.

He, H., and N. Pearson. (1991a). "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets: The Finite-Dimensional Case." *Mathematical Finance* 1: 1—10.

He, H., and N. Pearson. (1991b). "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets: The Infinite-Dimensional Case." *Journal of Economic Theory* 54: 259—305.

He, H., and A. Takahashi. (1995). "A Variable Separation Technique for Pricing Average-Rate Options." Working Paper, Salomon Brothers Asia Limited, Derivatives Analysis.

Heath, D. (1998). "Some New Term Structure Models." Working Paper, Department of Mathematical Sciences, Carnegie. Mellor Oniversity.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. (1990). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25: 419—440.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. (1992a). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation." *Econometrica* 60: 77—106.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. (1992b). "Contingent Claim Valuation with a Random Evolution of Interest Rates." Working Paper, Operations Research Department, Cornell University.

Heaton, J. (1993). "The Interaction between Time-Nonseparable Preferences and Time Aggregation." *Econometrica* 61: 353—386.

Heaton, J., and D. Lucas. (1996). "Evaluating the Effects of Incomplete Markets on Risk Sharing and Asset Pricing." *Journal of Political Economy* 104: 668—712.

Hellwig, M. (1996). "Rational Expectations Equilibria in Sequence Economies with Symmetric Information: The Two Period Case." *Journal of Mathematical Economics* 26: 9—49.

Hemler, M. (1990). "The Quality Delivery Option in Treasury Bond Futures Contracts." *Journal of Finance* 45: 1565—1586.

Henrotte, P. (1991). "Transactions Costs and Duplication Strategies." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Henrotte, P. (1994). "Multiperiod Equilibrium with Endogenous Price Uncertainty." Working Paper, Groupe HEC, Département de Finance et Economie, Jouy en Josas, France.

Hens, T. (1991). "Structure of General Equilibrium Models with Incomplete Markets." Working Paper, Department of Economics, University of Bonn.

Hernandez, A., and M. Santos. (1996). "Competitive Equilibria for Infinite-Horizon Economies with Incomplete Markets." *Journal of Economic Theory* 71: 102—130.

Heston, S. (1988a). "Generalized Interest Rate Processes for the Goldman, Sachs, and Company Mortgage Valuation Model." Working Paper, Graduate School of Industrial Administration, Garnegie-Mellon University.

Heston, S. (1988b). "Testing Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates." Working Paper, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University.

Heston, S. (1989). "Discrete Time Versions of Continuous Time Interest Rate Models." Working Paper, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University.

Heston, S. (1990). "Sticky Consumption, Optimal Investment, and Equilibrium Asset Prices." Working Paper, School of Organization and Management, Yale University.

Heston, S. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options." *Review of Financial Studies* 6: 327—344.

Heston, S. (1997). "Option Pricing with Infinitely Divisible Distributions." Working Paper, John M. Olin School of Business, Washington University, St. Louis.

Heston, S., and S. Nandi. (1997). "A Closed-Form GARCH Option Pricing Model." Working Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta.

Heston, S., and G. Zhou. (1997). "On Rate of Convergence of Discrete Time Contingent Claims." Working Paper, Washington University, St. Louis.

Heynen, R., and H. Kat. (1993). "Volatility Prediction: A Comparison of the Stochastic Volatility, GARCH (1, 1) and EGARCH (1, 1) Models." Working Paper, Department of Operations Research, Erasmus University, Rotterdam.

Heynen, R., A. Kemna, and T. Vorst. (1994). "Analysis of the Term Structure of Implied Volatilities." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 1: 31—57.

Hildenbrand, W., and P. Kirman. (1989). *Introduction to Equilibrium Analysis* (2nd ed.). Amsterdam: North-Holland Elsevier.

Hindy, A., (1995). "Viable Prices in Financial Markets with Solvency Constraints." *Journal of Mathematical Economics* 24: 105—136.

Hindy, A., and C. -F. Huang. (1992). "Intertemporal Preferences for Uncertain Consumption: A Continuous Time Approach." *Econometrica*60: 781—802.

Hindy, A., and C. -F., Huang. (1993). "Optimal Consumption and Portfolio Rules with Local Substitution." *Econometrica* 61: 85—122.

Hindy, A., C. -F. Huang, and D. Kreps. (1992). "On Intertemporal Preferences in Continuous Time: The Case of Certainty." *Journal of Mathematical Economics* 21: 401—440.

Hindy, A., C. -F. Huang, and H. Zhu. (1993). "Numerical Analysis of a Free Boundary Singular Control Problem in Financial Economics." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Hindy, A., C. -F. Huang, and H. Zhu. (1997). "Optimal Consumption and Portfolio Rules with Durability and Habit Formation." *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 525—550.

Hindy, A., and M. Huang. (1993b). "Asset Pricing with Linear Collateral Constraints." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Hirsch, M., M. Magill, and A. Mas-Colell. (1990). "A Geometric Approach to a Class of Equilibrium Existence Theorems." *Journal of Mathematical Economics* 19: 95—106.

Ho, T., and S. Lee. (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims." *Journal of Finance* 41: 1011—1029.

Hobson, D. (1998). "Bounds on the Lookback." *Finance and Stochastics* 98: 250—263.

Hobson, D., and C. Rogers. (1993). "Models of Endogenous Stochastic Volatility." Working Paper, Judge Institute of Management Studies, Cambridge University.

Hobson, D., and L. Rogers. (1998). "Complete Models with Stochastic Volatility." *Mathematical Finance* 8: 27—48.

Hodges, S., and A. Carverhill. (1992). "The Characterization of Economic Equilibria which Support Black-Scholes Options Pricing." Working Paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Hodges, S., and M. Selby. (1996). "The Risk Premium in Trading Equilibria Which Support Black-Scholes Option Pricing." In M. A. H. Dempster and S. R. Pliska (Eds.), *Mathematics of Derivative Securities*, pp. 41—52. Cambridge: Cambridge University Press.

Hofmann, N., E, Platen, and M. Schweizer. (1992). "Option Pricing Under Incompleteness and Stochastic Volatility." *Mathematical Finance* 2: 153—187.

Hogan, M. (1993a). "The Lognormal Interest Rate Model and Eurodollar Futures." Working Paper, Citibank, New York.

Hogan, M. (1993b). "Problems in Certain Two-Factor Term Structure Models." *Annals of Applied Probability* 3: 576—581.

Honda, T. (1992). "Equilibrium in Incomplete Real Asset Markets with Dispersed Forecast Functions." Working Paper, Engineering-Economic Systems Department, Stanford University.

Honda, T. (1996). "On the Consumption/Investment Problem with Stochastic 'Regime Switching' Parameters." Working Paper, Engineering-Economic Systems Department, Stanford University.

Honda, T. (1997a). "Equilibrium Asset Pricing with Unobservable Regime-Switching Mean Earnings Growth." Working Paper, Department of Engineering-Economic Systems and Operations Research, Stanford University.

Honda, T. (1997b). "Optimal Portfolio Choice and Equilibrium Valuation with Regime-Switching Mean Returns." Working Paper, Department of Engineering-Econom-

ic Systems and Operations Research, Stanford University.

Honda, T. (1997c). "Optimal Portfolio Choice for Unobservable and Regime-Switching Mean Returns." Working Paper, Department of Engineering-Economic Systems and Operations Research, Stanford University.

Hong, C., and L. Epstein. (1989). "Non-Expected Utility Preferences in a Temporal Framework with an Application to Consumption-Savings Behavior." *Journal of Economic Theory* 50: 54—81.

Howe, M., and B. Rustem. (1994a). "Minimax Hedging Strategy." Working Paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Howe, M., and B. Rustem. (1994b). "Multi-Period Minimax Hedging Strategies." Working Paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Huang, C. -F. (1985a). "Discussion on 'Towards a Semigroup Pricing Theory'." *Proceedings of the Journal of Finance* 40: 861—862.

Huang, C. -F. (1985b). "Information Structures and Equilibrium Asset Prices." *Journal of Economic Theory* 31: 33—71.

Huang, C. -F. (1985c). "Information Structures and Viable Price Systems." *Journal of Mathematical Economics* 14: 215—240.

Huang, C. -F. (1987). "An Intertemporal General Equilibrium Asset Pricing Model: The Case of Diffusion Information." *Econometrica* 55: 117—142.

Huang, C. -F., and R. Litzenberger. (1988). *Foundations for Financial Economics*. Amsterdam: North-Holland.

Huang, C. -F. and H. Pagès. (1992). "Optimal Consumption and Portfolio Policies with an Infinite Horizon: Existence and Convergence." *Annals of Applied Probability* 2: 36—64.

Huang, C. -F., and T. Zariphopoulou. (1999). "Turnpike Behavior of Long-Term Investments." *Finance and Stochastics* 3: 15—34.

Huang, J., M. Subrahmanyam, and R. Sundaram. (1999). "Costly Financing, Optimal Payout Policies and the Valuation of Corporate Debt." Working Paper, Department of Finance, Smeal School of Business, Penn State University.

Huang, J., M. Subrahmanyam, and G. Yu. (1996). "Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method." *Review of Financial Studies* 9: 277—300.

Huang, M. (1999). "Liquidity Shocks and Equilibrium Liquidity Premia." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Huang, P., and H. Wu. (1994). "Competitive Equilibrium of Incomplete Markets for Securities with Smooth Payoffs." *Journal of Mathematical Economics* 23: 219—234.

Hubalek, F., and W. Schachermayer. (1998). "When Does Convergence of Asset Price Processes Imply Convergence of Option Prices?" *Mathematical Finance* 8: 215—233.

Huge, B., and D. Lando. (1999). "Swap Pricing with Two-Sided Default Risk in a Rating-Based Model." *European Finance Review* 3: 239—268.

Hull, J., (2000). *Options, Futures, and Other Derivative Securities* (4th ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Hull, J., and A. White. (1987). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities." *Journal of Finance* 2: 281—300.

Hull, J., and A. White. (1990a). "Pricing Interest Rate Derivative Securities." *Review of Financial Studies* 3: 573—592.

Hull, J., and A. White. (1990b). "Valuing Derivative Securities using the Explicit Finite Difference Method." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25: 87—100.

Hull, J., and A. White. (1992). "The Price of Default." *Risk* 5: 101—103.

Hull, J., and . A White. (1993). "One-Factor Interest-Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28: 235—254.

Hull, J., and A. White. (1994). "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models." *Journal of Derivatives* 7 (Fall): 7—16; (Winter): 37—48.

Hull, J., and A. White. (1995). "The Impact of Default Risk on the Prices of Options and Other Derivative Securities." *Journal of Banking and Finance* 19: 299—322.

Husseini, S., J. -M. Lasry, and M. Magill. (1990). "Existence of Equilibrium with Incomplete Markets." *Journal of Mathematical Economics* 19: 39—68.

Ibanez, A., and F. Zapatero. (1999). "Monte Carlo Valuation of American Options through Computation of the Optimal Exercise Frontier." Working Paper. Departamento de Administracion, ITAM, Mexico.

Ikeda, N., and S. Watanabe. (1981). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Amsterdam: North-Holland.

Imkeller, P., M. Pontier, and F. Weisz. (1999). "Free Lunch and Arbitrage Possibili-

ties in a Financial Market Model with an Insider."Working Paper, Institute for Mathematics, Humboldt-University of Berlin.

Ingersoll, J. (1977). "An Examination of Corporate Call Policies on Convertible Securities."*Journal of Finance* 32: 463—478.

Ingersoll, J. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Totowa, N. J.: Rowman and Littlefield.

Ingersoll, J. (1992). "Optimal Consumption and Portfolio Rules with Intertemporally Dependent Utility of consumption."*Journal of Economic Dynamics and Control* 16: 681—712.

Iyengar, G., and T. Cover. (1997). "Analysis of Growth-Rate in the Presence of Transaction Costs."Working Paper, Information Systems Laboratory, Stanford University.

Jacka, S. (1984). "Optimal Consumption of an Investment."*Stochastics* 13: 45—60.

Jacka, S. (1991). "Optimal Stopping and the American Put."*Mathematical Finance* 1: 1—14.

Jackwerth, J. (1997). "Generalized Binomial Trees."*Journal of Derivatives* 5 (2): 7—17.

Jackwerth, J., and M. Rubinstei. (1996a). "Implied Binomial Trees: Generalizations and Empirical Tests."Working Paper, Haas School of Business, University of California, Berkeley.

Jackwerth, J., and M. Rubinstein. (1996b). "Recovering Probability Distributions from Options Prices."*Journey of Finance* 51: 1611—1631.

Jackwerth, J., and M. Rubinstein. (1996c). "Recovering Stochastic Processes from Option Prices."Working Paper, Haas School of Business, University of California, Berkeley.

Jackwerth, J. C. (2000). "Recovering Risk Aversion from Options Prices and Realized Returns."*Review of Financial Studies*13: 433—452.

Jacod, J., and P. Protter. (2000). *Probability Essentials*. New York: Springer-Verlag.

Jacod, J., and A. Shiryaev. (1987). *Limit Theorems for Stochastic Processes*. New York: Springer-Verlag.

Jacod, J., and A. Shiryaev. (1998). "Local Martingales and the Fundamental Asset Pricing Theorems in the Discrete-Time Case."*Finance and Stochastics* 2: 259—274.

Jaillet, P., D. Lamberton, and B. Lapeyre. (1988). "Inéquations Variationelles et

Théorie des Options."*Comtes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris* 307I: 961—965.

Jaillet, P., D. Lamberton, and B. Lapeyre. (1990). "Variational Inequalities and the Pricing of American Options."Working Paper, CERMA-ENPC, La Courtine, France.

Jakobsen, S. (1992). "Prepayment and the Valuation of Danish Mortgage-Backed Bonds."Working Paper, Ph. D. dissertation, Aarhaus School of Business, Denmark.

Jamshidian, F. (1989a). "Closed-Form Solution for American Options on Coupon Bonds in the General Gaussian Interest Rate Model."Working Paper, Financial Strategies Group, Merrill Lynch Capital Markets, New York.

Jamshidian, F. (1989b). "An Exact Bond Option Formula."*Journal of Finance* 44: 205—209.

Jamshidian, F. (1989c). "Free Boundary Formulas for American Options."Working Paper, Financial Strategies Group, Merrill Lynch Capital Markets, New York.

Jamshidian, F. (1989d). "The Multifactor Gaussian Interest Rate Model and Implementation."Working Paper, Financial Strategies Group, Merrill Lynch Capital Markets, New York.

Jamshidian, F. (1991a). "Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model."*Research in Finance* 9: 131—170.

Jamshidian, F. (1991b). "Commodity Option Evaluation in the Gaussian Futures Term Structure Model."*Review of Futures Markets* 10: 324—346.

Jamshidian, F. (1991c). "Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models."*Journal of Fixed Income* June: 62—74.

Jamshidian, F. (1993a). "Hedging and Evaluating Diff Swaps."Working Paper, Fuji International Finance PLC, London.

Jamshidian, F. (1993b). "Options and Futures Evaluation with Deterministic Volatilities."*Mathematical Finance* 3: 149—159.

Jamshidian, F. (1994). "Hedging Quantos, Differential Swaps and Ratios."*Applied Mathematical Finance* 1: 1—20.

Jamshidian, F. (1995). "A Simple Class of Square-Root Interest Rate Models."*Applied Mathematical Finance* 2: 61—72.

Jamshidian, F. (1996a). "Bond, Futures and Option Evaluation in the Quadratic Interest Rate Model."*Applied Mathematical Finance* 3: 93—115.

Jamshidian, F. (1996b). "Libor and Swap Market Models and Measures Ⅱ." Working Paper, Sakura Global Capital, London.

Jamshidian, F. (1997a). "A Note on Analytical Valuation of Double Barrier Options." Working Paper, Sakura Global Capital.

Jamshidian, F. (1997b). "Pricing and Hedging European Swaptions with Deterministic (Lognormal) Forward Swap Volatility." *Finance and Stochastics* 1: 293—330.

Jamshidian, F. (1999). "Libor Market Model with Semimartingales." Working Paper, NetAnalytic Limited.

Jamshidian, F., and M. Fein. (1990). "Closed Form Solutions for Oil Futures and European Options in the Gibson-Schwartz Model: A Comment." Working Paper, Financial Strategies Group, Merrill Lynch Capital Markets, New York.

Jarrow, R. (1988). *Finance Theory*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.

Jarrow, R., D. Lando, and S. Turnbull. (1997). "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads." *Review of Financial Studies* 10: 481—523.

Jarrow, R., D. Lando, and F. Yu. (1999). "Diversification and Default Risk: An Equivalence Theorem for Martingale and Empirical Default Intensities." Working Paper, Cornell University.

Jarrow, R. and D. Madan. (1991). "A Characterization of Complete Security Markets on a Brownian Filtration." *Mathematical Finance* 1: 31—44.

Jarrow, R. and D. Madan. (1999). "Hedging Contingent Claims on Semimartingales." *Finance and Stochastics* 3: 111—134.

Jarrow, R., and A. Rudd. (1983). *Option Pricing*. Homewood, Ⅲ.: Richard D. Irwin.

Jarrow, R. and S. Turnbull. (1994). "Delta, Gamma and Bucket Hedging of Interest Rate Derivatives." *Applied Mathematical Finance* 1: 21—48.

Jarrow, R. and S. Turnbull. (1995). "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk." *Journal of Finance* 50: 53—85.

Jarrow, R. and S. Turnbull. (1997a). "An Integrated Approach to the Hedging and Pricing of Eurodollar Derivatives." *Journal of Risk and Insurance* 64: 271—299.

Jarrow, R., and S. Turnbull. (1997b). "When Swaps are Dropped." *Risk*10 (May): 70—75.

Jarrow, R., and S. Turnbull (1999). *Derivative Securities* (2d ed.). Cincinnati: South-Western.

Jarrow, R., and F. Yu. (1999). "Counterparty Risk and the Pricing of Defaultable Se-

curities."Working Paper, Cornell University.

Jaschke, S. (1996). "Arbitrage Bounds for the Term Structure of Interest Rates." *Finance and Stochastics* 2: 29—40.

Jaschke, S. (1997). "Super-Hedging and Arbitrage Pricing of Bonds and Interest Rate Derivatives."Working Paper, Institut für Mathematik, Humboldt-Universitat zu Berlin.

Jeanblanc, M., and M. Pontier. (1990). "Optimal Portfolio for a Small Investor in a Market Model with Discontinuous Prices."*Applied Mathematics and Optimization* 22: 287—310.

Jeanblanc, M., and M. Rutkowski. (1999). "Modelling of Default Risk: An Overview."Working Paper, University of Evry Val of Essonne and Technical University of Warsaw.

Jeffrey, A. (1995a). "A Class of Non-Markovian Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models."Working Paper, School of Banking and Finance, University of New South Wales, Sydney.

Jeffrey, A. (1995b). "An Empirical Test of Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models."Working Paper, School of Banking and Finance, University of New South Wales, Sydney.

Jeffrey, A. (1995c). "Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate."*Journal of Financial and Quantitative Analysis*30: 619—643.

Jegadeesh, N. (1993). "An Empirical Analysis of the Pricing of Interest Rate Caps." Working Paper, College of Commerce and Business Administration, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Jin, Y., and P. Glasserman. (1998). "Equilibrium Positive Interest Rates: A Unified View."Working Paper, Columbia Business School, New York.

Johnson, B. (1994). "Dynamic Asset Pricing Theory: The Search for Implementable Results."Working Paper, Engineering-Economic Systems Department, Stanford University.

Johnson, H. (1987). "Options on the Maximum or the Minimum of Several Assets." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22:277—283.

Johnson, H., and D. Shanno. (1987). "The Pricing of Options when the Variance is Changing."*Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22:143—151.

Johnson, R., and R. Jacobs. (1986). "History Dependent Financial Claims: Monte

Carlo Valuation."Working Paper, Department of Finance, Simon Fraser University, Vancouver, Canada.

Jong, F. D. and P. Santa-Clara. (1999). "The Dynamics of the Forward Interest Rate Curve: A Formulation with State Variables."*Journal of Financial and Quantitative Analysis*34: 131—157.

Jordan, R (1995). "On the Relative Yields of Taxable and Municipal Bonds: A Theory of the Tax Structure of Interest Rates."Working Paper, Department of Finance, College of Business and Public Administration, University of Missouri-Columbia.

Jorgensen, P. (1994). "American Option Pricing."Working Paper, School of Business, Institute of Management, University of Aarhaus, Denmark.

Jorgensen, P. (1996). "American Bond Option Pricing in One-Factor Spot Interest Rate Models."*Review of Derivatives Research*1: 245—267.

Jorion, P. (1988). "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets."*Review of Financial Studies*1: 427—445.

Jouini, E., and H. Kallal. (1993a). "Efficient Trading Strategies in the Presence of Market Frictions."Working Paper, CREST-ENSAE, Paris.

Jouini, E., and H. Kallal. (1993b). "Portfolio Choice and Market Frictions."Working Paper, ENSAE, and Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, Paris, France.

Jouini, E., and H. Kallal. (1995). "Martingales, Arbitrage, and Equilibrium in Security Markets with Transactions Costs."*Journal of Economic Theory*66: 178—197.

Jouini, E., P. Koehl, and N. Touzi. (1995). "Incomplete Markets, Transaction Costs and Liquidity Effects."Working Paper, Crest-Ensae, Université de Paris I.

Joy, C., P. Boyle, and K. Tan. (1996). "Quasi-Monte Garlo Methods in Numerical Finance."*Management Science* 42: 926—938.

Ju, N. (1997a). "Fourier Transformation, Martingale, and the Pricing of Average-Rate Derivatives."Working Paper, Haas School of Business, University of California at Berkeley.

Ju, N. (1997b). "Pricing American Perpetual Lookback Options."Working Paper, Haas School of Business, University of California at Berkeley.

Judd, K. (1989). "Minimum Weighted Residual Methods for Solving Dynamic Economic Models."Working Paper, Hoover Institution, Stanford University.

Judd, K. (1997). "Incomplete Asset Markets with Heterogenous Tasts and Idiosyncrat-

ic Income."Working Paper, Hoover Institution, Stanford University.

Judd, K., F. Kubler, and K. Schmedders. (1997). "Computing Equilibria in Infinite Horizon Finance Economies-The Case of One Asset."Working Paper, Hoover Institution, Stanford University.

Kabanov, Y. (1996). "On the FTAP of Kreps-Delbaen-Schachermayer."Working Paper, Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté.

Kabanov, Y., and D. Kramkov. (1994). "Non-Arbitrage and Equivalent Martingale Measures: A New Proof of the Harrison-Pliska Theorem."*Theory of Probability and its Applications* 39: 523—527.

Kabanov, Y., and D. Kramkov. (1995). "Large Financial Markets: Asymptotic Arbitrage and Contiguity."*Theory of Probability and its Applications* 39: 182—187.

Kabanov, Y., and C. Stricker. (2000). "A Teacher's Note in No-Arbitrage Criteria." Working Paper, Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté.

Kajii, A. (1994). "Anonymity and Optimality of Competitive Equilibrium when Markets are Incomplete."*Journal of Economic Theory* 64: 115—129.

Kakutani, S. (1941). "A Generalization of Brouwer's Fixed-Point Theorem."*Duke Mathematical Journal* 8: 451—459.

Kan, R. (1993). "Gradient of the Representative Agent Utility When Agents Have Stochastic Recursive Preferences."Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Kan, R. (1995). "Structure of Pareto Optima when Agents Have Stochastic Recursive Preferences."*Journal of Economic Theory* 66: 626—631.

Kandori, M. (1988). "Equivalent Equilibria."*International Economic Review* 29: 401—417.

Karatzas, I. (1988). "On the Pricing of American Options."*Applied Mathematics and Optimization* 17: 37—60.

Karatzas, I. (1989). "Optimization Problems in the Theory of Continuous Trading." *SIAM Journal of Control and Optimization* 27: 1221—1259.

Karatzas, I. (1991). "A Note on Utility Maximization under Partial Observations." *Mathematical Finance* 1: 57—70.

Karatzas, I. (1993). "IMA Tutorial Lectures 1—3: Minneapolis."Working Paper, Department of Statistics, Columbia University.

Karatzas, I. (1997). *Lectures on the Mathematics of Finance*. Providence: American

Mathematical Society.

Karatzas, I., and S. -G. Kou. (1998). "Hedging American Contingent Claims with Constrained Portfolios." *Finance and Stochastics* 2: 215—258.

Karatzas, I., P. Lakner, J. Lehoczky, and S. Shreve. (1991). "Equilibrium in a Simplified Dynamic, Stochastic Economy with Heterogeneous Agents." In E. Meyet-Wolf, A. Schwartz, and O. Zeitouni (Eds.), *Stochastic Analysis: Liber Amicorum for Moshe Zakai*, pp. 245—272. New York: Academic Press.

Karatzas, I., J. Lehoczky, S. Sethi, and S. Shreve. (1986). "Explicit Solution of a General Consumption/Investment Problem." *Mathematics of Operations Research* 11: 261—294.

Karatzas, I., J. Lehoczky, and S. Shreve. (1987). "Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a 'Small Investor' on a Finite Horizon." *SIAM Journal of Control and Optimization* 25: 1157—1186.

Karatzas, I., J. Lehoczky, and S. Shreve. (1990). "Existence and Uniqueness of Multi-Agent Equilibrium in a Stochastic Dynamic Consumption/Investment Model." *Mathematics of Operations Research* 15: 80—128.

Karatzas, I., J. Lehoczky, and S. Shreve. (1991). "Equilibrium Models with Singular Asset Prices." *Mathematical Finance* 1: 11—30.

Karatzas, I., J. Lehoczky, S. Shreve, and G. -L. Xu. (1991). "Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in Incomplete Markets." *SIAM Journal of Control and Optimization* 29: 702—730.

Karatzas, I., and S. Shreve. (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Karatzas, I., and S. Shreve. (1998). *Methods of Mathematical Finance*. New York: Springer-Verlag.

Karatzas, I., and X. -X. Xue. (1990). "Utility Maximization in a Financial Marker with Partial Observations." Working Paper, Department of Mathematics, Rutgers University.

Karr, A. (1991). *Point Processes and Their Statistical Inference*, (2d ed.). New York: Marcel Dekker, Inc.

Kat, H. (1993). "Hedging Lookback and Asian Options." Working Paper, Derivatives Department, MeesPierson N. V., Amsterdam.

Kawazu, K., and S. Watanabe. (1971). "Branching Processes with Immigration and Related Limit Theorems." *Theory of Probability and its Applications* 16: 36—

54.

Kehoe, T., and D. K. Levine. (1993). "Debt-Constrained Asset Markets." *Review of Economic Studies* 60: 865—888.

Kennedy, D. (1994). "The Term Structure of Interest Rates as a Gaussian Random Field." *Mathematical Finance* 4: 247—258.

Kifer, Y. (2000). "Game Options." *Finance and Stochastics* 4: 443—463.

Kijima, M. (1998). "Monotonicities in a Markov Chain Model for Valuing Corporate Bonds Subject to Gredit Risk." *Mathematical Finance* 8: 229—247.

Kijima, M., and K. Komoribayashi. (1998). "A Markov Chain Model for Valuing Credit Risk Derivatives." *Journal of Derivatives* 6 (Fall): 97—108.

Kim, I. (1990). " The Analytic Valuation of American Options." *Review of Financial Studies* 3: 547—572.

Kim, J. (1992). "A Martingale Analysis of the Term Structure of Interest Rates." Working Paper, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University.

Kim, J. (1993). "A Discrete-Time Approximation of a One-Factor Markov Model of the Term Structure of Interest Rates. "Working Paper, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University.

Kim, J. (1994). "A Model of the Term Structure of Interest Rates with the Time-Variant Market Price of Rick. "Working Paper Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University.

Kim, P., R. Liptser, and W. Runggaldier. (1991). "Diffusion Approximation in Past Dependent Models and Applications to Option Pricing." *Annals of Applied Probability* 1: 379—405.

Kishimoto, N. (1989). "A Simplified Approach to Pricing Path Dependent Securities." Working Paper, Fuqua School of Business, Duke University.

Kocherlakota, N. (1990). "On the Discount Factor in 'Growth' Economies." *Journal of Monetary Economics* 25: 43—47.

Koedijk, K., F. Nissen, R. Schotman, and C. Wolff. (1994). "The Dynamics of Short -Term Interest Rate Volatility Reconsidered. "Working Paper, Limburg Institute of Financial Economics, University of Limburg.

Konno, H., and T. Takase. (1995). "A Constrained Least Square Approach to the Estimation of the Term Structure of Interest Rates. "*Financial Engineering and the Japanese Markets* 2: 169—179.

Konno, H., and T. Takase. (1996). "On the De-Facto Convex Structure of a Least Square Problem for Estimating the Term Structure of Interest Rates." *Financial Engineering and the Japanese Market* 3: 77—85.

Koo, H. -K. (1998). "Consumption and Portfolio Selection with Labor Income: A Continuous-Time Approach." *Mathematical Finance* 8: 49—65.

Koo, H. -K. (1999). "Consumption and Portfolio Selection with Labor Income: A Discrete-Time Approach." *Mathematical Methods of Operations Research* 50: 219—243.

Koopmans, T. (1960). "Stationary Utility and Impatience." *Econometrica* 28: 287—309.

Korn, R. (1995). "Contingent Claim Valuation in a Market with Different Interest Rates." *Mathematical Methods of Operations Research* 42: 255—274.

Kou, S. (1999). "A Jump Diffusion Model for Option Pricing with Three Properties: Leptokurtic Feature, Volatility Smile, and Analytical Tractability." Working Paper, Department of IEOR, Columbia University.

Krasa, S., and J. Werner. (1991). "Equilibria with Options: Existence and Indeterminacy." *Journal of Economic Theory* 54: 305—320.

Kraus, A., and R. Litzenberger. (1975). "Market Equilibrium in a Multiperiod State Preference Model with Logarithmic Utility." *Journal of Finance* 30: 1213—1227.

Kraus, A., and M. Smith. (1993). "A Simple Multifactor Term Structure Model." *Journal of Fixed Income* 3: 19—23.

Kreps, D. (1979). "Three Essays on Capital Markets." Working Paper, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University.

Kreps, D. (1981). "Arbitrage and Equilibrium in Economies with Infinitely Many Commodities." *Journal of Mathematical Economics* 8: 15—35.

Kreps, D. (1982). "Multiperiod Securities and the Efficient Allocation of Risk: A Comment on the Black-Scholes Option Pricing Model." In J. McCall (Ed.), *The Economics of Uncertainty and Information*, pp. 203—232. Chicago: University of Chicago Press.

Kreps, D. (1988). *Notes on the Theory of Choice*. Boulder, CO, and London: Westview Press.

Kreps, D., (1990). *A Course in Microeconomics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Kreps, D., and E. Porteus. (1978). "Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice." *Econometrica* 46: 185—200.

Krylov, N. (1980). *Controlled Diffusion Processes*. New York: Springer-Verlag.

Kubler, F., and K. Schmedders. (1997). "Computing Equilibria in Stochastic Finance Economies." Working Paper, Department of Economics, Yale University. Forthcoming in *Computational Economics*.

Kunitomo, N. (1993). "Long-Term Memory and Fractional Brownian Motion in Financial Markets." Working Paper, Faculty of Economics, University of Tokyo.

Kunitomo, N., and A. Takahashi. (1996). "The Asymptotic Expansion Approach to the Valuation of Interest Rates Contingent Claims." Working Paper, Faculty of Economics, University of Tokyo.

Kurz, M. (1993). "General Equilibrium with Endogenous Uncertainty." Working Paper, Department of Economics, Stanford University.

Kurz, M. (1997). "Asset Prices with Rational Beliefs." In M. Kurz (Ed.), *Endogenous Economic Fluctuations: Studies in the Theory of Rational Beliefs*. New York: Springer Verlag.

Kurz, M. (1998). "Social States of Belief and the Determinants of the Equity Risk Premium in a Rational Belief Equilibrium." In E. A. Y. A. Abramovich and N. Yannelis (Eds.), *Functional Analysis and Economic Theory*, pp. 171—220. New York: Springer Verlag.

Kurz, M., and A. Beltratti. (1996). "The Equity Premium is No Puzzle." Working Paper, Department of Economics Stanford University.

Kurz, M., and M. Motolese. (1999). "Eudogenous Uncertainty and Market Volatility." Working Paper, Stanford University.

Kusuoka, S. (1992a). "Arbitrage and Martingale Measure." Working Paper, Research Institure for Mathematical Sciences, Kyoto University.

Kusuoka, S. (1992b). "Consistent Price System when Transaction Costs Exist." Working Paper, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.

Kusuoka, S. (1993). "Limit Theorem on Option Replication Cost with Transaction Costs." Working Paper, Department of Mathematics, University of Tokyo.

Kusuoka, S. (1996). "A Remark on American Securities." Working Paper, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo.

Kusuoka, S. (1999a). "Approximation of Expectation of Diffusion Process and Mathematical Finance." Working Paper, Graduate School of Mathematical Sciences,

University of Tokyo. Forthcoming in *Advanced Studies in Pure Mathematics*, *Proceedings of Final Taniguchi Symposium*, *Nara* 1998, ed. T. Sunada.

Kusuoka, S. (1999b). "A Remark on Default Risk Models." *Advances in Mathematical Economics* 1: 69—82.

Kusuoka, S. (2000). "Term Structure and SPDE." *Advances in Mathematical Economics* 2: 67—85.

Kuwana, Y. (1994). Ph. D. Dissertation, Statistics Department, Stanford University.

Kuwana, Y. (1995). "Certainty Equivalence and Logarithmic Utilities in Consumption/Investment Problems." *Mathematical Finance* 5: 297—309.

Kydland, F. E., and E. Prescott. (1991). "Indeterminacy in Incomplete Market Economies." *Economic Theory* 1: 45—62.

Lacoste, V. (1995). "Wiener Chaos: A New Approach to Option Hedging." Working Paper, Department Finance, ESSEC.

Lagnado, R., and S. Osher. (1996). "A Technique for Calibrating Derivative Security Pricing Models: Numerical Solution of an Inverse Problem." Working Paper, CATS, Palo Alto.

Lakner, P. (1993a). "Equivalent Local Martingale Measures and Free Lunch in a Stochastic Model of Finance with Continuous Trading." Working Paper, Statistics and Operation Research Department, New York University.

Lakner, P. (1993b). "Martingale Measures for a Class of Right-Continuous Processes." *Mathematical Finance* 3: 43—54.

Lakner, P. (1994a). "Minimization of the Expected Squared Difference of a Random Variable and Stochastic Integrals with a Given Integrator." Working Paper, Statistics and Operation Research Department, New York University.

Lakner, P. (1994b). "Optimal Investment Processes for Utility Maximization Problems with Restricted Information." Working Paper, Statistics and Operation Research Department, New York University.

Lakner, P. (1995). "Utility Maximization with Partial Information." *Stochastic Processes and Their Applications* 56: 247—273.

Lakner, P., and E. Slud. (1991). "Optimal Consumption by a Bond Investor: The Case of Random Interest Rate Adapted to a Point Process." *SIAM Journal of Control and Optimization* 29: 638—655.

Lamberton, D. (1993). "Convergence of the Critical Price in the Approximation of American Options." *Mathematical Finance* 3: 179—190.

Lamberton, D. (1997). "Error Estimates for the Binomial Approximation of American Put Options." Working Paper, Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, Université De Marne-La-Vallée. Forthcoming in *The Annals of Applied Probability*.

Lamberton, D., and B. Lapeyre. (1997). *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*. Paris: Ellipses.

Lamberton, D., and G. Pagès. (1990). "Sur l'Approximation des Réduites." *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 26: 331—355.

Lamoureux, C., and W. Lastrapes. (1993). "Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities." *Review of Financial Studies* 6: 293—327.

Lando, D. (1994). "Three Essays on Contingent Claims Pricing." Working Paper, Ph. D. dissertation, Statistics Center, Cornell University.

Lando, D. (1995). "On Jump-Diffusion Option Pricing from the Viewpoint of Semimartingale Characteristics." *Surveys in Applied and Industrial Mathematics* 2: 605—625.

Lando, D. (1998). "On Cox Processes and Credit Risky Securities." *Review of Derivatives Research* 2: 99—120.

Lang, L., R. Litzenberger, and A. Liu. (1996). "Interest Rate Swaps: A Synthesis." Working Paper, Faculty of Business Administration, The Chinese University of Hong Kong.

Langetieg, T. (1980). "A Multivariate Model of the Term Structure." *Journal of Finance* 35: 71—97.

Lawson, J., and J. Morris. (1978). "The Extrapolation of First Order Methods for Parabolic Partial Differential Equations I." *SIAM Journal of Numerical Analysis* 15: 1212—1224.

Lazrak, A., and M. Quenez. (1999). "A Generalized Stochastic Differential Utility." Working Paper, Department of Analysis and Probability, University of Evry.

Leblanc, B., and O. Scaillet. (1998). "Path Dependent Options on Yields in the Affine Term Structure Model." *Finance and Stochastics* 2: 349—367.

Lee, B., and B. Ingram. (1991). "Simulation Estimation of Time-Series Models." *Journal of Econometrics* 47: 197—205.

Lee, J. J. (1990). "The Valuation of American Calls." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Lee, J. -J. (1991). "A Note on Binomial Approximation for Contingent Securities." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Lehoczky, J., S. Sethi, and S. Shreve. (1983). "Optimal Consumption and Investment Policies Allowing Consumption Constraints and Bankruptcy." *Mathematics of Operations Research* 8: 613—636.

Lehoczky, J., S. Sethi, and S. Shreve. (1985). "A Martingale Formulation for Optimal Consumption/Investment Decision Making." In *Optimal Control and Economic Analysis* 2, pp. 135—153. Amsterdam: North-Holland.

Leland, H. (1985). "Option Pricing and Replication with Transactions Costs." *Journal of Finance* 40: 1283—1301.

Leland, H. (1994). "Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure." *Journal of Finance* 49: 1213—1252.

Leland, H. (1998). "Agency Costs, Risk Management, and Capital Structure." *Journal of Finance* 53: 1213—1242.

Leland, H., and K. Toft. (1996). "Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads." *Journal of Finance* 51: 987—1019.

LeRoy, S. (1973). "Risk Aversion and the Martingale Property of Asset Prices." *International Economic Review* 14: 436—466.

Lesne, J. -F. (1995). "Indirect Inference Estimation of Yield Curve Factor Models." Working Paper, Universite de Cergy-Pontoise, THEMA.

Lesne, J. -P., J. -L. Prigent, and O. Scaillet. (2000). "Convergence of Discrete Time Option Pricing Models Under Stochastic Interest Rates." *Finance and Stochastics* 4: 81—93.

Levental, S., and A. Skorohod. (1995). "A Necessary and Sufficient Condition for Absence of Arbitrage with Tame Portfolios." *Annals of Applied Probability* 5: 906—925.

Levental, S., and A. Skorohod. (1997). "On the Possibility of Hedging Options in the Presence of Transactions Costs." *Annals of Applied Probability* 7: 410—443.

Levhari, D., and T. Srinivasan. (1969). "Optimal Savings under Uncertainty." *Review of Economic Studies* 59: 153—165.

Levine, D. (1989). "Infinite Horizon Equilibria with Incomplete Markets." *Journal of Mathematical Economics* 18: 357—376.

Levine, D., and W. Zame. (1996). "Debt Constraints and Equilibrium in Infinite Hori-

zon Economies with Incomplete Markets." *Journal of Mathematical Economics* 26: 103—131.

Levine, D., and W. Zame. (1999). "Does Market Incompleteness Matter?" Working Paper, Department of Economics, University of California, Los Angeles. Forthcoming in *Econometrica*.

Levy, A., M. Avellaneda, and A. Parás. (1994). "A New Approach for Pricing Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities: A 'Case Study' on the Trinomial Tree." Working Paper, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.

Li, A., P. Ritchken, and L. Sankarasubramanian. (1995). "Lattice Models for Pricing American Interest Rate Claims." *Journal of Finance* 50: 719—737.

Li, T. (1995). "Pricing of Swaps with Default Risk." Working Paper, Yale School of Management.

Linetsky, V. (1999). "Step Options." *Mathematical Finance* 9: 55—96.

Lintner, J. (1965). "The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets." *Review of Economics and Statistics* 47: 13—37.

Lions, P. -L. (1981). "Control of Diffusion Processes in R^N." *Communications in Pure and Applied Mathematics* 34: 121—147.

Lions, P. -L. (1983). "Optimal Control of Diffusion Processes." Working Paper, Université de Paris IX, Dauphine.

Lioui, A. (1995). "On Mean-Variance Hedging in Continuous Time with Imperfect Correlation." Working Paper, Department of Economics, Bar Ilan University.

Lipster, R., and A. Shiryaev. (1977). *Statistics of Random Processes*, I. New York: Springer-Verlag.

Litterman, R., and T. Iben. (1991). "Corporate Bond Valuation and the Term Structure of Credit Spreads." *Journal of Portfolio Management* Spring: 52—64.

Litterman, R., and J. Scheinkman. (1988). "Common Factors Affecting Bond Returns." Working Paper, Goldman Sachs, Financial Strategies Group, New York.

Litzenberger, R., (1992). "Swaps: Plain and Fanciful." *Journal of Finance* 47: 831—850.

Liu, J. (1999). "Portfolio Selection in Stochastic Environments." Working Paper, Stanford University.

Liu, J., J. Pan, and L. Pedersen. (1999). "Density-Based Inference in Affine Jump-

Diffusions. "Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Lobo, M., M. Fazel, and S. Boyd. (1999). "Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs and Bounds on Risk. "Working Paper, Information Systems Laboratory, Stanford University.

Loewenstein, M., and G. Willard. (1998). "Rational Equilibrium Asset-Pricing Bubbles in Continuous Trading Models. "Working Paper, Olin School of Business, Washington University in St. Louis.

Loewenstein, M., and G. Willard. (1999). "Local Martingales, Arbitrage, and Viability: Free Snacks and Cheap Thrills. "Working Paper, Olin School of Business, Washington University in St. Louis.

Löffler, A. (1996). "Variance Aversion Implies μ-σ^2-Criterion." *Journal of Economic Theory* 69: 532—539.

Long, J. (1990). "The Numeraire Portfolio." *Journal of Financial Economics* 26: 29—69.

Longstaff, F. (1990). "The Valuation of Options on Yields." *Journal of Financial Economics* 26: 97—121.

Longstaff, F., and E. Schwartz. (1992). "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model." *Journal of Finance* 47: 1259—1282.

Longstaff, F., and E. Schwartz. (1993). "Implementing of the Longstaff-Schwartz Interest Rate Model. "Working Paper, Anderson Graduate School of Management, University of California, Los Angeles.

Longstaff, F., and E. Schwartz, (1995a). "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt." *Journal of Finance* 50: 789—819.

Longstaff, F., and E. Schwartz. (1995b). "Valuing Credit Derivatives." *Journal of Fixed Income* 5 (June): 6—12.

Longstaff, F., and E. Schwartz. (1998). "Valuing American Options By Simulation: A Simple Least-Squares Approach. "Working Paper, Anderson Graduate School of Management, University of California, Los Angeles.

Loshak, B. (1996). "The Valuation of Defaultable Convertible Bonds under Stochastic Interest Rate. "Working Paper, Krannert Graduate School of Management, Purdue University, West Lafayette.

Lu, S., and G. Yu. (1993). "Valuation of Options under Stochastic Volatility: The Garch Diffusion Approach. "Working Paper, Department of Mathematics, Uni-

versity of Michigan.

Lucas, D. (1994). "Asset Pricing with Undiversifiable Income Risk and Short Sales Constraints: Deepening the Equity Premium Puzzle." *Journal of Monetary Economics* 34: 325—341.

Lucas, D. (1995). "Market Fractions, Savings Behavior and Portfolio Choice." Working Paper, Kellogg School of Management, Northwestern University.

Lucas, R. (1978). "Asset Prices in an Exchange Economy." *Econometrica* 46: 1429—1445.

Luenberger, D. (1969). *Optimization by Vector Space Methods*. New York: Wiley.

Luenberger, D. (1984). *Introduction to Linear and Nonlinear Programming* (2d ed.). Reading, MA: Addison-Wesley.

Luenberger, D. (1995). *Microeconomic Theory*. New York: McGraw-Hill.

Lund, J. (1999). "A Model for Studying the Effect of EMU on European Yield Curves." *European Finance Review, Journal of the European Finance Association* 2: 321—363.

Luttmer, E. (1996). "Asset Pricing in Economies with Frictions." *Econometrica* 64: 1439—1467.

Lynch, A., and P. Balduzzi. (1998). "Predictability and Transaction Costs: The Impact on Rebalancing Rules and Behavior." Working Paper, New York University.

Ma, C. -H. (1991). "Valuation of Derivative Securities with Mixed Poisson-Brownian Information and with Recursive Utility." Working Paper, Department of Economics, University of Toronto.

Ma, C. -H. (1993a). "Intertemporal Recursive Utility in the Presence of Mixed Poisson -Brownian, Uncertainty." Working Paper, Department of Economics, McGill University.

Ma, C. -H. (1993b). "Market Equilibrium with Heterogeneous Recursive-Utility-Maximizing Agents." *Economic Theory* 3: 243—266; Corrigendum 6 (1995): 567—570.

Ma, C. -H. (1994). "Discrete-Time Model of Asset Pricing in Incomplete Market: GE Approach with Recursive Utility." Working Paper, Department of Economics, McGill University.

Ma, C. -H. (1996). "Attitudes Toward the Timing of Resolution of Uncertainty and the Existence of Recursive Utility." Working Paper, Department of Economics, McGill University, Montreal.

Ma, J., and J. Cvitanić. (1996). "Hedging Options for a Large Investor and Forward Backward SDEs." *Annals of Applied Probability* 6: 370—398.

Ma, J., P. Protter, and J. Yong. (1994). "Solving Forward-Backward Stochastic Differential Equations Explicitly-A Four Step Scheme." *Probability Theory and Related Fields* 98: 339— 359.

Ma, J., and J. Yong. (1995). "Solvability of Forward-Backward SDEs and the Nodal Set of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations." *Chinese Annals of Mathematics. Series B* 16: 279—298.

Ma, J., and J. Yong. (1999). *Forward-Backward Stochastic Differential Equations and their Applications*. New York: Springer-Verlag.

Machina, M. (1982). "'Expected Utility' Analysis without the Independence Axiom." *Econometrica* 50: 277—323.

Madan, D. (1988). "Risk Measurement in Semimartingale Models with Multiple Consumption Goods." *Journal of Economic Theory* 44: 398—412.

Madan, D., and E. Chang. (1996). "Volatility Smiles, Skewness Premia and Risk Metrics: Applications of a Four Parameter Closed Form Generalization of Geometric Brownian Motion to the Pricing of Options." Working Paper, University of Maryland.

Madan, D., and F. Milne. (1991). "Option Pricing with V. G. Martingale Components." *Mathematical Finance* 1: 39—55.

Madan, D., F. Milne, and H. Shefrin. (1989). "The Multinomial Option Pricing Model and Its Brownian and Poisson Limits." *Review of Financial Studies* 2: 251—266.

Madan, D., and H. Unal. (1998). "Prcing the Risks of Default." *Review of Derivatives Research* 2: 121—160.

Maghsoodi, Y. (1996a). "Market's Change in Time, Time Change and Time Structured Term Structures." Working Paper, SCINANCE, UK, Southampton and University of Southampton.

Maghsoodi, Y. (1996b). "Solution of the Extended CIR Term Structure and Bond Option Valuation." *Mathematical Finance* 6: 89—109.

Maghsoodi, Y. (1997a). "Term Structure, Solutions and Option Valuation Under Marked Point Process Square-Root Interest Rates." Working paper, Department of Mathematics, University of Southampton, U. K.

Maghsoodi, Y. (1997b). "Two-Country Term Structure under Marked Point Process

Diffusion Interest and Exchange Rates."Working Paper, Department of Mathematics, University of Southampton, U. K.

Maghsoodi, Y. (1998). "A Closed-Form Analytical Formula for Options with a Non-Linear Stochastic Volatility."Working Paper, University of Southampton, UK.

Magill, M., and M. Quinzii. (1994). "Infinite Horizon Incomplete Markets."*Econometrica* 62: 853—880.

Magill, M., and M. Quinzii. (1996a). "Incomplete Markets over an Infinite Horizon: Long-Lived Securities and Speculative Bubbles."*Journal of Mathematical Economics* 26: 133—170.

Magill, M., and M. Quinzii. (1996b). *Theory of Incomplete Markets*. Cambridge, MA: MIT Press.

Magill, M., and W. Shafer. (1990). "Characterization of Generically Complete Real Asset Structures."*Journal of Mathematical Economics* 19: 167—194.

Magill, M., and W. Shafer. (1991). "Incomplete Markets."In *Handbook of Mathematical Economics*, *Volume* 4, pp. 1523—1614. Amsterdam: North-Holland.

Mankiw, G. (1986). "The Equity Premium and the Concentration of Aggregate Shocks."*Journal of Financial Economics* 17: 211—219.

Marcet, A. (1993). "Simulation Analysis of Dynamic Stochastic Models: Applications to Theory and Estimation."Working Paper, Department of Economics, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona.

Marcet, A., and D. Marshall. (1994). "Solving Nonlinear Rational Expectations Models by Parameterized Expectations: Convergence to Stationary Solutions."Working Paper, Universitat Pompeu Fabra, Department of Economics, Barcelona.

Marcet, A., and K. Singleton. (1999). "Equilibrium Asset Prices and Savings of Heterogeneous Agents in the Presence of Portfolio Constraints."*Macroeconomic Dynamics* 3: 243—277.

Marcozzi, M. (2000). "On the Approximation of Optimal Stopping Problems with Application to Financial Mathematics."Working Paper, Department of Mathematical Sciences, University of Nevada, Las Vegas.

Margrabe, W. (1978). "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another."*Journal of Finance* 33: 177—186.

Marsh, T. (1994). "Term Structure of Interest Rates and the Pricing of Fixed Income Claims and Bonds."Working Paper, Haas School of Business, University of California, Berkeley.

Marshall, D. (1999). "Can Cost of Consumption Adjustment Explain Asset Pricing Puzzles?" *Journal of Finance* 54: 623—654.

Martin, M. (1997). "Credit Risk in Derivative Products." Working Paper, University of London, London Business School.

Mas-Colell, A. (1985). *The Theory of General Economic Equilibrium-A Differentiable Approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mas-Colell, A. (1986a). "The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices." *Econometrica* 54: 1039—1054.

Mas-Colell, A. (1986b). "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum Revisited." In W. Hildenbrand and A. Mas-Colell (Eds.), *Contributions to Mathematical Economics*, pp. 317—332. Amsterdam: North-Holland.

Mas-Colell, A. (1987). "An Observation on Geanakoplos and Polemarchakis." Working Paper, Department of Economics, Harvard University.

Mas-Colell, A. (1991). "Indeterminacy in Incomplete Market Economies." *Economic Theory* 1: 45—62.

Mas-Colell, A., and P. Monteiro. (1996). "Self-Fulfilling Equilibria: An Existence Theorem for a General State Space." *Journal of Mathematical Economics* 26: 51—62.

Mas-Colell, A., and W. Zame. (1992). "Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces." In W. Hildenbrand and H. Sonnenschein (Eds.), *Handbook of Mathematical Economics*, *Volume* 4, pp. 1835—1898. Amsterdam: North-Holland.

McConnell, J., and E. Schwartz. (1986). "LYON Taming." *Journal of Finance* 41: 561—576.

McFadden, D. (1989). "A Method of Simulated Moments for Estimation of Discrete Response Models without Numerical Integration." *Econometrica* 57: 995—1026.

McKean, H. (1965). "Appendix: Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics." *Industrial Management Review* 6: 32—39.

McKenzie, L. (1954). "On Equilibrium in Graham's. Model of World Trade and Other Competitive Systems." *Econometrica* 22: 147—161.

McManus, D. (1984). "Incomplete Markets: Generic Existence of Equilibrium and Optimality Properties in an Economy with Futures Markets." Working Paper, Department of Economics, University of Pennsylvania.

Mehra, R. (1988). "On the Existence and Representation of Equilibrium in an Economy

with Growth and Nonstationary Consumption." *International Economic Review* 29: 131—135.

Mehra, R., and E. Prescott. (1985). "The Equity Premium: A Puzzle." *Journal of Monetary Economics* 15: 145—161.

Mehrling, P. (1990). "Heterogeneity, Incomplete Markets, and the Equity Premium." Working Paper, Department of Economics, Barnard College and Columbia University.

Methrling, P. (1998). "Idiosyncratic Risk, Borrowing Constraints and Asset Prices." *Metroeconomica* 49: 261—283.

Melino, A., and S. Turnbull. (1990). "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility." *Journal of Econometrics* 45: 239—265.

Mella-Barral, P. (1999). "Dynamics of Default and Debt Reorganization." *Review of Financial Studies* 12: 535—578.

Mella-Barral, P., and W. Perraudin. (1997). "Strategic Debt Service." *Journal of Finance* 52: 531—556.

Merrick, J. (1999). "Crisis Dynamics of Russian Eurobond Implied Default Recovery Ratios." Working Paper, Stern School of Business, New York University.

Merton, R. (1969). "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case." *Review of Economics and Statistics* 51: 247—257.

Merton, R. (1970). "A Dynamic General Equilibrium Model of the Asset Market and its Application to the Pricing of the Capital Structure of the Firm." Working Paper, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

Merton, R. (1971). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model." *Journal of Economic Theory* 3: 373—413; Erratum 6 (1973): 213—214.

Merton, R. (1973a). "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model." *Econometrica* 41: 867—888.

Merton, R. (1973b). "The Theory of Rational Option Pricing." *Bell Journal of Economics and Management Science* 4: 141—183.

Merton, R. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates." *Journal of Finance* 29: 449—470.

Merton, R. (1976). "Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous." *Journal of Financial Economics* 5: 125—144.

Merton, R. (1977). "On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani-Miller

Theorem." *Journal of Financial Economics* 5: 241—250.

Merton, R. (1990). *Continuous-Time Finance*. Oxford: Basil Blackwell.

Meyer, P. -A. (1966). *Probability and Potentials*. Waltham, MA: Blaisdell Publishing Company.

Milshtein, G. (1974). "Approximate Integration of Stochastic Differential Equations." *Theory of Probability and Its Applications* 3: 557—562.

Milshtein, G. (1978). "A Method of Second-Order Accuracy Integration of Stochastic Differential Equations." *Theory of Probability and Its Applications* 23: 396—401.

Miltersen, K. (1993). "Pricing of Interest Rate Contingent Claims: Implementing the Simulation Approach." Working Paper, Department of Management, Odense University.

Miltersen, K. (1994). "An Arbitrage Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Annals of Applied Probability* 4: 953—967.

Miltersen, K., and S. -A. Persson. (1997). "Pricing Rate of Return Guarantees in a Heath-Jarrow-Morton Framework." *Insurance: Mathematics and Economics* 25: 307—325.

Miltersen, K., K. Sandmann, and D. Sondermann. (1997). "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates." *Journal of Finance* 52: 409—430.

Miltersen, K., and E. Schwartz. (1998). "Pricing of Options on Commodity Futures with Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest Rates." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 33: 33—59.

Mirrlees, J. (1974). "Optimal Accumulation under Uncertainty: The Case of Stationary Returns to Investment." In J. Drèze (Ed.), *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality*, pp. 36—50. New York: Wiley.

Mitchell, A., and D. Griffiths. (1980). *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. New York: John Wiley.

Modigliani, F., and M. Miller. (1958). "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment." *American Economic Review* 48: 261—297.

Monat, P., and C. Stricker. (1994). "Décomposition de Föllmer-Schweizer et Fermeture de $G_T(\Theta)$." *Comtes Rendus de l'Academie de Science Paris* 318I: 573—576.

Monat, P., and C. Stricker. (1995). "Follmer-Schweizer Decomposition and Closedness of $G_T(\Theta)$." *Annals of Probability* 23: 605—628.

Monteiro, P. (1994). "Inada's Condition Imply Equilibrium Existence is Rate." *Economics Letters* 44: 99—102.

Monteiro, P. (1996). "A New Proof of the Existence of Equilibrium in Incomplete Markets Economies." *Journal of Mathematical Economics* 26: 85—101.

Moreleda, J. (1997). *On The Pricing of Interest Rate Options*. Tinbergen Institute Research Series., Rotterdam, The Netherlands: Erasmus University.

Morokoff, W., and R. Caflisch. (1993). "A Quasi-Monte Carlo Approach to Particle Simulation of the Heat Equation." *SIAM Journal of Numerical Analysis* 30: 1558—1573.

Morokoff, W., and R. Caflisch. (1994). "Quasi-Random Sequences and Their Discrepancies." *SIAM Journal of Scientific Computing* 15:1251—1279.

Morokoff, W., and R. Caflisch. (1995). "Quasi-Monte Carlo Integration." *Journal of Computational Physics* 122: 218—230.

Moskowitz, B., and R. Caflisch. (1994). "Smoothness and Dimension Reduction in Quasi-Monte Carlo Methods." Working Paper, Department of Mathematics, University of California, Los, Angeles.

Müller, S. (1985). *Arbitrage Pricing of Contingent Claims*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 254. New York: Springer-Verlag.

Munk, C. (1997). "No-Arbitrage Bounds on Contingent Claims Prices with Convex Constraints on the Dollar Investments of the Hedge Portfolio." Working Paper, Department of Management, Odense University, Denmark.

Munk, C. (2000b). "Optimal Consumption/Portfolio Policies with Undiversifiable Income Risk and Liquidity Constraints." *Journal of Economic Dynamics and Control* 24: 1315—1343.

Musiela, M. (1994a). "Nominal Annual Rates and Lognormal Volatility Structure." Working Paper, Department of Mathematics, University of New South Wales, Sydney.

Musiela, M. (1994b). "Stochastic PDEs and Term Structure Models." Working Paper, Department of Mathematics, University of New South Wales, Sydney.

Musiela, M., and M. Rutkowski. (1997). *Martingale Methods in Financial Modeling*. New York: Springer.

Musiela, M., and D. Sondermann. (1994). "Different Dynamical Specifications of the Term Structure of Interest Rates and their Implications." Working Paper, Department of Mathematics, University of New South Wales, Sydney.

Myneni, R. (1992a). "Continuous-Time Relationships between Futures and Forward Prices." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Myneni, R. (1992b). "The Pricing of the American Option." *Annals of Applied Probability* 2: 1—23.

Nahum, E. (1998). "The Pricing of Options Depending on a Discrete Maximum." Working Paper, Department of Statistics, University of California, Berkeley.

Naik, V. (1994). "Asset Prices in Dynamic Production Economies with Time Varying Risk." *Review of Financial Studies* 7: 781—801.

Naik, V., and M. Lee. (1994). "The Yield Curve and Bond Option Prices with Discrete Shifts in Economic Regimes." Working Paper, University of British Columbia.

Naik, V., and R. Uppal. (1994). "Leverage Constraints and the Optimal Hedging of Stock and Bond Options." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 29: 199—222.

Nakagawa, H. (1999). "A Remark on Spot Rate Models Induced by an Equilibrium Model." *University of Tokyo Journal of Mathematical Sciences* 6: 453—475.

Neftci, S. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. New York: Academic Press.

Negishi, T. (1960). "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy." *Metroeconometrica* 12: 92—97.

Nelson, D. (1990). "ARCH Models as Diffusion Appoximations." *Journal of Econometrics* 45: 7—38.

Nelson, D. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach." *Econometrica* 59: 347—370.

Nelson, D., (1992). "Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models I." *Journal of Econometrics* 52: 61—90.

Nelson, D., and K. Ramaswamy. (1989). "Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models." *Review of Financial Studies* 3: 393—430.

Nelson, J., and S. Schaefer. (1983). "Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization." In *The Dynamic of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies*. Greenwich: JAI Press.

Newton, N. (1990). "Asymptotically Efficient Runge-Kutta Methods for a Class of Ito and Stratonovich Equations." Working Paper, Department of Electrical Engineering, University of Essex.

Nielsen, J., and K. Sandmann. (1996). "The Pricing of Asian Options Under Stochas-

tic Interest Rates."*Applied Mathematical Finance* 3: 209—236.

Nielsen, L. (1990a). "Equilibrium in CAPM without a Riskless Asset."*Review of Economic Studies* 57: 315—324.

Nielsen, L. (1990b). "Existence of Equilibrium in CAPM."*Journal of Economic Theory* 52: 223—231.

Nielsen, L. (1993a). "Robustness of the Market Model."*Economic Theory* 3: 365—370.

Nielsen, L. (1993b). "Two-Fund Separation and Equilibrium."Working Paper, INSEAD, Fontainebleau, France.

Nielsen, L. T., and J. Saá-Requejo. (1992). "Exchange Rate and Term Structure Dynamics and the Pricing of Derivative Securities."Working Paper, INSEAD, Fontainebleau, France.

Nielsen, L. T., J. Saá-Requejo, and P. Santa-Clara. (1993). "Default Risk and Interest Rate Risk: The Term Structure of Credit Spreads."Working Paper, INSEAD, Fontainebleau, France.

Nielsen, S., and E. Ronn. (1995). "The Valuation of Default Risk in Corporate Bonds and Interest Rate Swaps."Working Paper, Department of Management Science and Information Systems, University of Texas at Austin.

Nunes, J., L. Clewlow, and S. Hodges. (1999). "Interest Rate Derivatives in a Duffie and Kan Model with Stochastic Volatility: An Arrow-Debreu Pricing Approach." *Review of Derivatives Research* 3: 5—66.

Nyborg, K. (1996). "The Use and Pricing of Convertible Bonds."*Applied Mathematical Finance* 3: 167—190.

Ocone, D., and I. Karatzas. (1991). "A Generalized Clark Representation Formula, with Application to Optimal Portfolios."*Stochastics and Stochastics Reports* 34: 187—220.

Ōhashi, K. (1991). "A Note on the Terminal Date Security Prices in a Continuous Time Trading Model with Dividends."*Journal of Mathematical Economics* 20: 219—224.

Oliveira, D. (1994). "Arbitrage Pricing of Integral Options."Working Paper, Instituto de Matemática Pura e Applicada, Rio de Janeiro.

Ordentlich, E. (1996). Ph. D. Dissertation, Department of Electrical Engineering. Stanford University.

Owen, A. (1996). "Monte Carlo Variance of Scrambled Net Quadrature."Working Pa-

per, Department of Statistics, Stanford University. Forthcoming in *SIAM Journal*.

Owen, A. (1997). "Scrambled Net Variance for Integrals of Smooth Functions." *Annals of Statistics* 25: 1541—1562.

Owen, A., and D. Tavella. (1996). "Scrambled Nets for Value at Risk Calculations." Working Paper, Statistics Deparment, Stanford University.

Pagès, H. (1987). "Optimal Consumption and Portfolio Policies when Markets are Incomplete." Working Paper, Department of Economics, Massachusetts Institute of Technology.

Pagès, H. (2000). "Estimating Brazilian Sovereign Risk from Brady Bond Prices." Working Paper, Bank of France.

Pakes, A., and D. Pollard. (1989). "Simulation and the Asymptotics of Optimization Estimators." *Econometrica* 57: 1027—1057.

Pan, J. (1999). "Integrated Time-Series Analysis of Spot and Options Prices." Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.

Pan, W. -H. (1993). "Constrained Efficient Allocations in Incomplete Markets: Characterization and Implementation." Working Paper, Department of Economics, University of Rochester.

Pan, W. -H. (1995). "A Second Welfare Theorem for Constrained Efficient Allocations in Incomplete Markets." *Journal of Mathematical Economics* 24: 577—599.

Pang, K. (1996). "Multi-Factor Gaussian HJM Approximation to Kennedy and Calibration to Caps and Swaptions Prices." Working Paper, Financial Options Research Center, Warwick Business School, University of Warwick.

Pang, K., and S. Hodges. (1995). "Non-Negative Affine Yield Models of the Term Structure." Working Paper, Financial Options Research Center, Warwick Business School, University of Warwick.

Pappalardo, L. (1996). "Option Pricing and Smile Effect when Underlying Stock Prices are Driven by a Jump Process." Working Paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Pardoux, E. (1997). "Generalized Discontinuous Backward Stochastic Differential Equations." In N. El Karoui and L. Mazliak (Eds.), *Backward Stochastic Differential Equations*, pp. 207—220. Essex: Addison Wesley Longman Ltd.

Pardoux, E., and S. Peng. (1990). "Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation." *Systems and Control Letters* 14: 55—61.

Pardoux, E., and S. Peng. (1994). "Some Backward Stochastic Differential Equations with Non-Lipschitz Coefficients." Working Paper, Department of Mathematics, Université de Provence.

Pearson, N., and T. -S. Sun. (1994). "An Empirical Examination of the Cox, Ingersoll, and Ross Model of the Term Structure of Interest Rates using the Method of Maximum Likelihood." *Journal of Finance* 54: 929—959.

Pedersen, H., and E. Shiu. (1993). "Pricing of Options on Bonds by Binomial Lattices and by Diffusion Processes." Working Paper, Investment Policy Department, Great-West Life Assurance Company.

Pedersen, H., E. Shiu, and A. Thorlacius. (1989). "Arbitrage-Free Pricing of Interest Rate Contingent Claims." *Transactions of the Society of Actuaries* 41: 231—265.

Pedersen, L. (1997). "Affine Multifactor Term Structure Models—Theory and Inference." Working Paper, University of Copenhagen.

Pedersen, M. (1999). "Bermudan Swaptions in the LIBOR Market Model." Working Paper, Financial Research Department, SimCorp A/S.

Peng, S. (1993a). "Adapted Solution of Backward Stochastic Equations and Related Partial Differential Equations." Working Paper, Department of Mathematics, Shandong University.

Peng, S. (1993b). "Backward Stochastic Differential Equations and Applications to Optimal Control." *Applied Mathematics and Optimization* 27: 125—144.

Pennacchi, G. (1991). "Identifying the Dynamics of Real Interest Rates and Inflation: Evidence Using Survey Data." *Review of Financial Studies* 4: 53—86.

Pham, H. (1995). "Optimal Stopping, Free Boundary and American Option in a Jump Diffusion Model." Working Paper, CEREMADE Université de Paris IX Dauphine, Forthcoming in *Applied Mathematics and Optimization*.

Pham, H., and N. Touzi. (1993). "Intertemporal Equilibrium Risk Premia in a Stochastic Volatility Model." Working Paper, CREST, Paris.

Piazzesi, M. (1997). "An Affine Model of the Term Structure of Interest Rates with Macroeconomic Factors." Working Paper, Stanford University.

Piazzesi, M. (1999). "A Linear-Quadratic Jump-Diffusion Model with Scheduled and Unscheduled Announcements." Working Paper, Stanford University.

Pierides, Y. (1997). "The Pricing of Credit Risk Derivatives." *Journal of Economic Dynamics and Control* 21: 1579—1611.

Pietra, T. (1992). "Indeterminacy in General Equilibrium Economies with Incomplete Financial Markets—Mixed Asset Returns." *Journal of Mathematical Economics* 21: 155—172.

Pikovsky, I., and I. Karatzas. (1996). "Anticipative Portfolio Optimization." *Advances in Applied Probability* 28: 1095—1122.

Pikovsky, I., and I. Karatzas. (1998). "Stochastic Equilibrium with Differential Information." Working Paper, Department of Mathematics, Columbia University.

Pikovsky, I., and S. Shreve. (1996a). "Callable Convertible Bonds." Working Paper, Department of Mathematics, Courant Institute, New York.

Pikovsky, I., and S. Shreve. (1996b). "Perpetual Convertible Debt." Working Paper, Department of Mathematics, Courant Institute, New York.

Pitts, C., and M. Selby. (1983). "The Pricing of Corporate Debt: A Further Note." *Journal of Finance* 38: 1311—1313.

Platen, E., and M. Schweizer. (1994). "On Smile and Skewness." Working Paper, School of Mathematical Sciences Centre for Mathematics and Its Applications, The Australian National University, Canberra.

Platten, I. (1994). "Non-linear General Equilibrium Models of the Term Structure: Comments and Two-Factor Generalization." *Finance* 15: 63—78.

Pliska, S. (1986). "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Optimal Portfolios." *Mathematics of Operations Research* 11: 371—382.

Pliska, S., and M. Selby. (1994). "On a Free Boundary Problem that Arises in Portfolio Management." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* 347: 555—561.

Polemarchakis, H., and B. Ku. (1990). "Options and Equilibrium." *Journal of Mathematical Economics* 19: 107—112.

Polemarchakis, H., and P. Siconolfi. (1993). "Competitive Equilibria without Free Disposal or Nonsatiation." *Journal of Mathematical Economics* 22: 85—99.

Pollard, D. (1984). *Convergence of Stochastic Processes*. New York: Springer-Verlag.

Pontier, M. (1997). "Solutions of Forward-Backward Stochastic Differential Equations." In N. El Karoui and L. Mazliak (Eds.), *Backward Stochastic Differential Equations*, pp. 39—46. Essex: Addison Wesley Longman Ltd.

Poteshman, A. M. (1998). "Estimating a General Stochastic Variance Model from Options Prices." Working Paper, Graduate School of Business, University of Chicago.

Prescott, E., and R. Mehra. (1980). "Recursive Competitive Equilibrium: The Case of Homogeneous Households." *Econometrica* 48: 1365—1379.

Press, W., B. Flannery, S. Teukolsky, and W. Vetterling. (1993). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing* (2d ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Prigent, J. -L. (1994). "From Discrete to Continuous Time Finance: Weak Convergence of the Optimal Financial Trading Strategies." Working Paper, Institute of Mathematical Research of Rennes, University of Rennes.

Prigent, J. -L. (1995). "Incomplete Markets: Convergence of Options Values under the Minimal Martingale Measure." Working Paper, THEMA, Université de Cergy-Pontoise, Cergy-Pontoise.

Prisman, E. (1985). "Valuation of Risky Assets in Arbitrage Free Economies with Frictions." Working Paper, Department of Finance, University of Arizona.

Prisman, E. (2000). *Pricing Derivative Securities*. San Diego: Academic Press.

Protter, P. (1990). *Stochastic Integration and Differential Equations*. New York: Springer-Verlag.

Protter, P. (1999). "A Partial Introduction to Finance." Working Paper, Purdue University. Forthcoming in *Stochastic Processes and Their Applications*.

Pye, G. (1966). "A Markov Model of the Term Structure." *Quarterly Journal of Economics* 81: 61—72.

Pye, G. (1974). "Gauging the Default Premium." *Financial Analysts Journal* (January-February): 49—52.

Quenez, M. -C. (1992). "Méthodes de Controle Stochastique en Finance." Working Paper, Ph. D. diss., Laboratoires de Probabilités, Université de Paris VI.

Quenez, M. -C. (1997). "Stochastic Control and BSDEs." In N. El Karoui and L. Mazliak (Eds.), *Backward Stochastic Differential Equations*, pp. 83—100. Essex: Addison Wesley Longman Ltd.

Radner, R. (1967). "Equilibre des Marchés a Terme et au Comptant en Cas d'Incertitude." *Cahiers d'Econométrie* 4: 35—52.

Radner, R. (1972). "Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Prices Expectations in a Sequence of Markets." *Econometrica* 40: 289—303.

Rady, S. (1993). "State Prices Implicit in Valuation Formula for Derivative Securities: A Martingale Approach." Working Paper, London School of Economics.

Rady, S. (1995). "Option Pricing with a Quadratic Diffusion Term." Working Paper,

Financial Markets Group, London School of Economics.

Rebonato, R., and I. Cooper. (1996). "Coupling Backward Induction with Monte Carlo Simulations: A Fast Fourier Transform (FFT) Approach." Working Paper, Institute of Finance and Accounting, London Business School.

Redekop, J. (1995). "Extreme-value Distributions for Generalizations of Brownian Motion." Working Paper, Departments of Economics and Statistics and Actuarial Science.

Redekop, J., and R. Fisher. (1995). "Extreme-Value Diagnostic Statistics for Some Stochastic Volatility Models." Working Paper, Department of Economics, University of Waterloo.

Reisman, H. (1986). "Option Pricing for Stocks with a Generalized Log-Normal Price Distribution." Working Paper, Department of Finance, University of Minnesota.

Renault, E., S. Pastorello, and N. Touzi. (2000). "Statistical Inference for Random Variance Option Pricing." *Journal of Business and Economic Statistics* 18: 358—317.

Renault, E., and N. Touzi. (1992). "Stochastic Volatility Models: Statistical Inference from Implied Volatilities." Working Paper, GREMAQ IDEI, Toulouse, and CREST, Paris, France.

Repullo, R. (1986). "On the Generic Existence of Radner Equilibria when there are as Many Securities as States of Nature." *Economics Letters* 21: 101—105.

Revuz, D. (1975). *Markov Chains*. Amsterdam: North-Holland.

Revuz, D., and M. Yor. (1991). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. New York: Springer.

Ricciardi, L., and S. Sato. (1988). "First-Passage-Time Density and Moments of the Ornstein-Uhlenbeck Process." *Journal of Applied Probability* 25: 43—57.

Rich, D. (1993). "The Valuation of Black-Scholes Options Subject to Intertemporal Default Risk." Working Paper, Department of Finance, Virginia Polytechnic Institute.

Richard, S. (1975). "Optimal Consumption, Portfolio, and Life Insurance Rules for an Uncertain Lived Individual in a Continuous Time Model." *Journal of Financial Economics* 2: 187—203.

Richard, S. (1978). "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates." *Journal of Financial Economics* 6: 33—57.

Richardson, H. (1989). "A Minimum Variance Result in Continuous Trading Portfolio

Optimization."*Management Science* 35: 1045—1055.

Ritchken, P., and L. Sankarasubramaniam. (1992). "Valuing Claims when Interest Rates have Stochastic Volatility."Working Paper, Department of Finance, University of Southern California.

Ritchken, P., and R. Trevor. (1993). "On Finite State Markovian Representations of the Term Structure." Working Paper, Department of Finance, University of Southern California.

Ritchken, P., and R. Trevor. (1999). "Option Pricing Options under GARCH and Stochastic Volatility."*Journal of Finance* 54: 377—402.

Rockafeller, T. (1973). *Convex Analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rogers, C. (1993). "Which Model for Term-Structure of Interest Rates Should One Use?"Working Paper, Department of Mathematics, Queen Mary and Westfield College, University of London.

Rogers, C. (1994). "Equivalent Martingale Measures and No-Arbitrage."*Stochastics and Stochastic Reports* 51: 1—9.

Rogers, C. (1998). "Arbitrage with Fractional Brownian Motion." Working Paper, University of Bath.

Rogers, C., and Z. Shi. (1995). "The Value of an Asian Option."*Journal of Applied Probability* 32: 1077—1088.

Rogers, C., and W. Stummer. (1994). "How Well Do One-Factor Models Fit Bond Prices?"Working Paper, School of Mathematical Science, University of Bath.

Rogers, L., and E. Stapleton. (1998). "Fast Accurate Binomial Pricing."*Finance and Siochastics* 2: 3—17.

Romano, M., and N. Touzi. (1997). "Contingent Claims and Market Completeness in a Stochastic Volatility Model."Mathematical Finance 7: 399—412.

Rosenberg, J., and R. Engle. (1999). "Empirical Pricing Kernels." Working Paper, Stern School of Business, New York University.

Ross, S. (1976). "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing."*Journal of Economic Theory* 13: 341—360.

Ross, S. (1978). "A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams."*Journal of Business* 51: 453—475.

Ross, S. (1987). "Arbitrage and Martingales with Taxation."*Journal of Political Economy* 95: 371—393.

Ross, S. (1989). "Information and Volatility: The Non-Arbitrage Martingale Approach

to Timing and Resolution Irrelevancy." *Journal of Finance* 64: 1—17.

Royden, H. (1968). *Real Analysis* (2d ed.). New York: Macmillan.

Rubinstein, M. (1974a). "An Aggregation Theorem for Securities Markets." *Journal of Financial Economics* 1: 225—244.

Rubinstein, M. (1974b). "A Discrete-Time Synthesis of Financial Theory." Working Paper, Haas School of Business, University of California, Berkeley.

Rubinstein, M. (1976). "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options." *Bell Journal of Economics* 7: 407—425.

Rubinstein, M. (1987). "Derivative Assets Analysis." *Economics Perspectives* 1: 73—93.

Rubinstein, M. (1994). "Implied Binomial Trees." *Journal of Finance* 49: 771—818.

Rubinstein, M. (1995). "As Simple as One, Two, Three." *Risk* 8 (January): 44—47.

Rubinstein, M. (1999). *Derivatives: A Power-Plus Picture Book*. Corte Madera, CA: In-The-Money.

Ruegg, M. (1996). "Optimal Consumption and Portfolio Choice with Borrowing Constraints." Working Paper, Department of Mathematics, ETH Zurich.

Rumsey, J. (1996). "Comparison of Tax Rates Inferred from Zero-Coupon Yield Curves." *Journal of Fixed Income* 6 (March): 75—81.

Rutkowski, M. (1995). "Pricing and Hedging of Contingent Claims in the HJM Model with Deterministic Volatilities." Working Paper, Institute of Mathematics, Politechnika Warszawska, Warszawa.

Rutkowski, M. (1996). "Valuation and Hedging of contingent Claims in the HJM Model with Deterministic Volatilities." *Applied Mathematical Finance* 3: 237—267.

Rutkowski, M. (1998). "Dynamics of Spot, Forward, and Futures Libor Rates." *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 1: 425—445.

Rydberg, T. (1997). "Existence of Unique Equivalent Martingale Measures in a Markovian Setting." *Finance and Stochastics* 1: 251—257.

Ryder, H., and G. Heal. (1973). "Optimal Growth with Intertemporally Dependent Preferences." *Review of Economic Studies* 40: 1—31.

Saà-Requejo, J. (1993). "The Dynamics of the Term Structure of Risk Premia in Foreign Exchange Markets." Working Paper, INSEAD, Fontainebleau, France.

Sabarwal, T. (1999). "Default and Bankruptcy in General Equilibrium." Working Paper, Department of Economics, University of California, Berkeley.

Saito, M. (1998). "Incomplete Insurance and Non-expected Utility." *Japanese Econom-*

ic Review 49: 271—83.

Samuelson, P. (1969). "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming." *Review of Economics and Statistics* 51: 239—246.

Sandmann, K., and D. Sondermann. (1997). "On the Stability of Longnormal Interest Rate Models." *Mathematical Finance* 7: 119—125.

Sandroni, A. (1995). "The Risk Premium and the Interest Rate Puzzles: The Role of Heterogeneous Agents." Working Paper, University of Pennsylvania.

Santa-Clara, P., and D. Sornette. (1997). "The Dynamics of the Forward Interest Rate Curve with Stochastic String Shocks." Working Paper, University of California, Los Angeles.

Santos, M. (1991). "Smoothness of the Policy Function in Discrete Time Economic Models." *Econometrica* 59: 1365—1382.

Santos, M. (1994). "Smooth Dynamics and Computation in Models of Economic Growth." *Journal of Economic Dynamics and Control* 18: 879—895.

Santos, M., and J. Vigo. (1998). "Numerical Dynamic Programming Algorithm Applied to Economic Models." *Econometrica* 66: 409—426.

Santos, M., and M. Woodford. (1995). "Rational Asset Pricing Bubbles." *Econometrica* 65: 19—58.

Sbuelz, A. (1998). "A General Treatment of Barrier Options." Working Paper, London Business School.

Scaillet, O. (1996). "Compound and Exchange Options in the Affine Term Structure Model." *Applied Mathematical Finance* 3: 75—92.

Schachermayer, W. (1992). "A Hilbert-Space Proof of the Fundamental Theorem of Asset Pricing." *Insurance Mathematics and Economics* 11: 249—257.

Schachermayer, W. (1993). "A Counterexample to Several Problems in the Theory of Asset Pricing." *Mathematical Finance*3: 217—230.

Schachermayer, W. (1994). "Martingale Measures for Discrete-Time Processes with Infinite Horizon." *Mathematical Finance* 4: 25—56.

Schachermayer, W. (1998). "Some Remarks on a Paper of David Kreps." Working Paper, Institut für Statistik der Universität Wien.

Schaefer, S., and E. Schwartz. (1984). "A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 19: 413—423.

Scheinkman, J. (1989). "Market Incompleteness and the Equilibrium Valuation of As-

sets. "In S. Bhattacharya and G. Constantinides (Eds.), *Theory of Valuation*, pp. 45—51. Totowa, NJ: Rowman and Littlefield.

Scheinkman, J., and Weiss. (1986). "Borrowing Constraints and Aggregate Economic Activity. "*Econometrica* 54: 23—45.

Schoenmakers, J., and A. Heemink. (1996). "Fast Valuation of Financial Derivatives. "Working Paper, Delft University of Technology, The Netherlands.

Schönbucher, P. (1998). "Term Structure Modelling of Defaultable Bonds. "*Review of Derivatives Research* 2: 161—192.

Schroder, M. (1993). "Optimal Portfolio Selection with Transactions Costs. "Working Paper, Finance Department, Northwestern University.

Schroder, M. (1999). "Changes of Numeraire of Pricing Futures, Forwards and Options. "*Review of Financial Studies* 12: 143—164.

Schröder, M. (1999a). "On the Valuation of Arithmetic-Average Asian Options: Explicit Formulas. "Working Paper, Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim.

Schröder, M. (1999b). "On the Valuation of Double-Barrier Options. "Working Paper, Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim.

Schröder, M. (1999c). "On the Valuation of Paris Options: Foundational Results. " Working Paper, Lehrstuhl Mathematik Ⅲ Universität Mannheim.

Schrödet, M. (1999d). "On the Valuation of Paris Options: The First Standard Case. " Working Paper, Lehrstuhl Mathematik Ⅲ Universität Mannheim.

Schroder, M., and C. Skiadas. (1997). "Optimal Consumption and Portfolio Selection with Temporally Dependent Preferences. "Working Paper, School of Management, SUNY at Buffalo, NY.

Schroder, M., and C. Skiadas. (1999). "Optimal Consumption and Portfolio Selection with Stochastic Differential Utility. "*Journal of Economic Theory* 89: 68—126.

Schroder, M., and C. Skiadas. (2000). "An Isomorphism between Asset Pricing Models with and without Linear Habit Formation. "Working Paper, Eli Broad Graduate School of Management, Michigan State University.

Schwartz, E. (1977). "The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach. " *Journal of Financial Economics* 4: 79—94.

Schwartz, E. (1977). "Presidential Address: The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. "*Journal of Finance* 52: 923—973.

Schweizer, M. (1992). "Martingale Densities for General Asset Prices." *Journal of Mathematical Economics* 21: 363—378.

Schweizer, M. (1994a). "Approximating Random Variables by Stochastic Integrals." *Annals of Probability* 22: 1536—1575.

Schweizer, M. (1994b). "Hedging and the CAPM." Working Paper, Department of Mathematics, University of Bonn.

Schweizer, M. (1994c). "A Projection Result for Semimartingales." *Stochastics and Stochastics Reports* 50: 175—183.

Schweizer, M. (1994d). "Risk-Minimizing Hedging Strategies under Restricted Information." *Mathematical Finance* 4: 327—342.

Scott, L. (1987). "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and Application." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 4: 419—438.

Scott, L. (1992). "Stock Market Volatility and the Pricing of Index Options: An Analysis of Implied Volatilities and the Volatility Risk Premium in a Model with Stochastic Interest Rates and Volatility." Working Paper, Department of Finance, University of Georgia.

Scott, L. (1996a). "Simulating a Multi-Factor Term Structure Model over Relatively Long Discrete Time Periods." Working Paper, Department of Banking and Finance, University of Georgia, Athens.

Scott, L. (1996b). "The Valuation of Interest Rate Derivatives in a Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Model that Matches the Initial Term Structure." Working Paper, Department of Banking and Finance, University of Georgia, Athens.

Sott, L. (1997). "Pricing Stock Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods." *Mathematical Finance* 7: 413—426.

Sekine, J. (1998). "Mean-Variance Hedging in Continuous-Time with Stochastic Interest Rate." Working Paper, MTP Investment Technology Institute, Tokyo.

Selby, M., and S. Hodges. (1987). "On the Evaluation of Compound Options." *Management Science* 33: 347—355.

Selby, M., and C. Strickland. (1993). "Computing the Fong and Vasicek Pure Discount Bond Price Formula." Working Paper FORC Preprint 93/42, October 1993, University of Warwick.

Selden, L. (1978). "A New Representation of Preference over 'Certain × Uncertain'

Consumption Pairs: The 'Ordinal Certainty Equivalent' Hypothesis." *Econometrica* 46: 1045—1060.

Serrat, A. (1995). "An Equilibrium Analysis of Liquidity Constraints." Working Paper, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

Serrat, A. (2000). "Exchange Rate Dynamics in a Multilateral Target Zone." *Review of Economic Studies* 67: 193—211.

Sethi, S., and M. Taksar. (1988). "A Note on Merton's 'Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model'." *Journal of Economic Theory* 46: 395—401.

Sethi, S., and M. Taksar. (1992). "Infinite-Horizon Investment Consumption Model with a Nonterminal Bankruptcy." *Journal of Optimization Theory and Applications* 74: 333—346.

Sethi, S., M. Taksar, and E. Prisman. (1992). "Explicit Solution of a General Consumption/Portfolio Problem with Subsistence Consumption and Bankruptcy." *Journal of Economic Dynamics and Control* 16: 747—768.

Shannon, C. (1996). "Determinacy of Competitive Equilibria in Economies with Many Commodities." Working Paper, Department of Economics, University of California, Berkeley. Forthcoming in *Economic Theory*.

Sharpe, W. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk." *Journal of Finance* 19: 425—442.

Sharpe, W. (1985). *Investments* (3d ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Shepp, L., and A. N. Shiryaev. (1993). "The Russian Option: Reduced Regret." *Annals of Applied Probability* 3: 631—640.

Shimko, D., N. Tejima, and D. van Deventer. (1993). "The Pricing of Risky Debt when Interest Rates are Stochastic." *Journal of Fixed Income* 3 (September): 58—65.

Shirakawa, H. (1994). "Optimal Consumption and Portfolio Selection with Incomplete Markets and Upper and Lower Bound Constraints." *Mathematical Finance* 4: 1—24.

Shreve, S., and M. Soner. (1994). "Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs." *Annals of Applied Probability* 4: 609—692.

Shreve, S., M. Soner, and G.-L. Xu. (1991). "Optimal Investment and Consumption with Two Bonds and Transaction Costs." *Mathematical Finance* 1: 53—84.

Shrikhande, M. (1995). "Nonaddictive Habit-Formation and the Equity Premium Puz-

zle. "Working Paper, School of Management, Georgia Institute of Technology, Atlanta.

Siegel, D., and D. Siegel. (1990). *Futures Markets*. Orlando: The Dryden Press.

Singh, M. (1995). "Estimation of Multifactor Cox, Ingersoll, and Ross Term Structure Model: Evidence on Volatility Structure and Parameter Stability." *Journal of Fixed Income* 5 (September): 8—28.

Singleton, K. (1999). "Estimation of Affine Asset Pricing Models using the Empirical Characteristic Function." Working Paper, Stanford University and NBER. Forthcoming in *Journal of Econometrics*.

Sircar, R. (1996). "Feedback Effects in Option Pricing." Working Paper, SC-CM Program, Stanford University.

Skiadas, C. (1995). "On the (Super) Differentiability of the Utility of a Representative Agent at a Pareto Optimal Allocation." Working Paper, Private Written Communication, Kellogg School of Management, Northwestern University.

Skiadas, C. (1997). "Conditioning and Aggregation of Preferences." *Econometrica* 65: 347—367.

Skiadas, C. (1998). "Recursive Utility and Preferences for Information." *Economic Theory* 12: 293—312.

Smith, G. (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods* (3d ed.). Oxford: Clarendon Press.

Soner, M., S. Shreve, and J. Cvitanić. (1994). "There is No Nontrivial Hedging Portfolio for Option Pricing with Transaction Costs." *Annals of Applied Probability* 5: 327—355.

Song, S. (1998). "A Remark on a Result of Duffie and Lando." Working Paper, Department of Mathematics, Université d'Evry, France.

Sorenson, E., and T. Bollier. (1995). "Pricing Default Risk: The Interest-Rate Swap Example." In *Derivative Credit Risk*. London: Risk Publications.

Sornette, D. (1998). "String Formulation of the Dynamics of the Forward Interest Rate Curve." Working Paper, Université des Sciences, Parc Valrose, France, and Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, Los Angeles.

Stambaugh, R. (1988). "The Information in Forward Rates: Implications for Models of the Term Structure." *Journal of Financial Economics* 21: 41—70.

Stanton, R. (1995a). "A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the

Market Price of Interest Rate Risk." *Journal of Finance* 52: 1973—2002.

Stanton, R. (1995b). "Rational Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities." *Review of Financial Studies* 8: 677—708.

Stanton, R., and N. Wallace. (1995). "ARM Wrestling: Valuing Adjustable Rate Mortgages Indexed to the Eleventh District Cost of Funds." *Real Estate Economics* 23: 311—345.

Stanton, R., and N. Wallace. (1998). "Mortgage Choice: What's the Point?" *Real Estate Economics* 26: 173—205.

Stapleton, R., and M. Subrahmanyam. (1978). "A Multiperiod Equilibrium Asset Pricing Model." *Econometrica* 46: 1077—1093.

Steekiste, R. V., and S. Foresi. (1999). "Arrow-Debreu Prices for Affine Models." Working Paper, Salomon Smith Barney, Inc., Goldman Sachs Asset Management.

Stein, E., and J. Stein. (1991). "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach." *Review of Financial Studies* 4: 725—752.

Stokey, N., and R. Lucas. (1989). *Recurisive Methods in Economic Dynamics* (*with Ed Prescott*). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Stoll, H., and R. Whaley. (1993). *Futures and Options: Theory and Applications*. Cincinnati: Southwestern.

Streufert, P. (1991a). "Existence and Characterization Results for Stochastic Dynamic Programming." Working Paper, Department of Economics, University of California, San Diego.

Streufert, P. (1991b). "Ordinal Dynamic Programming." Working Paper, Department of Economics, University of Wisconsin, Madison.

Streufert, P. (1996). "Biconvergent Stochastic Dynamic Programming, Asymptotic Impatience, and 'Average' Growth." *Journal of Economic Dynamics and Control* 20: 385—413.

Stricker, C. (1984). "Integral Representation in the Theory of Continuous Trading." *Stochastics and Stochastic Reports* 13: 249—265.

Stricker, C. (1990). "Arbitrage et Lois de Martingale." *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 26: 451—460.

Strikwerda, J. (1989). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Belmont, CA: Wadsworth.

Stulz, R. (1982). "Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets:

Analysis and Applications."*Journal of Financial Economics* 10: 161—185.

Subramanian, A. (1997). "European Option Pricing with General Transaction Costs." Working Paper, Center for Applied Mathematics, Cornell University.

Sun, T.-S. (1992). "Real and Nominal Interest Rates: A Discrete-Time Model and its Continuous-Time Limit." *Review of Financial Studies* 5: 581—612.

Sundaresan, S. (1989). "Intertemporally Dependent Preferences in the Theories of Consumption, Portfolio Choice and Equilibrium Asset Pricing."*Review of Financial Studies* 2: 73—89.

Sundaresan, S. (1997). *Fixed Income Markets and Their Derivatives*. Cincinnati: South-Western.

Svensson, L. E. O. (1989). "Portfolio Choice with Non-Expected Utility in Continuous Time."*Economic Letters* 30: 313—317.

Svensson, L. E. O. and M. Dahlquist. (1993). "Estimating the Term Structure of Interest Rates with Simple and Complex Functional Forms: Nelson and Siegel vs, Longstaff and Schwartz." Working Paper, Institute for International Economic Studies. Stockholm University.

Svensson, L. E. O. and I. Werner. (1993). "Non-Traded Assets in Incomplete Markets."*European Economic Review* 37: 1149—1168.

Taksar, M., M. Klass, and D. Assaf. (1988). "A Diffusion Model for Optimal Portfolio Selection in the Presence of Brokerage Fees."*Mathematics of Operations Research* 13: 277—294.

Talay, D. (1984). "Efficient Numerical Schemes for the Approximation of Expectations of Functionals of S. D. E." In *Filtering and Control of Random Processes*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 61, pp. 294—313. New York: Springer-Verlag.

Talay, D. (1986). "Discrétiation d'une Equation Différentielle Stochastique et Calcul Approché d'Espérances de Fonctionelles de la Solution."*Mathematical Modeling and Numerical Analysis* 20: 141—179.

Talay, D. (1990). "Second Order Discretization Schemes of Stochastic Differential Systems for the Computation of the Invariant Law."*Stochastics and Stochastics Reports* 29: 13—36.

Talay, D., and L. Tubaro. (1990). "Expansion of the Global Error for Numerical Schemes Solving Stochastic Differential Equations."*Stochastic Analysis and Application*8: 94—120.

Taleb, N. (1997). "Transaction Costs: Much Smaller than We Thought." Working Paper, Paribas, Inc. and Universite Paris Dauphine.

Tanudjaja, S. (1995). "American Swaption Early Exercise Premium Approximation." Working Paper, Global Derivatives, Citibank, London.

Tauchen, G., and R. Hussey. (1991). "Quadrature-Based Methods for Obtaining Approximate Solutions to the Integral Equations of Nonlinear Rational Expectations Models." *Econometrica* 59: 371—396.

Tavella, D., and C. Randall. (2000). *Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method*. New York: Wiley.

Taylor, S. (1994). "Modeling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study." *Mathematical Finance* 4: 183—204.

Telmer, C. (1993). "Asset-Pricing Puzzles and Incomplete Markets." *Journal of Finance* 48: 1803—1832.

Teple, L. (1996). "Revisiting Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process." Working Paper, Department of Engineering-Economic Systems, Stanford University.

Tepla, L. (2000). "A Characterization of Optimal Portfolio Policies with Borrowing and Shortsale Constraints." *Journal of Economic Dynamics and Control* 24: 1623—1639.

Tice, J., and N. Webber. (1997). "A Non-Linear Model of the Term Structure of Interest Rates." *Mathematical Finance* 7: 177—209.

Toft, K., and G. Brown. (1996). "Constructing Binomial Trees from Multiple Implied Probability Distributions." Working Paper, Department of Finance, University of Texas, Austin.

Topper, J. (1997). "Solving Term Structure Models with Finite Elements." Working Paper, Fachbereich Wirtschaftwissenschaften der Universität Hannover.

Török, C. (1993). "Numerical Solution of Linear Stochastic Differential Equations." Working Paper, Department of Mathematics, Technical University of Kosice.

Touzi, N. (1993). "Modèles de Volatilité Stochastique." Working Paper, Ph. D. Dissertation, CEREMADE, Université de Paris Ⅸ, Dauphine.

Touzi, N. (1995). "American Options Exercise Boundary when the Volatility Changes Randomly." Working Paper, CEREMADE, Université de Paris Ⅸ, Dauphine.

Tsiveriotis, K., and C. Fernandes. (1998). "Valuing Convertible Bonds With Credit Risk." *Journal of Fixed Income* 8: 95—102.

Turnbull, S. (1993). "Pricing and Hedging Diff Swaps." Working Paper, School of Business, Queen's University.

Turnbull, S. (1994). "Interest Rate Digital Options and Range Notes." Working Paper, School of Business, Queen's University.

Uhrig-Homburg, M. (1998). "Endogenous Bankruptcy when Issuance is Costly." Working Paper, Department of Finance, University of Mannheim.

Uzawa, H. (1968). "Time Preference, The Consumption Function and Optimal Asset Holdings." In J. Wolfe (Ed.), *Value, Capital, and Growth. Papers in Honour of Sir John Hicks*, pp. 485—504. Chicago: Aldine.

Van Horne, J. (1993). *Financial Market Rates and Flows* (4th ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Van Moerbeke, P. (1976). "On Optimal Stopping and Free Boundary Problems." *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 60: 101—148.

Vargiolu, T. (1999). "Invariant Measures for the Musiela Equation with Deterministic Diffusion Term." *Finance and Stochastics* 3: 483—492.

Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure." *Journal of Financial Economics* 5: 177—188.

Vasicek, O. (1995). "The Finite Factor Model of Bond Prices." Working Paper, KMV Corporation, San Francisco.

Vayanos, D. (1998). "Transaction Costs and Asset Prices: A Dynamic Equilibrium Model." *Review of Financial Studies* 11: 1—58.

Vayanos, D., and J. -L. Vila. (1999). "Equilibrium Interest Rate and Liquidity Premium with Transaction Costs." *Economic Theory* 13: 509—539.

Vila, J. -L. and T. Zariphopoulou. (1997). "Optimal Consumption and Portfolio Choice with Borrowing Constraints." *Journal of Economic Theory* 77: 402—431.

Walras, L. (1874—1877). *Elémentsd'Économie Politique Pure* (4th ed.). Lausanne: L. Corbaz, English translation of the definitive edition by W. Jaffé, *Elements of Pure Economics*. London: Allen and Unwin, (1954).

Wang, J. (1993a). "A Model of Intertemporal Asset Prices under Asymmetric Information." *Review of Economic Studies* 60: 249—282.

Wang, J. (1996). "The Term Structure of Interest Rates in a Pure Exchange Economy with Heterogeneous Investors." *Journal of Financial Economics* 41: 75—110.

Wang, S. (1993b). "The Integrability Problem of Asset Prices." *Journal of Economic*

Theory 59: 199—213.

Wang, S. (1993c). "Is Kreps-Porteus Utility Distinguishable from Intertemporal Expected Utility?" *Economic Theory* 3: 119—127.

Wang, S. (1993d). "The Local Recoverability of Risk Aversion and Intertemporal Substitution." *Journal of Economic Theory* 59: 333—363.

Webber, N. (1990). "The Term Structure of Spot Rate Volatility and the Behavior of Interest Rate Processes." Working Paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Webber, N. (1992). "The Consistency of Term Structure Models: The Short Rate, the Long Rate, and Volatility." Working Paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick.

Weerasinghe, A. (1998). "Singular Optimal Strategies for Investment with Transaction Costs." *Annals of Applied Probability* 8: 1312—1330.

Weil, P. (1992). "Equilibrium Asset Prices with Undiversifiable Labor Income Risk." *Journal of Economic Dynamics and Control* 16: 769—790.

Werner, J. (1985). "Equilibrium in Economies with Incomplete Financial Markets." *Journal of Economic Theory* 36: 110—119.

Werner, J. (1991). "On Constrained Optimal Allocations with Incomplete Markets." *Economic Theory* 1: 205—209.

Whalley, A. E., and P. Wilmott. (1997). "An Asymptotic Analysis of an Optimal Hedging Model for Options with Transaction Costs." *Mathematical Finance* 7: 307—324.

Wiggins, J. (1987). "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates." *Journal of Financial Economics* 19: 351—372.

Willard, G. (1996). "Calculating Prices and Sensitivities for Path-Independent Derivative Securities in Multifactor Models." Working Paper, Washington University in St. Louis.

Willinger, W., and M. Tacqu. (1989). "Pathwise Stochastic Integration and Application to the Theory of Continuous Trading." *Stochastic Processes and Their Applications* 32: 253—280.

Willinger, W., and M. Tacqu. (1991). "Toward a Convergence Theory for Continuous Stochastic Securities Market Models." *Mathematical Finance* 1: 55—100.

Wilmott, P., J. Dewynne, and S. Howison. (1993). *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford: Oxford Financial Press.

Wilmott, P., S. Howison, and J. Dewynne. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge: Cambridge University Press.

Won, D. (1996a). "Generic Existence of Equilibrium in Incomplete Markets: The Case of Differential Participation." Working Paper, Korea Economic Research Institute, Scoul.

Won, D. (1996b). "A New Approach to Equilibrium in Incomplete Markets." Working Paper, Korea Economic Research Institute, Seoul.

Wu, L. (1996) "The Front-Fixing Finite Difference Method for the Valuation of American Options." Working Paper, Department of Mathematics, University of Science and Technology, Hong Kong.

Xu, G.-L., and S. Shreve. (1992a). "A Duality Method for Optimal Consumption and Investment under Short-Selling Prohibition. Ⅰ. General Market Coefficients." *Annals of Applied Probability* 2: 87—112.

Xu, G.-L., and S. Shreve. (1992b). "A Duality Method for Optimal Consumption and Investment under Short-Selling Prohibition. Ⅱ. Constant Market Coefficients." *Annals of Applied Probability* 2: 314—328.

Yamada, T., and S. Watanabe. (1971). "On the Uniqueness of Solutions of Stochastic Differential Equations." *Journal of Mathematics of Kyoto University* 11: 155—167.

Yamazaki, A. (1991). "Equilibrium in Economies with Incomplete Markets and Outside Money: Transactions Costs and Existence." Working Paper, Department of Economics, Hitotsubashi University.

Yor, M. (1991). "On Some Exponential Functionals of Brownian Motion." Working Paper, Laboratoires de Probabilités, Université de Paris Ⅵ.

Yor, M. (1993). "The Distribution of Brownian Quantiles." Working Paper, Laboratoires de Probabilités, Université de Paris Ⅵ.

Yu, D. (1999). "Pricing of New Assets in an Infinite-Horizon Frictional Economy." *Pacific Economic Review* 4: 293—304.

Yu, G. (1993). "Essays on the Valuation of American Options." Working Paper, Stern School of Business, New York University.

Zapatero, F. (1993). "Interest Rates with Converging Heterogeneous Reliefs." Working Paper, Haas School of Business, University of California at Berkeley.

Zapatero, F. (1995). "Equilibrium Asset Prices and Exchange Rates." *Journal of Economic Dynamics and Control* 19: 787—811.

Zapatero, F. (1998). "Effects of Financial Innovations on Market Volatility when Beliefs are Heterogeneous." *Journal of Economic Dynamics and Control* 22: 597—626.

Zariphopoulou, T. (1992). "Investment-Consumption Models with Transactions Costs and Markov-Chain Parameters." *SIAM Journal on Control and Optimization* 30: 613—636.

Zariphopoulou, T. (1994). "Consumption-Investment Models with Constraints." *SIAM Journal on Control and Optimization* 32: 59—84.

Zhang, X. (1993). "Options Américaines et Modèles de Diffusion avec Sauts." *Comtes Rendus de l'Academie de Science de Paris* 317: 857—862.

Zhang, X. (1994). "Numerical Analysis of American Option Pricing in a Jump-Diffusion Model." Working Paper, CERMA, URA-CNRS 1502, E. N. P. C, Paris, France.

Zhang, C. -C. (1994). "Pricing Interest Rates Contingent Claims by a Pricing Kernel." Working Paper, NationsBank, New York.

Zhou, C. (1997a). "Path-Dependent Option Valuation when the Underlying Path is Discontinuous." Working Paper, Divisions of Research and Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington, D. C.

Zhou, C. -S. (2000). "A Jump-Diffusion Approach to Modeling Credit Risk and Valuing Defaultable Securities." Working Paper, Federal Reserve Board, Washington, D. C.

Zhou, Y. -Q. (1997b). "The Global Structure of Equilibrium Manifold in Incomplete Markets." *Journal of Mathematical Economics* 27: 91—111.

Zhu, Y. -I., and Y. Sun. (1999). "The Singularity-Separating Method for Two-Factor Convertible Bonds." *Journal of Computational Finance* 3 (Fall): 91—110.

Zou, J., and E. Derman. (1996). "Monte Garlo Valuation of Path-Dependent Options on Indexes with a Volatility Smile." Working Paper, Goldman, Sachs and Co., New York.

Zuasti, J. (1999). "Insurance with Frequent Trading." Working Paper, Pompeu Favra University, Barcelona.

Zvan, R., P. Forsyth, and K. Vetzal. (1998). "Robust Numerical Methods for PDE Models of Asian Options." *Journal of Computational Finance* 1 (Winter): 39—78.